Feuille d'exercices 4.

Exercice 1 Un groupe de 35 éléments agit sur un ensemble de 19 éléments sans fixer aucun d'eux. Combien y-a-t'il d'orbites pour cette action?

Exercice 2 Soit G un groupe fini. On note n l'ordre de G, $S(G)$ le groupe des permutations de l'ensemble G, et $\mathcal{E} : S(G) \to \{-1, 1\}$ l'homomorphisme de groupes qui, à toute permutation $\sigma \in S(G)$, associe sa signature $\mathcal{E}(\sigma)$. On considère l'opération du groupe G sur l'ensemble G définie par l'homomorphisme de groupes $\tau : G \to S(G)$ qui, à tout élément g de G, associe la translation à gauche $\tau_g : G \to G : x \mapsto \tau_g(x) = gx$.
a) Soit g un élément de G d'ordre $d \geq 2$. Décrire, pour tout $x \in G$, l'orbite de x sous l'action du sous-groupe $\langle g \rangle$ et la restriction de τ_g à cette orbite. Montrer que τ_g est produit d'un certain nombre d' de cycles de longueur d à supports disjoints, et donner d' en fonction de n et de d. Exprimer $\mathcal{E}(\tau_g)$ en fonction de d et de d'.
b) On suppose que $n = 2k$, où k est un nombre impair. Montrer à l'aide de a) que l'homomorphisme $\mathcal{E} \circ \tau : G \to \{-1, 1\}$ est surjectif. En déduire que G possède un sous-groupe distingué H d'ordre k.

Exercice 3 Trouver le nombre et la structure des sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_3.

Exercice 4
1) Expliquer pourquoi le groupe diédral D_8 est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_4.
2) Montrer que S_4 possède exactement 3 sous-groupes d'ordre 8 et que ceux-ci sont isomorphes à D_8.
3) Trouver le nombre et la structure des sous-groupes de Sylow de S_4.

Exercice 5 Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre n lorsque n prend les valeurs suivantes:
a) $n = 42$,
b) $n = 36$.

Exercice 6 1) Montrer qu'un groupe d'ordre 15 est cyclique.
2) Soit G un groupe d'ordre 30. Combien G peut-il avoir de sous-groupes d'ordre 5, 3, 2?
3) Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'ordre 3 ou 5.
Montrer que G possède un sous-groupe H d'ordre 15 distingué dans G.
4) Montrer que G est produit semi-direct de deux sous-groupes cycliques.
5) Montrer qu'il existe, à isomorphisme près, au plus quatre groupes d'ordre 30.
6) Combien chacun des groupes d'ordre 30 suivants a-t-il d'éléments d'ordre 2?

$$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \quad D_{30} \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_{10} \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_6$$

En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, exactement quatre groupes d'ordre 30.

Exercice 7 (A) Soit G un groupe fini d'ordre 245.
a) Démontrer que G possède un unique sous-groupe P d'ordre 5 et un unique sous-groupe Q d'ordre 49.
b) Rappeler pourquoi P et Q sont commutatifs.
c) Démontrer que $P \cap Q = \{1\}$ et que G est égal à l'ensemble $PQ = \{xy | x \in P, y \in Q\}$.
d) Montrer que les sous-groupes P et Q sont distingués dans G.
e) Soient $x \in P$ et $y \in Q$. Démontrer que $xyx^{-1}y^{-1}$ appartient à P et à Q; en déduire que $xy = yx$.
f) Montrer que G est commutatif.
g) Combien existe-t-il de groupes d'ordre 245 à isomorphisme près?