

Feuille d'exercices 2.

Exercice 1

- 1) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G , alors H est distingué dans G .
- 2) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G , alors $g^2 \in H$ pour tout $g \in G$.

Exercice 2

 Soit G un groupe.

- 1) Montrer que $Z(G)$ est distingué dans G .
- 2) Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène alors G est abélien.

Exercice 3

 Soient $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{R} \right\}$.

Montrer que U est un sous-groupe distingué de T .
Montrer que T/U est abélien.

Exercice 4

- 1) Vérifier que le groupe alterné \mathcal{A}_3 est le seul sous-groupe distingué propre du groupe symétrique \mathcal{S}_3 autre que $\{Id\}$.
- 2) Soit $V_4 := \{Id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (2,3)(1,4)\} \subset \mathcal{S}_4$. Montrer que c'est un sous-groupe distingué dans \mathcal{S}_4 .
- 3) Vérifier que $V_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- 4) Soit $H = \{e, (1,2)(3,4)\}$. Montrer que H est distingué dans V_4 mais pas dans \mathcal{S}_4 .
- 5) Montrer que \mathcal{S}_4/V_4 est isomorphe à \mathcal{S}_3 .

Exercice 5

- a) Montrer que le groupe symétrique \mathcal{S}_n est isomorphe à un produit semi-direct $A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du groupe alterné A_n par le groupe cyclique d'ordre 2.
- b) Quels sont les produits semi-directs $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
- c) Quels sont les produits semi-directs $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Exercice 6

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Soit $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ défini par $\sigma(1) = -1$ et soit $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ défini par $\phi(0) = \text{Id}$ et $\phi(1) = \sigma$.
Montrer que le groupe diédral D_{2n} est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- 2) Soit $G = A_4$ le groupe alterné, et V le sous-groupe des doubles transpositions.
Montrer que si $K = \langle (1,2,3) \rangle$, alors A_4 est le produit semi-direct de V par K . En déduire que $A_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.