Feuille d'exercices 1.

Exercice 1 Soit G un groupe et soient H et K deux sous-groupes de G.
Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 2 On considère le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ pour $n \geq 3$.
i) Soient $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et deux entiers $1 \leq i < j \leq n$. Quel est le conjugué $\sigma(i,j)\sigma^{-1}$ de (i,j) par σ?
ii) Déterminer le centre de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 3 Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les ensembles suivants de permutations:
a) (1 2),..., (1 n),
b) (1 2), (2 3),...,($n-1$ n),
c) (1 2), (1 2 ... n).

Exercice 4 Soit G l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des nombres réels tels que $ac \neq 0$.
1) Montrer que G est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(2, \mathbb{R})$.
2) Déterminer tous les éléments d'ordre 2 de G. Montrer qu'il existe dans G des éléments a et b d'ordre 2 tels que leur produit ab soit d'ordre infini.

Exercice 5 On considère un groupe quelconque G. Soient x et y deux éléments d'ordre fini de G. Soient m et n les ordres respectifs de x et y. On suppose de plus que x et y commutent dans G
1) Montrer que xy est d'ordre fini.
2) On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que l'ordre de xy est égal à mn.

Exercice 6 1) Calculer l'ordre des éléments suivants dans S_5:
a) (12345),
b) (123)(45),
c) (12345)(145).
2) Quel est l'ordre d'une permutation dont on connait la décomposition en cycles à supports disjoints? Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_{10}$?

Exercice 7 1) Quel est l'effet d'un morphisme (d'un isomorphisme) sur l'ordre d'un élément?
2) Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est appelé groupe de Klein.
3) Soit f un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
i) Montrer que f est caractérisé par $f(\bar{1})$.
ii) Déterminer les ordres possibles de $f(\bar{1})$.
iii) En déduire la liste des morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

Exercice 8 Soit G un groupe et $Z(G)$ son centre. Soit $\phi : G \to G$ un homomorphisme. Montrer que si ϕ est surjectif, $\phi(Z(G)) \subset Z(G)$. Ce résultat est-il vrai en général? (On pourra considérer $G = \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3$).

Exercice 9 Trouver les sous-groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_3$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 10 Soient G le groupe produit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et H le sous-groupe de G engendré par $(\bar{3}, \bar{2})$. Décrire les classes à gauche modulo H. Décrire le groupe quotient G/H.