Master 1 **Lundi 27 septembre 2010**
Théorie des Groupes **Exercices 3**

1. Dans une catégorie on dit qu'un morphisme $f : G \to H$ est un épimorphisme si pour tout couple de morphismes $u, v : H \to K$ tels que $u \circ f = v \circ f$ on a $u = v$

$$G \xrightarrow{f} H \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} K \ .$$

Montrer que dans la catégorie des groupes abéliens, f est un épimorphisme si et seulement si f est un morphisme surjectif. (N.B. en fait, le résultat est vrai dans la catégorie des groupes mais la démonstration est plus difficile.)

2. On dit que les entiers $x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n$ sont premiers entre eux si

$$\sup\{d \,|\, d \text{ divise } x_i,\, \forall 1 \leq i \leq n\} = 1\,.$$

Montrer que les entiers $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n$ tels que $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = 1$. (*Indication: Utiliser la caractérisation des sous-groupes de* $\mathbb{Z}$)

3. Calculer les groupes d'automorphismes du groupe de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ et du groupe symmétrique sur 3 lettres S_3. Que peut-on conclure à partir de ces résultats?

4. On considère le groupe multiplicatif T des matrices 3×3 de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}$. Calculer le centre $Z(T)$ de T.

5. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et déterminer le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R})$.

6. Soit $1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1$ une suite exacte courte de groupes. Montrer que si B est cyclique, alors A et C sont aussi des groupes cycliques. La réciproque est-elle vraie?

7. Soit G un groupe I un ensemble non-vide et $(H_i)_{i \in I}$ une famille des sous-groupes de G. Démontrer que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G. Soit X une partie de G (c-à-d un sous-ensemble de G). On note par $\langle X \rangle$ l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X, et qui est donc un sous-groupe de G. On appelle $\langle X \rangle$ le sous-groupe de G engendré par X. Montrer que

$$\langle X \rangle = \{1_G\} \cup \{x_1x_2 \ldots x_n \,|\, n \geq 1\,, x_i \in X \text{ ou } x_i^{-1} \in X\,, \forall 1 \leq i \leq n\}\,.$$