Master 1 **Lundi 18 octobre 2010**
Théorie des Groupes **Exercices 6**

1. On considère le tore $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, où on a paramétré le cercle unité par $\mathbb{S}^1 = \{\, e^{ix} \,|\, x \in [0, 2\pi[\,\}$. Décrire les orbites de chacune des actions suivantes du groupe additif $\mathbb{R}$ des nombres réels sur $\mathbb{T}$ (faire un dessin).

a) $t \cdot (e^{ix}, e^{iy}) = (e^{i(x+t)}, e^{iy})$;

b) $t \cdot (e^{ix}, e^{iy}) = (e^{ix}, e^{i(y+t)})$;

c) $t \cdot (e^{ix}, e^{iy}) = (e^{i(x+t)}, e^{i(y+2t)})$;

d) $t \cdot (e^{ix}, e^{iy}) = (e^{i(x+t)}, e^{i(y+\sqrt{2}t)})$.

2. Soit G un groupe fini et X un G-ensemble fini. Pour tout $g \in G$ on pose $X^g = \{x \in X \,|\, g \cdot x = x\}$. Montrer que

$$\#(X/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \#(X^g)\,.$$

Remarque: Ce résultat a été trouvé indépendement par Frobenius en 1845 et Cauchy en 1887.
Application: On veut confectionner des drapeaux rectangulaires ayant n bandes colorées rectangulaires de dimensions identiques (des bandes adjacentes pouvant avoir la même couleur). On dispose de q couleurs distinctes. Combien de drapeaux différents peut-on fabriquer? *Indication: Le groupe engendré par la permutation* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *opère sur toutes les suites ordonnées de n bandes colorées.*

3. Trouver une représentation par permutations fidèle de D_8 dans le groupe symmétrique S_4. Est-ce que le groupe Q de l'exercice 4, serie 5 admet une représentation par permutations fidèle dans S_4, S_6 ou S_8?

4. Montrer que $D_n \simeq C_n \rtimes C_2$.

5. Montrer que $S_n \simeq A_n \rtimes C_2$.

6. Soit G un groupe et $a, b, c \in G$. Démontrer l'égalité

$$[ab, c] = [b, c] \cdot [[c, b], a] \cdot [a, c]\,.$$

7.

a) Calculer l'abélianisé des groupes S_3 et T (définit dans l'exercice 4, série 3).

b) Soit G un groupe dont une présentation est donnée par $\langle X \mid R \rangle$. Trouver une présentation de l'abélianisé G_{ab} de G. *Indication: Considérer l'ensemble* $[X, X] = \{ [x, y] \mid x, y \in X \}$.)

c) Soit X un ensemble. Calculer l'abélianisé du groupe libre F_X. (*Indication: L'ensemble des expressions formelles* $\sum_{x \in X} \alpha_x x$*, où* $\alpha_x \in \mathbb{Z}$ *et* $\alpha_x = 0$ *pour presque tous les* $x \in X$*, forme un groupe abélien.*