

1.

a) Soit  $G$  un groupe fini cyclique d'ordre  $n$ . Montrer que pour tout entier  $d$  tel que  $d|n$ , il existe un unique sous-groupe de  $G$  d'ordre  $d$  (qui est forcément cyclique).

b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ .

(Indication: Montrer que si  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des sous-groupes de  $G$  alors  $G = \bigcup_{H \in \mathcal{C}} \text{gen}(H)$  où  $\text{gen}(H)$  désigne l'ensemble des générateurs de  $H$  et l'union est disjointe. Utiliser ensuite la partie a) de l'exercice.)

2. Soit  $G$  un groupe et  $Z(G)$  son centre. Montrer que si  $G/Z(G)$  est cyclique alors  $G$  est abélien.

3. Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $p^n \neq 1$ , où  $p$  est un nombre premier.

a) Montrer que  $G$  a un centre non-trivial (i.e.  $Z(G) \neq 1$ )

b) Montrer que tout groupe d'ordre  $p^2$  est abélien.

(Indication: Utiliser l'équation des classes et l'exercice 2 ci-dessus.)

4. Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme de groupes abéliens. Le groupe  $B/\text{Im}(\varphi)$  s'appelle le conoyau de  $\varphi$ , et il est noté  $\text{Coker}(\varphi)$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est surjectif si et seulement si  $\text{Coker}(\varphi) = 0$ .

b) Montrer qu'on a une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(\varphi) \longrightarrow 1$$

où  $i$  est l'inclusion et  $\pi$  est la projection canonique de noyau  $\text{Im}(\varphi)$ . Pourquoi doit-on se placer dans la catégorie des groupes abéliens pour définir la notion de conoyau?

5. Soit  $A$  et  $B$  deux sous-groupes finis d'un groupe  $G$ . Soit  $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$  l'ensemble des produits des paires d'éléments avec la première composante dans  $A$  et la deuxième composante dans  $B$ .

a) Donner des conditions suffisantes sur  $A$  et  $B$  pour que  $AB$  soit un groupe.

b) Montrer que  $|AB| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$ .

c) Donner des conditions suffisantes sur  $A$  et  $B$  pour que  $AB$  soit isomorphe à  $A \times B$ .

**6.** Soit  $G$  un groupe et  $X$  une partie de  $G$ . Soit  $N$  l'intersection de tous les sous-groupes normaux de  $G$  contenant  $X$ . Montrer que  $N$  est un sous-groupe normal de  $G$ . On appelle  $N$  la clôture normale de  $X$  dans  $G$ . Montrer que

$$N = \{1_G\} \cup \{x_1 x_2 \dots x_n \mid n \geq 1, x_i \in X^G \text{ ou } x_i^{-1} \in X^G, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

où  $X^G = \{gxg^{-1} \mid x \in X, g \in G\}$ .