Master 1 **Lundi 20 septembre 2010**
Théorie des Groupes **Exercices 2**

1.

a) On considère les éléments

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

du groupe multiplicatif $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$. Calculer l'ordre de a, b, c et bc.

b) Soit x, y deux éléments d'ordre fini d'un groupe G tels que $xy = yx$. Que peut-on dire de l'odre de xy?

2. Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2. Que peut-on dire de G?

3. Soit V le sous-groupe du groupe alterné A_4 formé par l'identité et les éléments d'ordre 2. Soit $\tau \in V \setminus \{1\}$ et considérons le sous-groupe $H = \{1, \tau\}$ de V. Montrer que H est normal dans V et V est normal dans A_4 mais H n'est pas normal dans A_4.

4. Dans la catégorie des groupes on considère le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes sont des suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Montrer que si deux des morphismes verticaux sont des isomorphismes, alors le troisième l'est aussi. Ceci est appelé 'Le petit lemme des cinq'. (*Indication: chasser dans le diagramme!*)

5.

a) Soit G un groupe. On considère l'application $\mu : G \to G$ définie par $\mu(x) = x^{-1}$. Quelle hypothèse faut-il faire sur G pour que cette application soit un morphisme de groupes?

b) Soit G un groupe fini. Supposons qu'il existe un automorphisme $\gamma : G \to G$ d'odre 2 (c.-à-d $\gamma \circ \gamma = 1_G$) sans point fixe non trivial (c.-à-d $\gamma(x) = x \Rightarrow x = 1$). Montrer que G est un groupe abélien. (*Indication: montrer que tout élément de G est de la forme $x^{-1}\gamma(x)$, puis utiliser a)*)

6. On dit qu'un groupe D est *divisible* si pour tout $d \in D$ et tout entier $n > 0$, il existe $x \in D$ tel que $x^n = d$ (ou $nx = d$ si le groupe s'écrit additivement).

a) Vérifier que les groupes additifs $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont divisibles.

b) Soit un morphisme de groupes $\omega : D \to \mathbb{Z}$. Montrer que si D est divisible alors $\omega = 0$.

c) Soit $\mathcal{D}$ la sous-categorie pleine de Gr dont les objets sont les groupes divisibles. Montrer que dans $\mathcal{D}$ la projection canonique $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un monomorphisme (et π n'est pas une injection).