Master 1 **Lundi 15 novembre 2010**
Théorie des Groupes **Exercices 7**

1. Construire des produits semidirects non-triviaux $(C_p \times C_p) \rtimes C_p$ et $C_{p^2} \rtimes C_p$ (i.e. trouver les automorphismes qui les définit, respectivement). Combien de constructions (à isomorphisme près) peut-on faire? *Indication: Le cas des premiers pairs est différent du cas des premiers impairs.*

2. Trouver l'abélianisé du groupe diédral D_{2n}. Peut-on avoir un morphisme de groupes surjectif de D_{2n} dans $C_2 \times C_2 \times C_2$?

3. Soit $G_1 = \langle X_1 | R_1 \rangle$ et $G_2 = \langle X_2 | R_2 \rangle$ des groupes finis et considérons le groupe $G = \langle X_1 \cup X_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$. Est-ce que G est un groupe fini? Supposons que G_1 et G_2 sont abéliens. Est-ce que G est aussi abélien? Sinon, décrire l'abélianisé de G en fonction des abélianisés de G_1 et G_2.

4. Trouver le sous-groupe dérivé du groupe alterné A_4. Est-ce que A_4 est un produit semi-direct? Donner une présentation de A_4. Montrer que A_4 est isomorphe au groupe des rotations d'un cube autour de son centre, le préservant. Décrire la rotation correspondante au cycle (123). *Indication: Considérer les diagonales du cube.*