Master 1 **Lundi 29 novembre 2010**
Théorie des Groupes **Exercices 8**

1. Soit p un nombre premier.

a) Soit $1 \to K \to G \to H \to 1$ une suite exacte des groupes finis. Montrer que G est un p-groupe si et seulement si K et H sont des p-groupes.

b) Montrer qu'un groupe fini a l'ordre une puissance de p si et seulement si tout ses éléments ont l'ordre une puissance de p.

c) Montrer qu'un p-groupe P d'un groupe fini G est maximal pour l'inclusion si et seulement si p ne divise pas $[G : P]$.

2. Montrer que A_4 est le seul sous-groupe d'ordre 12 de S_4.

3. Montrer qu'aucun groupe d'ordre 300 n'est simple. (*Indication: Montrer que* $n_5 = 1$ *ou* 6. *Ensuite, si* $n_5 = 6$*, faire le groupe agir sur l'ensemble de ses* 5*-sous-groupes de Sylow et utiliser la représentation correspondante dans* $Sym(6)$.)

4. Soit p un nombre premier et n un nombre entier positif. Montrer que le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ contenant toutes les matrices triangulaires suppérieures est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. (*Indication: Compter!*)