

(Extrait du partiel 2007)

On considère un groupe cyclique $A = \langle a \rangle$ engendré par un élément a d'ordre 11 et un groupe cyclique $B = \langle b \rangle$ engendré par un élément b d'ordre 5. Les groupes A et B sont notés multiplicativement.

a) Montrer qu'il existe un automorphisme f du groupe A tel que $f(a) = a^4$. Quel est l'ordre de f dans le groupe $\text{Aut}(A)$? Montrer qu'il existe un homomorphisme $\phi : B \rightarrow \text{Aut}(A)$ tel que $\phi(b) = f$.

Montrer de même qu'il existe un homomorphisme $\psi : B \rightarrow \text{Aut}(A)$ tel que, si l'on pose $g = \psi(b)$, on ait $g(a) = a^5$.

Trouver un automorphisme β du groupe B tel que $\phi = \psi \circ \beta$.

b) On considère les produits semi-directs $G = A \rtimes_{\phi} B$ et $H = A \rtimes_{\psi} B$. On note respectivement $*_{\phi}$ et $*_{\psi}$ la multiplication dans G et la multiplication dans H . Pour $(x, y) \in A \times B$ et $(x', y') \in A \times B$, rappeler la définition des produits $(x, y) *_{\phi} (x', y')$ et $(x, y) *_{\psi} (x', y')$ (on notera ϕ_y et ψ_y les images respectives de y par ϕ et par ψ).

Démontrer que l'application $\alpha : (x, y) \rightarrow (x, \beta(y))$ est un isomorphisme du groupe G sur le groupe H .