Master 1 **Lundi 6 décembre 2010**
Théorie des Groupes **Exercices 9**

Le but de cette série d'exercices est de classifier les groupes finis d'ordre 12.

Rappel Lemme du Cours: Soit p et q deux premiers distincts et G un groupe d'ordre p^2q. Alors G est un produit semi-direct d'un p-sous-groupe de Sylow de G et d'un q-sous-groupe de Sylow de G.

1. Classifier (à isomorphisme près) les groupes abéliens d'ordre p^2q. En déduire ceux d'ordre 12.

Soit G un groupe non-abelien d'ordre 12, H un 2-sous-groupe de Sylow de G et K un 3-sous-groupe de Sylow de G.

2. Supposons que $H \triangleleft G$. Utiliser la représentation de G dans S_4 induite par les classes à gauche modulo K pour en déduire que G est un sous-groupe de S_4. Déterminer à isomorphisme près les groupes G ayant cette propriété.

3. Supposons que $K \triangleleft G$ et $H \simeq C_4$. Utiliser les propriétés des groupes métacycliques pour déterminer à isomorphisme près les groupes G possibles.

4. Supposons que $K \triangleleft G$ et $H \simeq C_2 \times C_2$. Déterminer quelles sont les actions possibles de H sur K par conjugaison (qu'est-ce le groupe $\mathrm{Aut}(K)$?). Obtenir des relations suffisantes et utiliser le théoreme de Van Dyk pour en déduire un isomorphisme avec un groupe d'ordre 12 dont vous connaissez bien la présentation.

5. Argumenter pourquoi les groupes trouvés aux exercices 2., 3. et 4. sont deux à deux non-isomorphes.