

Feuille d'exercices 6.

Exercice 1

- 1) Montrer qu'un groupe simple non commutatif n'est pas résoluble.
- 2) Montrer que S_3 et S_4 sont résolubles.
- 3) Vérifier que le groupe linéaire $GL(2, \mathbb{F}_2)$, où $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est résoluble.
- 4) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, le groupe diédral D_{2n} est résoluble.

Exercice 2 Soit G un groupe fini.

- a) Montrer que G possède au moins une suite de Jordan-Hölder.
- b) On suppose que G est abélien et que son ordre s'écrit $n = p_1 p_2 \dots p_k$, où p_1, p_2, \dots, p_k sont des nombres premiers. Démontrer qu'il existe une suite de Jordan-Hölder $(G_i)_{0 \leq i \leq k}$ de G telle que, pour $1 \leq i \leq k$, le groupe-quotient G_{i-1}/G_i soit d'ordre p_i .
- c) On suppose que G est le sous-groupe de \mathbb{C} formé des nombres complexes z tels que $z^{90} = 1$. Donner explicitement une suite de Jordan-Hölder $(G_i)_{0 \leq i \leq 4}$ de G telle que les ordres des groupes-quotients $G_0/G_1, G_1/G_2, G_2/G_3$ et G_3/G_4 soient respectivement 2, 3, 5, 3. Cette suite est-elle unique?

Exercice 3

- 1) Montrer qu'un groupe d'ordre 6 est résoluble.
- 2) Soit G un groupe d'ordre 42.
 - a) Montrer que G a un sous-groupe distingué d'ordre 7.
 - b) En déduire que G est résoluble.
- 3) Donner un entier $n > 100$ tel que l'on puisse appliquer à un groupe d'ordre n les raisonnements de la question 2).

Exercice 4 Si A et B sont des sous-groupes d'un groupe G , on note $[A, B]$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $\{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}$, (on rappelle que $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$). On définit par récurrence une suite $(G_{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes de G , en posant $G_{(0)} = G$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{(n+1)} = [G, G_{(n)}]$. On dit que le groupe G est nilpotent s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_{(n)} = \{1\}$.

- a) Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le sous-groupe $G_{(n)}$ est distingué dans G .
- b) On suppose que $G = S_4$. Déterminer les sous-groupes $G_{(1)} = [G, G]$ et $G_{(2)} = [G, G_{(1)}]$ (on constatera que $G_{(1)} = G_{(2)}$).
Déterminer $V = [G_{(1)}, G_{(1)}]$ et montrer que $[G, V] = [G_{(1)}, V] = V$.
Quel est le sous-groupe $[V, V]$?

Exercice 5 On rappelle que le commutateur de deux éléments x et y d'un groupe G est l'élément $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Si X et Y sont des sous-groupes de G , on note $[X, Y]$ le sous-groupe engendré par l'ensemble $C(X, Y) = \{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\}$.

- a) Etant donné un nombre entier $n \geq 5$, soient a, b, c, d, e cinq éléments distincts de l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Calculer, dans le groupe symétrique S_n le commutateur $[\sigma, \tau]$ du 4-cycle $\sigma = (a b c d)$ et de la transposition $\tau = (d e)$. Calculer aussi $[\sigma^2, \tau]$.
- b) Dans le groupe symétrique $G = S_5$, soient $X = \langle \sigma \rangle$ le sous-groupe engendré par le 4-cycle $\sigma = (1 2 3 4)$, et $Y = \langle \tau \rangle$ le sous-groupe engendré par la transposition $\tau = (4 5)$. On se propose de déterminer le sous-groupe $[X, Y]$.
 - b1) Calculer tous les éléments de l'ensemble $C(X, Y)$. Combien sont-ils?
 - b2) Montrer que $C(X, Y)$ n'est pas un sous-groupe de G .
 - b3) Démontrer que le sous-groupe $[X, Y]$ est contenu dans le groupe alterné A_5 .
 - b4) Calculer les produits $\pi = (1 5 4)(2 5 4)$, $\pi' = (2 5 4)(1 5 4)$ et $\pi\pi'$. Donner un sous-groupe d'ordre 4 de $[X, Y]$.
 - b5) Calculer les produits $\pi'' = (3 5 4)(1 5 4)$ et $\pi\pi''$.
 - b6) Démontrer que l'ordre du groupe $[X, Y]$ est multiple de 3, de 4 et de 5.
 - b7) En déduire que $[X, Y] = A_5$.