Feuille d'exercices 3.

Exercice 1 Soit G le groupe de présentation

$$\langle a, b, c | a^3 = b^3 = c^4 = 1, ac = ca^{-1}, aba^{-1} = bcb^{-1} \rangle$$

Montrer que $ab^3a^{-1} = bc^3b^{-1}$, puis que $c = 1$. En déduire G.

Exercice 2 Quel est l'ordre du groupe G engendré par deux éléments x et y vérifiant les relations $x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1$?

Exercice 3
1) Montrer que l'ensemble Q_8 ci-dessous est un sous-groupe de $M(2, \mathbb{C})$:

$$Q_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

Ce groupe est appelé groupe des quaternions.
2) Montrer que le groupe suivant a au plus 8 éléments

$$G = \langle a, b | a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b \rangle$$

Montrer que G est isomorphe à Q_8.

Exercice 4 Dans le groupe symétrique S_4, on considère les transpositions $t_1 = (12)$, $t_2 = (23)$ et $t_3 = (34)$. D'autre part, on note G le groupe défini par la présentation suivante:

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 | x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1, (x_1x_3)^2 = 1, (x_1x_2)^3 = 1, (x_2x_3)^3 = 1 \rangle.$$

a) Démontrer qu'il existe un homomorphisme de groupes $f : G \to S_4$ tel que $f(x_1) = t_1$, $f(x_2) = t_2$ et $f(x_3) = t_3$. Démontrer que f est surjectif. En déduire que le groupe G possède au moins 24 éléments.
b) En utilisant f, montrer que $x_2 \neq 1$, $x_3 \neq 1$ et $x_2x_3 \neq 1$. En déduire que x_2 et x_3 sont d'ordre 2 et que x_2x_3 est d'ordre 3.
c) En calculant dans le groupe G, montrer que le conjugué de x_2x_3 par x_2 est $(x_2x_3)^{-1}$. En déduire que le sous-groupe H de G engendré par x_2 et x_3 est produit semi-direct (interne) du sous-groupe $\langle x_2x_3 \rangle$ par le sous-groupe $\langle x_2 \rangle$. Quel est l'ordre de H?
d) Démontrer les égalités $x_1x_3 = x_3x_1$, $x_1x_2x_1 = x_2x_1x_2$ et $x_2x_3x_2 = x_3x_2x_3$.
e) Dans l'ensemble G/H des classes à gauche de G modulo H, on considère les classes à gauche suivantes: $C_0 = H$, $C_1 = x_1H$, $C_2 = x_2x_1H$ et $C_3 = x_3x_2x_1H$. Vérifier que, pour $1 \leq i \leq 3$ et $0 \leq j \leq 3$, la classe à gauche x_iCj est égale à l'une des classes C_0, C_1, C_2, C_3. En déduire que G est égal à la réunion des quatres ensembles C_0, C_1, C_2, C_3.
f) Déduire de a), c) et e) que G est fini d'ordre 24 et que f est un isomorphisme.

Exercice 5 On note $G = (\mathbb{F}_{13})^\times$ le groupe multiplicatif du corps $\mathbb{F}_{13}$.
a) Déterminer l'ordre dans le groupe G de chacun des éléments $\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{12}$.
b) Donner la liste complète sans répétition des sous-groupes de G et, pour chaque sous-groupe H de G, son ordre $|H|$ et l'ensemble X_H des éléments x de G tels que H soit engendré par x (càd, tels que $H = \langle x \rangle$).

Exercice 6 On note $\mathbb{F}_{31}^\times$ le groupe multiplicatif du corps $\mathbb{F}_{31}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\overline{n}$ sa classe modulo 31.
a) Déterminer les ordres respectifs de $-\overline{1}$, de $\overline{2}$, et de $\overline{5}$ dans le groupe G.
b) Déduire de a) un générateur du groupe G.

Exercice 7 Soit l'isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Expliciter l'isomorphisme réciproque.

Exercice 8
a) Parmi les groupes suivants, quels sont les couples (G_i, G_j) (où, $i < j$) formés de groupes isomorphes? $G_1 = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, $G_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $G_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, $G_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $G_7 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
b) Former une liste de groupes abéliens d'ordre 72 telle que tout groupe abélien d'ordre 72 soit isomorphe à un groupe de cette liste et à un seul.

Exercice 9 On considère l'anneau $A = (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})$.
a) Rappeler la définition de l'addition et de la multiplication dans A.
b) Déterminer les diviseurs élémentaires du groupe additif $(A, +)$. En déduire les facteurs invariants de ce groupe.
c) Même question qu'en b) pour le groupe multiplicatif $G = A^\times$ formé des éléments inversibles de l'anneau A.

Exercice 10 On note $\Gamma = (\mathbb{Z}/221\mathbb{Z})^\times$ le groupe multiplicatif de l'anneau $A = \mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$.
a) Démontrer que le groupe Γ est isomorphe au produit direct $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$.
b) En déduire
b1) les diviseurs élémentaires de Γ,
b2) les facteurs invariants m_1 et m_2 de Γ.

Exercice 11 Décrire les groupes des inversibles des anneaux $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$? En déduire une description du groupe $(\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})^\times$ de l'anneau $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$?