

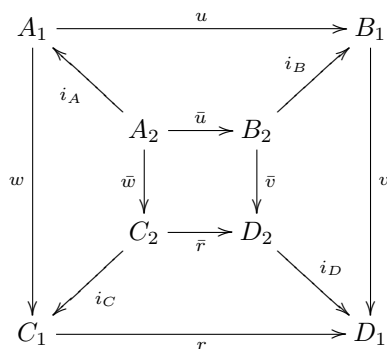
1. Soit X un ensemble. Sur l'ensemble $P(X)$ des parties de X on définit une opération binaire Δ en posant

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- a) Vérifier que $(P(X), \Delta)$ est un groupe abélien.
- b) Soit $n = \#X$. Identifiez le groupe $(P(X), \Delta)$ lorsque $n = 0, 1, 2$.

2. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$ si et seulement si il existe un entier $m \geq 0$ tel que $H = m\mathbb{Z} = \{mx \mid x \in \mathbb{Z}\}$. (*Indication: algorithme de division*)

3. On considère le diagramme suivant d'ensembles et d'applications.



tel que

- a) le grand carré commute,
- b) les quatre trapèzes commutent,
- c) l'application i_D est injective.

Montrer que le petit carré commute.

4. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit sur \mathbb{R} une application binaire $\mu_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $\mu_n(x, y) = \sqrt[n]{x^n + y^n}$. Quelle condition faut-il imposer à n pour que $(\mathbb{R}; \mu_n)$ soit un groupe. Si m et n sont des entiers satisfaisant cette condition, est-ce que les groupes $(\mathbb{R}; \mu_n)$ et $(\mathbb{R}; \mu_m)$ sont isomorphes?

5. Dans une catégorie on dit qu'un morphisme $f : G \rightarrow H$ est un monomorphisme si pour tout couple de morphismes $u, v : K \rightarrow G$ tels que $f \circ u = f \circ v$ on a $u = v$

$$K \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{array} \! \! \! \rightrightarrows \! \! \! G \xrightarrow{f} H .$$

Montrer que dans la catégorie des groupes, f est un monomorphisme si et seulement si f est un morphisme injectif.