

Feuille d'exercices 5.

Exercice 1

- 1) Les groupes suivants sont-ils de torsion, sans torsion ou mixtes: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{C}^*, \times) , $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$?
- 2) Déterminer les groupes de torsion des groupes de la question 1).

Exercice 2 Le groupe \mathbb{Q} est-il de type fini?

Exercice 3 On considère le sous-ensemble de \mathbb{R} suivant:

$$A = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que c'est un groupe abélien libre. Quel est son rang?

Exercice 4 On considère un entier naturel $n \geq 1$ et les groupes additifs \mathbb{Q}^n et \mathbb{R}^n . Soit H un sous-groupe de type fini de \mathbb{R}^n .

- a) Démontrer que le groupe abélien H est libre de rang fini.
Dans la suite de l'exercice, on note r le rang de H .
- b) Démontrer que, si H est contenu dans \mathbb{Q}^n , alors $r \leq n$.
- c) Donner un exemple où $n = 1$ et $r > n$.

Exercice 5 Soient a et b deux entiers non tous les deux nuls. Soit H le sous-groupe de \mathbb{Z}^2 formé des éléments (na, nb) pour $n \in \mathbb{Z}$. Quel est le rang de H ?

On considère le sous-ensemble \overline{H} de \mathbb{Z}^2 formé des éléments proportionnels à (a, b) . Montrer que c'est un sous-groupe de \mathbb{Z}^2 . Décrire une \mathbb{Z} -base de \overline{H} . Existe-t'il une \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}^2 obtenue en complétant une \mathbb{Z} -base de \overline{H} ? Décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/\overline{H}$, puis le quotient \mathbb{Z}^2/H .

Exercice 6 Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^2$, on considère le sous-groupe H engendré par les vecteurs $v_1 = (6, 0)$ et $v_2 = (0, 15)$.

Les questions A), B) et C) peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

- A) i) Donner explicitement un homomorphisme de groupes surjectif $\theta : G \rightarrow (\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ dont le noyau soit égal à H .
- ii) Trouver deux nombres entiers $d_1 \geq 1$ et $d_2 \geq 1$ tels que d_1 divise d_2 et que le groupe-quotient G/H soit isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}$.
- B) i) On note I_1 l'ensemble des valeurs prises sur H par les formes linéaires sur G . Déterminer l'entier naturel b_1 tel que $I_1 = b_1\mathbb{Z}$, et trouver élément f_1 de H et une forme linéaire ϕ_1 sur G tels que $\phi_1(f_1) = b_1$.
- ii) Vérifier qu'il existe un élément e_1 de G tel que $f_1 = b_1e_1$.
- iii) Trouver un générateur de $\text{Ker}(\phi_1)$ et un générateur de $\text{Ker}(\phi_1) \cap H$.
- iv) Dédurre de ce qui précède une base de G adaptée à H .
- C) On note I_2 l'ensemble des valeurs prises sur $H \times H$ par les formes 2-linéaires alternées sur G . Déterminer l'entier naturel b_2 tel que $I_2 = b_2\mathbb{Z}$.

Exercice 7 a) Soient $f : G \rightarrow G'$ un isomorphisme de groupes et H un sous-groupe distingué de G . Démontrer que le sous-groupe $H' = f(H)$ est distingué dans G' et que les groupes-quotients G/H et G'/H' sont isomorphes.

b) Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^2$, on considère le sous-groupe H engendré par les vecteurs $(m, 0)$ et $(0, n)$, où m et n sont deux nombres entiers naturels non nuls donnés. Construire explicitement un isomorphisme du groupe quotient G/H sur le groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

c) On note (ϵ_1, ϵ_2) la base canonique du groupe $G = \mathbb{Z}^2$ et on considère les sous-groupes K, L, M de G définis par

$$K = \langle 3\epsilon_1, 6\epsilon_2 \rangle, L = \langle \epsilon_1, 18\epsilon_2 \rangle, M = \langle 2\epsilon_1, 9\epsilon_2 \rangle$$

- c1) Donner les facteurs invariants et les diviseurs élémentaires de chacun des trois groupes quotients G/K , G/L , G/M .
- c2) Démontrer qu'il n'existe aucun automorphisme f du groupe \mathbb{Z}^2 tel que $f(K) = L$.
- c3) Vérifier que les groupes G/L et G/M sont isomorphes.
- c4) On pose $e_1 = (2, 9)$. Déterminer un vecteur e_2 de \mathbb{Z}^2 et deux entiers naturels a_1 et a_2 tels que (e_1, e_2) soit une base de \mathbb{Z}^2 et $(a_1 e_1, a_2 e_2)$ une base de M .
- c5) En déduire un automorphisme g de \mathbb{Z}^2 tel que $g(L) = M$.