

1. Trouver un automorphisme τ d'ordre 2 sans point fixe non trivial (i.e. $\tau(x) \neq x$ si $x \neq 1$) du groupe libre sur deux générateurs. Comparer avec l'exercice 5.b) de la série 2.

2. Trouver une présentation de $C_m \times C_n$.

3. Soit D_∞ le groupe dont une présentation est

$$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1, (x, y)^2 = 1 \rangle.$$

Interpréter géométriquement ce groupe et donner son ordre.

4. Soit Q le groupe dont une présentation est

$$Q = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2b^{-2} = 1, abab^{-1} = 1 \rangle.$$

Montrer que ce groupe est isomorphe au sous-groupe du groupe de matrices inversible 2×2 à coefficients dans \mathbb{C} , engendré par $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On considère les deux permutations suivantes de l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C}

$$u(z) = z + 2 \quad \text{et} \quad v(z) = \begin{cases} \frac{z}{2z+1} & \text{si } z \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{autrement} \end{cases}.$$

Montrer que les sous-groupe du groupe des permutations de \mathbb{C} engendré par u et v est isomorphe à un groupe libre sur deux générateurs. (*Indication: remarquer que toute puissance non nulle de u et, respectivement de v , envoie l'intérieur, respectivement l'extérieur du cercle unité dans son extérieur, respectivement son intérieur; puis jouer au ping-pong !*)

6. Soient H et K deux sous-groupes normaux d'un groupe G tels que $H \subset K$. Montrer que $K/H \triangleleft G/H$ et qu'on a un isomorphisme $(G/H)/(K/H) \simeq G/K$.

7. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G . Montrer que la projection canonique $\pi : G \rightarrow G/H$ induit une bijection entre les sous-groupes de G contenant H , et les sous-groupes de G/H .