



UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE

Habilitation à diriger des recherches Spécialité : Mathématiques

présentée par **Samuel PETITE**

ACTIONS SUR UN ENSEMBLE DE CANTOR DE LA DYNAMIQUE SYMBOLIQUE AUX QUASI-CRISTAUX

Soutenue le 30 novembre 2015 devant le jury composé de :

Examineur	Marie-Claude	ARNAUD-DELABRIÈRE	Université d'Avignon
Examineur	Pierre	ARNOUX	Aix-Marseille Université
Rapporteur	Jérôme	BUZZI	Université Paris-Sud
Examineur	Fabien	DURAND	Université de Picardie Jules Verne
Rapporteur	Tomasz	DOWNAROWICZ	Wrocław University of Technology
Rapporteur	Ai-Hua	FAN	Université de Picardie Jules Verne
Examineur	Jean-Marc	GAMBAUDO	Université Côte d'Azur

Remerciement

Je remercie ma famille, mes parents et Camille qui m'ont aidé et accompagné tout au long de mon travail.

Je tiens également à remercier les membres du LAMFA pour leurs aides, conseils et pour la bonne ambiance qui règne. Tout particulièrement dans l'équipe Padique, je souhaite remercier chaque membre pour leurs discussions et ouverture d'esprit. Un grand merci au personnel du LAMFA pour son dévouement et son efficacité.

Mes remerciements vont également à mes collaborateurs qui m'ont enrichi de leur connaissances et de leur vision de la recherche mathématique. Je leur suis également reconnaissant de la patience qu'ils ont eu à mon égard.

Je remercie également les rapporteurs et les membres du jury pour leur présence et le temps qu'ils m'ont accordé.

RÉSUMÉ

Ce travail est une étude sur des systèmes dynamiques liés à des dynamiques minimales sur un ensemble de Cantor. La première partie concerne la dynamique topologique des systèmes minimaux de Cantor et plus spécifiquement, le groupe d'automorphismes de \mathbb{Z} -sous shifts de faible complexité, les problèmes d'équivalences orbitales entre \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^d actions et leurs relations avec la spectre continu. La seconde partie est dédiée à la notion plus géométrique d'ensemble de Delone qui sert de modèle aux quasi-cristaux. Nous les étudions dans les géométries euclidienne et hyperbolique. Nous nous intéressons tout particulièrement à leurs propriétés ergodiques et géométriques ainsi qu'à l'équivalence orbitale dans ce contexte. Finalement, la dernière partie traite des propriétés des configurations minimisantes du modèle de Frenkel-Kontorova associé à un environnement de type quasi-cristal.

ABSTRACT

This work is a study of the dynamical systems related to minimal actions on a Cantor set. The first chapter concerns the topological dynamic of minimal Cantor systems, with a focus on the automorphisms groups of \mathbb{Z} subshift, the problem of topological orbit equivalence between \mathbb{Z} and \mathbb{Z}^d -actions and their relations with their continuous spectrum. The second chapter is related to the more geometrical notion of Delone set, which is a model for quasicrystals. We study them in the Euclidean and Hyperbolic geometries. We give some of their ergodic and geometric properties and we explore the orbital equivalence class in this context. The final chapter provides properties on the minimizing configurations of the Frenkel-Kontorova model associated with an environment of quasicrystal type.

Table des matières

1	Étude d'actions minimales sur un ensemble de Cantor	6
1.1	Actions minimales de \mathbb{Z} sur un ensemble de Cantor	6
1.1.1	Notations	6
1.1.2	Automorphismes de systèmes symboliques de faible complexité	7
1.1.3	Sur la conjecture Pisot	10
1.1.4	Équivalence orbitale forte et valeurs propres	13
1.2	Actions minimales de groupes résiduellement finis	15
1.2.1	Groupes résiduellement finis et odomètres	16
1.2.2	Sous-shift Toeplitz	17
1.2.3	Équivalence orbitale pour les sous-shifts Toeplitz	19
2	Systèmes de Delone	21
2.1	Généralités	21
2.1.1	Ensemble de Delone et enveloppe topologique	21
2.1.2	Structure géométrique de l'enveloppe	23
2.2	Ensembles de Delone euclidiens	25
2.2.1	Ensembles linéairement répétitifs	25
2.2.2	Sur les homéomorphismes de l'enveloppe	27
2.3	Ensembles de Delone hyperboliques	29
2.3.1	Exemples	29
2.3.2	Mesures invariantes et mesures harmoniques	31
2.3.3	C^* -algèbres	34
3	Modèle de Frenkel-Kontorova associé à un quasi-cristal	37
3.1	FK associé à un quasi-cristal de dimension un	38
3.2	FK multidimensionnel et stationnaire	40

Introduction

Ce travail est une étude sur des systèmes dynamiques liés plus ou moins directement à une dynamique minimale sur un ensemble de Cantor (*système minimal de Cantor*). En plus de nous intéresser à la dynamique topologique de ces systèmes minimaux de Cantor, nous regarderons la notion plus géométrique d'*ensemble de Delone* dans différentes géométries. Ces ensembles servent de modèle aux *quasi-cristaux*. Finalement nous étudierons le *modèle de Frenkel-Kontorova* associé à un quasi-cristal. Ces axes de recherche sont motivés par diverses raisons.

Citons tout d'abord la découverte des quasi-cristaux en 1982 par l'équipe de D. Shechtman [SBGC84] qui a remis en cause un paradigme de la cristallographie. Une modélisation de la structure d'un quasi-cristal consiste à considérer chaque atome comme un point d'un espace euclidien. L'ensemble de ces points forme alors un *ensemble de Delone*. Une autre modélisation est possible par l'intermédiaire des pavages où les atomes sont situés à l'intérieur des pavés. Par exemple le quasi-cristal découvert par Shechtman *et al* correspond à une version tridimensionnelle du fameux pavage de Penrose [Mac82], obtenu par une *substitution de type Pisot*. En fait, ces deux modélisations par des pavages ou des ensembles de points, sont équivalentes [BBG06]. Nous privilégions celle des ensembles de Delone car elle évite de tenir compte de la géométrie des pavés qui s'avère inutile pour nos propos.

La découverte des quasi-cristaux soulève de nombreuses questions, notamment sur leur possible classification. Il faut, au préalable, déterminer des invariants calculables à partir de leur structure. Pour se faire, nous allons leur associer un système dynamique, appelé *système de Delone* dont les propriétés sont reliées à leurs propriétés combinatoires. Inversement, la construction d'ensembles de Delone, nous donnera une famille de systèmes dynamiques aux comportements riches et variés. Cette relation entre la dynamique et la combinatoire est, en fait, très classique et remonte aux origines de la théorie ergodique pour déboucher, par exemple, à une preuve du théorème de Szemerédi par Furstenberg [Fur81]. De ce fait, l'étude des systèmes de Delone peut être considérée comme une généralisation de la dynamique symbolique. Comme nous le verrons dans le chapitre 2, il se trouve de plus, que les systèmes de Delone sont intrinsèquement liés à des dynamiques sur l'ensemble de Cantor. La structure du quasi-cristal de Shechtman incite à se concentrer tout particulièrement sur les systèmes d'entropie nulle, comme les *systèmes substitutifs*.

D'autre part, le modèle de Frenkel-Kontorova est un modèle précis et notoirement connu de la physique pour représenter la dislocation d'un cristal. Ce modèle a l'avantage d'être *simple* à expliciter et *universel*, dans le sens où il peut modéliser une grande variété de phénomènes physiques différents [BK04, FBGG05]. Il décrit comment une chaîne infinie d'atomes "minimise l'énergie totale d'un système" lorsque cette énergie prend en compte les interactions entre les proches voisins et un environnement extérieur. Quand l'environnement est périodique, pour un cristal par exemple, les théories dites KAM faible discrète et d'Aubry-

Mather permettent d'étudier ces configurations minimisantes. On peut donc se demander quelles propriétés de ces configurations sont préservées dans le contexte quasi-périodique.

Ajoutons en dernier lieu, que les systèmes de Cantor sont également intéressants du point de vue de l'équivalence orbitale où, rappelons le, deux actions de groupe $G_1 \curvearrowright X_1$ et $G_2 \curvearrowright X_2$ sont dites *orbitalement équivalentes* (topologiquement) s'il existe un homéomorphisme entre les espaces X_1 et X_2 qui envoie les G_1 -orbites sur les G_2 -orbites, les deux groupes n'étant pas forcément isomorphes. Lorsque les espaces sont connexes, un argument utilisant les théorèmes de Baire, nous montre que cette notion n'est pas très différente de celle de la conjugation. À l'opposé, lorsque les espaces sont des ensembles de Cantor, ces notions deviennent distinctes. De plus, il y a un nombre indénombrable de classe d'équivalence orbitale [HPS92, GMPS10]. Ce phénomène diffère énormément de l'équivalence orbitale mesurée (où l'on ne considère que des applications mesurées) puisque il n'existe qu'une seule classe d'équivalence orbitale parmi toutes les actions de groupes moyennables dénombrables [Dye59, OW80, CFW81].

En relation avec ces problématiques, nous présentons des résultats que nous avons obtenus dans différents articles. Ceux-ci sont cités par un numéro entre crochets (ex. [1]) alors que les travaux d'autres auteurs sont cités par un acronyme entre crochet (ex. [AO95]). L'ordre de présentation des résultats suit l'ordre croissant du nombre notions qu'il faut introduire pour les énoncer.

Ainsi le chapitre 1 concerne l'étude de systèmes minimaux de Cantor. La première section regroupe les résultats sur les \mathbb{Z} -actions et la seconde sur des actions de groupes *résiduellement finis*. Nous regardons différents types d'invariants des systèmes minimaux de Cantor. L'entropie étant largement étudiée, nous nous focalisons sur d'autres invariants qui ont été particulièrement peu examinés, notamment pour les systèmes d'entropie nulle. En vue de généralisation aux ensembles de Delone, nos résultats concernent essentiellement la dynamique symbolique.

Le groupe des automorphismes d'un sous-shift unidimensionnel de faible complexité est étudié dans la section 1.1.2. Nous montrons en particulier dans [7] que ce groupe a une faible croissance. Plus précisément, le quotient de ce groupe par celui engendré par le shift est fini pour des sous-shifts minimaux ayant une complexité non super-linéaire, comme les sous-shifts substitutifs. Inversement, nous montrons que n'importe quel groupe fini peut être réalisé de cette manière. Nous construisons également un système symbolique d'entropie nulle dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à \mathbb{Z}^d ainsi qu'un sous-shift de complexité polynomiale arbitrairement grande avec un groupe d'automorphismes virtuellement isomorphe à \mathbb{Z} .

Un second exemple d'invariant d'un \mathbb{Z} -système topologique (X, T) est *le spectre continu*, *i.e.* l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{S}^1$ telles qu'il existe une fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{S}^1$ vérifiant $f \circ T = \lambda f$. Les exemples typiques de systèmes substitutifs avec un spectre continu non trivial, *i.e.* non faiblement mélangeant, sont donnés par les substitutions de type *Pisot*. Dans la sous-section 1.1.3, nous expliquons pourquoi ces systèmes sont conjugués en mesure à un échange de domaines euclidiens. Ce résultat, présenté dans [8], étend à n'importe quelle substitution de type Pisot unimodulaire (sans condition combinatoire) un résultat de Arnoux-Ito [AI01].

La sous-section 1.1.4, se rapporte aux relations entre le spectre continu d'un \mathbb{Z} -système de Cantor (X, T) et sa classe d'équivalence orbitale. Nous obtenons dans [4], des restrictions sur les possibles spectres au sein d'une même classe d'équivalence orbitale forte. Il se trouve que les arguments des valeurs propres $E(X, T)$ forme un sous-groupe de l'intersection des images du groupe de dimension de (X, T) par toutes ses traces (noté $I(X, T)$). Nous montrons que

le groupe quotient $I(X, T)/E(X, T)$ est sans torsion lorsque le groupe des infinitésimaux est trivial. Ces hypothèses sont optimales pour ce résultat.

Nous considérons des sous-shifts minimaux pour des groupes résiduellement finis, éventuellement non commutatifs, dans la seconde section 1.2, via une généralisation de la notion de suite Toeplitz obtenue dans [5]. Ceci nous servira de base pour comprendre les propriétés possibles des ensembles de Delone dans différentes géométries. Si le groupe est moyennable, nous réalisons grâce à ces exemples, n'importe quel simplexe de Choquet de mesures de probabilité invariantes par l'action [6]. En particulier, pour le groupe \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, nous montrons que tout \mathbb{Z} -système Toeplitz est orbitalement équivalent à un \mathbb{Z}^d -sous-shift, également de type Toeplitz.

Le chapitre 2 est dédié aux ensembles de Delone. La première section présente quelques définitions et propriétés générales sur les systèmes associés. Nous nous intéressons à ces ensembles en géométrie euclidienne (section 2.2) et en géométrie hyperbolique (section 2.3).

La notion d'ensemble de Delone linéairement répétitif généralise celle d'ensemble substitutif. Ces ensembles linéairement répétitifs possèdent de nombreuses propriétés géométriques et dynamiques rigides (voir le survol [1]). Nous expliquons dans la sous-section 2.2.1, des résultats obtenus dans [3] : un tel système n'a qu'un nombre fini de systèmes de Delone aperiodiques non conjugués comme facteur. De plus, chacun de ces facteurs est également linéairement répétitif.

La sous-section 2.2.2 relève de l'étude de l'équivalence orbitale pour les systèmes de Delone euclidiens. Un invariant est alors le groupe des homéomorphismes de l'enveloppe qui sont homotopes à l'identité. Dans [2], nous prouvons que ce groupe est simple et ouvert dans l'ensemble de tous les homéomorphismes. Par un profond résultat de Ben Ami et Rubin [BAR10], nous obtenons que ce groupe est un invariant complet d'équivalence orbitale.

La notion d'ensemble de Delone trouve également une extension dans le cadre de la géométrie hyperbolique [Pen80, MM98, Moz97]. Après avoir présenté divers exemples dans la sous-section 2.3.1, nous expliquons des différences avec le cas euclidien. Par exemple, d'un point de vue ergodique, nous verrons dans la sous-section 2.3.2 que les mesures invariantes pour l'action ne sont plus associées aux mesures transverses invariantes, mais plutôt à la notion géométrique de *mesures harmoniques*. Nous construisons des systèmes minimaux avec un nombre arbitraire de mesures de probabilités harmoniques et ergodiques. Ces résultats sont issus de mes travaux de thèses et publiés dans [13]. Du point de vue des C^* -algèbres, qui donnent des invariants topologiques et géométriques, il n'existe pas de traces. Chaque mesure harmonique donne alors un cocycle 3 cyclique sur la C^* -algèbre associée au système. Nous donnons dans la sous-section 2.3.3 la K -théorie et la cohomologie de Čech pour une famille d'exemples de systèmes de Delone hyperboliques que nous avons traitée dans [12].

Nos travaux sur le modèle de Frenkel-Kontorova sont décrits dans le dernier chapitre. Nos preuves utilisent les notions rappelées dans le chapitre 2. La section 3.1 traite des résultats de [10] et se restreint au cas de la dimension 1 sous des hypothèses standard sur l'énergie d'interaction et un environnement induit par un quasi-cristal. Nous montrons que chaque configuration minimisante admet un nombre de rotation, que ce nombre dépend continûment de la configuration et que tout réel positif est un tel nombre de rotation. Ceci généralise, en partie, des résultats de [ALD83].

La dernière section est plus générale et concerne le modèle de Frenkel-Kontorova en dimension quelconque avec un environnement presque périodique. Ceci revient à considérer une famille d'énergie qui est stationnaire par rapport à un système dynamique minimal. Nous introduisons alors dans [11], la notion de configuration calibrée (plus forte que celle de configuration minimisante) et nous prouvons son existence pour certains environnements du

système dynamique. En dimension 1, sous des conditions incluant le modèle de la section 3.1, nous montrons l'existence de ces configurations calibrées pour tout environnement dans ce contexte.

Chapitre 1

Étude d'actions minimales sur un ensemble de Cantor

Tout au long de ce chapitre, nous regarderons des actions continues de divers groupes sur un ensemble de Cantor X .

Dans la première section, nous nous restreindrons aux \mathbb{Z} -actions minimales. Après avoir rappelé quelques définitions de base, nous étudierons les automorphismes de sous-shifts de faible complexité dans la sous-section 1.1.2. Nous expliquerons nos travaux sur la conjecture Pisot dans la sous-section 1.1.3. Enfin, la sous-section 1.1.4, sera dédiée aux relations entre le spectre continu d'un système de Cantor et sa classe d'équivalence orbitale.

La seconde partie (section 1.2) concernera principalement l'étude d'actions minimales et libres de groupes résiduellement finis. Nous proposerons des exemples de sous-shifts, via une généralisation des notions d'odomètre et de suite Toeplitz décrites dans les sous-sections 1.2.1 et 1.2.2 avec diverses propriétés ergodiques. Finalement la dernière sous-section traitera de l'apport de ces constructions dans la théorie de l'équivalence orbitale.

1.1 Actions minimales de \mathbb{Z} sur un ensemble de Cantor

1.1.1 Notations

Nous nous intéresserons dans cette partie à l'action minimale (toutes les orbites sont denses) d'un homéomorphisme T sur un ensemble de Cantor X . Rappelons qu'un système (Y, S) est un *facteur* de (X, T) s'il existe une surjection continue $\pi: X \rightarrow Y$ qui commute avec les actions. Le système (X, T) est alors une *extension* de (Y, S) . Cette extension est dite *presque injective* si l'application facteur π est injective sur un ensemble G_δ dense (au sens de Baire).

Nous considérerons en particulier des sous-shifts. Ainsi Σ désignera un alphabet fini et $\sigma: \Sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}}$ l'application *shift* définie par $\sigma((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. Un sous-shift est alors le système dynamique (X, σ) donné par un sous-ensemble fermé $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$, σ -invariant ($\sigma(X) = X$).

Un *mot* w est un élément du monoïde libre Σ^* engendré par Σ avec l'opération de la concaténation, *i.e.* $w = x_1 \dots x_\ell$ pour $x_i \in \Sigma$. L'entier $\ell \geq 1$ est alors la *longueur* du mot w , notée $|w|$. Le langage $\mathcal{L}(X)$ d'un sous-shift X est la collection des mots w (ou *facteurs*) de la forme $w = x_j \dots x_{j+\ell-1}$ pour une suite $x = (x_i)_i \in X$ et un indice $j \in \mathbb{Z}$. Nous dirons

que j est une *occurrence* du mot w dans la suite x . Nous utiliserons le même terme pour une suite finie. La *complexité* du sous-shift $p_X(\ell)$ est le nombre de mots du langage $\mathcal{L}(X)$ de longueur ℓ .

Les sous-shifts minimaux sont caractérisés par le fait que pour toute suite x du sous-shift et pour tout mot w du langage, l'ensemble des occurrences de ce mot est non vide est relativement dense, ou, autrement dit, le mot w apparaît une infinité de fois dans x et la distance entre deux occurrences consécutives est uniformément bornée. Des exemples classiques de sous-shifts minimaux sont donnés par des substitutions (voir [Que87] pour une introduction détaillée sur ces systèmes). Rappelons qu'une *substitution* ξ est un morphisme sur Σ^* défini par une application $\Sigma \rightarrow \Sigma^*$, tel qu'il existe une lettre $a \in \Sigma$ vérifiant $\lim_k |\xi^k(a)| = +\infty$. Il lui est associé une *matrice d'incidence* $M_\xi = (m_{a,b})_{a,b \in \Sigma}$ où $m_{a,b}$ est le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot $\xi(b)$. Une substitution est dite *primitive* si sa matrice d'incidence est primitive, *i.e.* une puissance de la matrice a tous ses coefficients strictement positifs. Le système dynamique associé à ξ est alors le sous-shift Ω_ξ défini par :

$$\{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}; \text{ tout facteur de } x \text{ est un facteur de d'un certain mot } \xi^n(a) \text{ avec } n \geq 1, a \in \Sigma\}.$$

Lorsque la substitution est primitive, il est connu que le système (Ω_ξ, σ) est *linéairement récurrent*, *i.e.* : il existe une constante $L > 1$ telle que pour tout entier $\ell \geq 1$, tout mot de longueur $L\ell$ du langage du sous-shift contient tous les mots de longueur ℓ du sous-shift. Ces systèmes sont minimaux et uniquement ergodiques (voir [Que87, Dur00]). Les propriétés des systèmes linéairement récurrent sont décrits dans le chapitre 2 sous-section 2.2.1.

Un autre exemple classique de système symbolique est le sous-shift *sturmien*. Il s'agit de l'ensemble des suites qui codent une orbite de la rotation d'angle irrationnel $\alpha \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sur le cercle identifié à l'intervalle $[0, 1[\pmod{1}$ avec la partition $\{[0, 1 - \alpha[, [1 - \alpha, 1[\}$. En d'autres termes, il s'agit de l'ensemble des suites de la forme $(\lfloor (n+1)\alpha + \beta \rfloor - \lfloor n\alpha + \beta \rfloor)_{n \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ où $\beta \in [0, 1[$ et $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Ce sous-shift a été introduit et étudié en détail dans [MH40] où il est montré qu'il est minimal, uniquement ergodique et est une extension presque injective de la rotation d'angle α sur le cercle. Seuls les points de l'orbite de 0 ont plusieurs (deux) pré-images. En dehors de cette orbite, l'extension est une conjugaison mesurée [Kur03].

1.1.2 Automorphismes de systèmes symboliques de faible complexité

Un *automorphisme* d'un système dynamique topologique (X, T) est un homéomorphisme de X qui commute avec la transformation T . Le groupe engendré par ces transformations est noté $\text{Aut}(X, T)$. Il est non trivial car il contient celui engendré par l'homéomorphisme T lui même $\langle T \rangle \subset \text{Aut}(X, T)$. Une définition similaire existe dans le cadre mesurable : pour une mesure invariante μ fixée, les automorphismes sont alors bi-mesurables et préservent cette mesure. Le groupe qu'ils engendrent, noté $C(T)$ est appelé *centralisateur* de (X, T, μ) .

L'étude du centralisateur est classique et a été largement étudié en théorie ergodique. C'est par exemple le cas pour les systèmes mélangeant de rang finis (voir [Fer97] pour un survol). Mentionnons quelques résultats dans ce contexte. D. Ornstein montre dans [Orn72] que pour un système mélangeant de rang un, son centraliseur est réduit au groupe $\langle T \rangle$. Plus tard del Junco [dJ78] montra la même propriété pour le sous-shift de Chacon qui est de rang un mais seulement faiblement mélangeant. Finalement pour les systèmes mélangeant de rangs finis, King et Thouvenot [KT91] prouvèrent que le groupe quotient $C(T)/\langle T \rangle$ est fini, ou autrement dit, les groupes $C(T)$ et $\langle T \rangle$ sont virtuellement isomorphes.

Dans le cadre topologique et symbolique, il semble que Hedlund [Hed69] fut le premier à étudier groupe des automorphismes du full shift. Cette étude fut étendue aux sous-shifts

de types finis mélangeant (ou même seulement d'entropie positive) par notamment Boyle, Lind et Rudolph [BLR88], Kim et Roush [KR90] et Hochmann [Hoc10]. Ils montrent que ces groupes sont gros dans le sens où ils contiennent :

- n'importe quelle somme directe dénombrable de groupe \mathbb{Z} ou de groupes finis,
- le produit libre sur un nombre dénombrable de générateurs,
- le groupe $\text{Aut}(\{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Un argument essentiel est alors le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon qui stipule que chaque automorphisme d'un sous-shift (X, σ) est donné par une *fonction de bloc glissant* (sliding block codes), ou *automate cellulaire*. Cela implique en particulier que le groupe $\text{Aut}(X, \sigma)$ est dénombrable. La réalisation de groupes passe alors par la notion de *marqueurs*.

De nombreuses questions restent ouvertes sur ces groupes pour un sous-shift en général. Ainsi on se pose les questions de base sur les groupes, sont ils : moyennables ? sofiques ? finielement engendrés ? quel est leur centre ? leurs quotients ?.... et leur relation avec la dynamique du sous-shift. Par exemple la question suivante est toujours ouverte.

Question 1.1.1 *Les groupes $\text{Aut}(\{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ et $\text{Aut}(\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ sont ils algébriquement isomorphes ?*

Dans le cadre de l'entropie nulle peu de chose sont connues. Host et Parreau [HP89] ont cependant donné des résultats remarquables pour une famille de substitutions de longueur constante (dite *bijective*). Ils montrent un résultat de rigidité : les groupes $C(\sigma)$ et $\text{Aut}(X, \sigma)$ sont identiques et sont virtuellement le groupe $\langle \sigma \rangle$. Durant la même période, Lemańczyk et Mentzen [LM88] réalisent n'importe quel groupe fini comme groupe quotient $C(\sigma)/\langle \sigma \rangle$ pour des systèmes substitutifs dans la classe données par Host et Parreau.

Très récemment, Cyr et Kra [KC15] ont montré que pour un sous-shift transitif avec une complexité sous-quadratique, le groupe $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$ est de torsion, signifiant que n'importe quel élément est d'ordre fini. Leur preuve passe par un problème de coloriage de \mathbb{Z}^2 et utilise une version affaiblie de la conjecture de Nivat démontrée par Quas et Zamboni [QZ04].

Dans un travail en commun avec S. Donoso, F. Durand et A. Maass [7], nous montrons que la complexité contraint le groupe des automorphismes à être petit.

Théorème 1.1.2 ([7]) *Soit (X, σ) un sous-shift minimal infini. Si sa complexité vérifie*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_X(n)}{n} < \infty,$$

alors le groupe $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$ est fini et le cardinal de $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$ divise le nombre d'orbites asymptotiques.

Rappelons que les orbites des éléments $x, y \in X$ du sous-shift, munit d'une distance *dist*, sont *asymptotiques* si pour un certain entier p , $\text{dist}(\sigma^n x, \sigma^{n+p} y)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Combinatoirement, cela signifie que, quitte à "shifter" une des suites x, y , elles coïncident à partir d'un certain rang. Un argument classique de Morse et Hedlund montre qu'un sous-shift infini (apériodique) contient toujours une paire asymptotique (voir par exemple le chapitre 1 de [Aus88]). La condition sur la complexité implique qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites asymptotiques [7]. Cette condition était déjà apparue dans une preuve de l'excellent livre de Queffélec [Que87]. Malheureusement lors de la dernière édition, cette preuve disparut.

Le théorème 1.1.2 concerne tous les sous-shifts sturmiens et les sous-shifts linéairement répétitifs (substitutifs par exemple) car ils ont des complexités linéaires. Précisons dans le cas sturmien, qu'il est bien connu qu'il n'existe qu'une paire asymptotique (e.g. [Dur00]). Leur groupe d'automorphismes est donc trivial. Nous retrouvons également les résultats de Salo et Törmä [ST16] sur les groupes d'automorphismes de substitutions de type Pisot et nous prouvons leur conjecture.

La condition sur la complexité impose au sous-shift d'être d'entropie nulle. Pour autant il est possible d'avoir des complexités avec une croissance sous-exponentielle arbitraire [7]. Citons, qu'au même moment, et indépendamment de nous, Cyr et Kra [CK15] ont obtenu des résultats analogues sur la relation entre la complexité et le groupe d'automorphismes dans [CK15]. Cependant leur preuve est plus combinatoire que la notre. Note preuve, plus topologique, nous permet d'avoir quelques résultats pour des systèmes topologiques plus généraux que les sous-shifts.

L'idée de notre preuve est basée sur la remarque suivante : un automorphisme préserve l'ensemble des paires asymptotiques. Dans le cas minimal, si l'automorphisme fixe une paire, c'est une puissance du shift. Ainsi le groupe des automorphismes modulo le shift $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$, agit librement sur l'ensemble des orbites des paires asymptotiques.

Il en ressort qu'une étude de ces paires asymptotiques nous permet d'étudier le groupe des automorphismes et même de réaliser des exemples, qui montrent que le théorème 1.1.2 est optimal.

Théorème 1.1.3 *Pour tout groupe fini G , il existe un sous-shift minimal substitutif (X, σ) tel que $\text{Aut}(X, \sigma)$ est isomorphe à $G \oplus \mathbb{Z}$.*

Ce résultat généralise un peu ceux obtenus par Host-Parreau et Lemańczyk-Mentzen. En outre, nous en donnons une preuve directe. Ajoutons que dans le cas substitutif, il existe un algorithme pour déterminer les paires asymptotiques [BD01] et donc on peut espérer un algorithme pour déterminer le groupe $\text{Aut}(X, \sigma)/\langle \sigma \rangle$ pour un sous-shift substitutif.

Peu de résultats sont connus quant à la réalisation de groupes d'automorphismes pour des sous-shifts de faible complexité. Nous laissons donc la question suivante ouverte.

Question 1.1.4 *Étant donné un groupe dénombrable G (pas nécessairement finement engendré). Existe-t-il un sous-shift qui admette ce groupe comme groupe d'automorphismes ?*

Au delà du cas du théorème 1.1.3, nous ne savons réaliser que le groupe \mathbb{Z}^d , pour tout $d \geq 1$, comme groupe d'automorphismes [7]. La difficulté n'étant pas de donner un exemple contenant \mathbb{Z}^d mais dont le groupe est exactement isomorphe à \mathbb{Z}^d . À l'inverse, si le système a une récurrence polynomiale, nous savons que le groupe des automorphismes a également une croissance polynomiale (théorème 3.8 [7]). Il s'agit donc d'un groupe virtuellement nilpotent par un résultat célèbre de Gromov. Ces exemples nous poussent à proposer la question suivante qui généraliserait le théorème 1.1.2.

Question 1.1.5 *Soit (X, σ) un sous-shift minimal tel que*

$$d = \inf\{\delta \in \mathbb{N}; \liminf_n p_X(n)/n^\delta < +\infty\} > 0.$$

Est il vrai que $\text{Aut}(X, \sigma)$ est virtuellement isomorphe à \mathbb{Z}^k pour $0 < k \leq d$?

La dynamique et en particulier les facteurs des systèmes contraignent également le groupe des automorphismes. Pour un groupe G , on note par $[f, g] = fgf^{-1}g^{-1}$ le commutateur de $f, g \in G$. On définit, par récurrence, la suite de sous-groupe de commutateurs $G_1 = G$ et

G_{i+1} engendré par les commutateurs $[G_i, G]$, $i \geq 1$. Un groupe est alors dit *nilpotent* de classe d si G_d est trivial. Lorsque G est un groupe nilpotent de classe d , un *nilsystème* de classe d est donné par un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ cocompact et une translation à droite, $R_g: x \mapsto xg$ telle que le système $(G/\Gamma, R_g)$ soit minimal. Nous obtenons, dans ce contexte, le résultat suivant.

Théorème 1.1.6 ([7]) *Soit (X, σ) une extension presque injective d'un nilsystème de classe d $(G/\Gamma, R_g)$. Alors $\text{Aut}(X, \sigma)$ est un groupe nilpotent de classe au plus d et est un sous-groupe de $\text{Aut}(G/\Gamma, R_g)$.*

Ainsi pour un système Toeplitz (cf section 1.2.2), qui est une extension presque injective d'un odomètre, *i.e.* une translation sur un groupe abélien (nilpotent de classe 1), son groupe d'automorphismes est abélien et est un sous-groupe des automorphismes de son facteur équicontinu maximal.

Ajoutons, qu'en construisant des extensions symboliques presque injectives de nilsystèmes, nous obtenons à partir de ce théorème des systèmes symboliques de complexité polynomiales arbitrairement grande avec un groupe d'automorphismes virtuellement isomorphe à \mathbb{Z} [7].

Le théorème 1.1.6 se prouve en utilisant une remarque similaire sur les paires asymptotiques : le groupe des automorphismes préserve l'ensemble des paires *proximales*, *i.e.* les paires de points $x, y \in X$ tels que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\sigma^n x, \sigma^n y) = 0$. Rappelons qu'un résultat classique (voir par exemple lemme 2.1 dans [7]) assure que les fibres d'extensions presque injectives de systèmes minimaux donnent des paires proximales. Ceci nous permet de montrer que chaque automorphisme se factorise via l'application facteur. La conclusion vient ensuite de l'étude des automorphismes de nilsystèmes.

1.1.3 Sur la conjecture Pisot

Un approche classique, initiée par Hadamard [Had98] et Morse [Mor21], pour étudier une dynamique géométrique, comme l'étude d'un difféomorphisme d'une variété, consiste à coder sa dynamique par un sous-shift via une partition de Markov. Cette dynamique symbolique est en général plus simple à étudier. Dans son papier fondateur, Rauzy [Rau82] prend le problème sous la vision inverse : étant donné un sous-shift, peut-on lui associer une représentation géométrique ? Comme un ensemble de Cantor n'est pas homéomorphe à une variété, la "représentation géométrique" s'entend par une conjugaison en mesure. Par exemple Rauzy considère dans [Rau82] le sous-shift associé à la substitution de Tribonacci

$$\tau: 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13 \text{ et } 3 \mapsto 1.$$

Il montre que ce système est conjugué en mesure à une rotation minimale sur le tore \mathbb{T}^2 . Plus tard, Arnoux et Rauzy [AR91] montrèrent qu'un sous-shift dont la complexité est $2n + 1$ et satisfait une condition combinatoire appelée Condition (*) (condition satisfaite par le sous-shift associé à τ) est mesurablement conjugué à un échange de 3 intervalles.

La propriété fondamentale utilisée par Rauzy dans [Rau82] est que la substitution de Tribonacci τ est une substitution de type *Pisot*.

Définition 1.1.7 *Soit ξ une substitution primitive et P_ξ le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence M_ξ . La substitution est dite de type Pisot si le polynôme P_ξ admet une racine dominante $\beta > 1$ et les autres racines β' vérifient $0 < |\beta'| < 1$.*

Rappelons qu'une substitution ξ est dite *unimodulaire* lorsque $\det M_\xi = \pm 1$.

Ainsi pour une substitution de type Pisot, la valeur propre de Perron de M_ξ est alors un nombre Pisot-Vijayaraghan, i.e. : tous ses conjugués algébriques sont de module strictement plus petit que 1.

Remarquons que le fait d'être Pisot ne dépend pas de la combinatoire de la substitution, mais uniquement de son abélianisé M_ξ et que toute puissance d'une substitution de type Pisot est encore de type Pisot. Ainsi à partir d'une substitution de type Pisot, comme τ , il est possible de créer d'autres substitutions de type Pisot en prenant des puissances de τ puis en permutant les lettres, comme par exemple pour la substitution $1 \mapsto 1123$, $2 \mapsto 211$ et $3 \mapsto 21$.

Les résultats de Rauzy ont donné lieu à la conjecture (encore ouverte) suivante :

Conjecture 1.1.8 (Conjecture Pisot) *Le sous-shift engendré par une substitution de type Pisot a un spectre purement discret, i.e., est conjugué en mesure à une translation sur un groupe.*

Ajoutons également que cette conjecture implique un résultat de rigidité : tous les systèmes substitutifs de type Pisot, avec la même matrice d'incidence, sont mesurablement conjugués. Beaucoup de travaux se sont focalisés sur cette conjecture. La stratégie classique reprend celle initiée par Rauzy dans [Rau82] : on essaye de montrer que le système substitutif est conjugué en mesure à un échange de domaines (voir définition 1.1.9). Puis on prouve que cet échange de domaines, qui a une structure géométrique, est conjugué en mesure à une translation sur un groupe. Précisons tout d'abord ce que l'on entend par échange de domaines.

Définition 1.1.9 *Nous appelons échange de domaines le système dynamique mesurable $(E, \mathcal{B}, \text{Leb}, T)$ où E est un compact régulier* d'un espace euclidien, Leb désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur E et \mathcal{B} la tribu borélienne de E telle que*

- *Il existe des compacts réguliers E_1, \dots, E_n tels que $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$.*
- *Les ensembles E_i sont disjoints en mesure.*
- *$\text{Leb}(T(E)) = \text{Leb}(E)$.*
- *Pour chaque indice i , l'application T restreint à E_i est une translation telle que $T(E_i) \subset E$.*

Des résultats classiques en théorie de la mesure assurent que pour un échange de domaines, l'application T est injective en dehors d'un ensemble de mesure nulle et que l'application T^{-1} est mesurable. Un échange de domaines est dit *auto-affine*, s'il existe un nombre fini d'applications affines f_1, \dots, f_ℓ , partageant la même partie linéaire, telles que $E = \bigcup_{i=1}^\ell f_i(E)$.

Un premier résultat important dans le sens de la conjecture, est dû à Host [Hos86a] qui démontre que n'importe quelle fonction propre d'un système substitutif primitif est continue. Il montre également dans un papier non publié mais très cité, que la conjecture Pisot est vraie pour les substitutions unimodulaires sur un alphabet à deux lettres lorsqu'une condition combinatoire, appelée *condition de forte coïncidence*, est satisfaite. Cette condition apparaissait déjà dans [Dek78]. Barge et Diamond [BD02] montrèrent ensuite que n'importe quelle substitution de type Pisot sur un alphabet à deux lettres vérifiant cette condition. La conjecture Pisot est donc vraie dans ce cas [HS03]. En suivant la stratégie de Rauzy, mais par une approche différente de celle de Host, Arnoux et Ito dans [AI01], associèrent à chaque substitution unimodulaire, un échange de domaine auto-affine appelé *fractal de Rauzy*. Ils prouvèrent que cet échange de domaine est mesurablement conjugué au système substitutif à condition que la substitution satisfasse une condition combinatoire. Peu de

*. un compact est dit *régulier* s'il est égal à la fermeture de son intérieur.

temps après, Canterini et Siegel généralisent les résultats de Host à toutes les substitutions Pisot unimodulaires [CS01], et non unimodulaires dans [Sie03, Sie04], mais sans supprimer la condition de forte coïncidence. Ces résultats ont conduit à une énorme quantité de travaux pour étudier les fractals de Rauzy (voir [Fog02] et ses références).

Dans un travail en commun avec F. Durand [8], nous généralisons des résultats de [AI01] et [CS01], en supprimant la condition combinatoire : n'importe quel système substitutif de type Pisot unimodulaire est conjugué en mesure à un échange de domaine auto-affine.

Théorème 1.1.10 ([8]) *Soit ξ une substitution unimodulaire de type Pisot sur d lettres et (Ω, S) le sous-shift associé. Alors il existe une transformation d'échange de domaines auto-affine $(E, \mathcal{B}, \text{Leb}, T)$ dans \mathbb{R}^{d-1} et une application continue $F: \Omega \rightarrow E$ qui est une conjugaison mesurable entre les deux systèmes.*

De plus, en notant $\pi: \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}/\mathbb{Z}^{d-1}$ la projection canonique :

- il existe une application linéaire N telle que $F \circ \xi = N \circ F$.*
- L'application $\pi \circ F$ définit un facteur entre le système (Ω, S) est une translation minimale sur le tore $\mathbb{R}^{d-1}/\mathbb{Z}^{d-1}$.*
- Il existe un entier $r \geq 1$ tel que presque toute fibre de $\pi \circ F$ est de cardinal fini r .*

La translation minimale est explicitement décrite dans [CS01, Fog02]. Pour montrer la conjecture Pisot, il reste encore à montrer que cet échange de domaine est conjugué à la translation minimale sur le tore, ou encore que la constante $r = 1$. Précisons que l'échange de domaine n'est pas, *a priori*, le fractal de Rauzy classique associé à ξ car, à la différence de [AI01, Hos92], la matrice N n'est pas forcément identique à une restriction de la matrice d'incidence M_ξ . De plus notre construction diffère assez nettement de la construction géométrique de [AI01].

Pour éviter les problèmes classiques de combinatoire, notre stratégie a été, tout d'abord, de modifier la substitution : en utilisant la notion de *mots de retours*, la combinaison des résultats de [Dur98a, Dur98b, DHS99] montrent que le système substitutif est conjugué à un système avec une substitution *propre*, *i.e.* ayant des propriétés combinatoires sympathiques, comme celle de forte coïncidence. Malheureusement cette nouvelle substitution peut posséder, en plus des valeurs propres originales, les valeurs 0 et 1. Nous prouvons ensuite qu'un système substitutif avec un spectre dynamique non trivial se factorise sur un échange de domaines, grâce à une approximation des fonctions propres donnée dans [BDM05]. Une troisième étape consiste finalement à montrer la conjugaison mesurée lorsque le système substitutif a suffisamment de valeurs propres. Ces résultats combinés nous donnent alors le théorème 1.1.10. Cette troisième étape suit le même schéma de preuve que dans [CS01] mais sans utiliser les propriétés standard d'irréductibilité de la substitution. Nous utilisons de façon essentielle que le nombre de valeurs propres dynamiques multiplicativement indépendantes est égal à $\sum_{0 < |\lambda| < 1} \dim E_\lambda$ où E_λ désigne l'espace caractéristique associé à la valeur propre λ de la matrice d'incidence de la substitution.

Cette condition nous permet d'espérer de pouvoir étendre ces résultats à une classe plus grande de substitutions, comme celle de type *Salem*, où la valeur propre de Perron est un nombre de Salem et les autres valeurs propres ont un module inférieur à 1. Malheureusement nous ne connaissons pas de substitution de ce type ayant suffisamment de valeurs propres, même si *a priori* les restrictions arithmétiques de [FeMN96b] ne l'empêchent pas.

Une autre possibilité d'extension de ces résultats serait également dans le cadre linéairement répétitif. Une première classe d'exemples dans ce sens a été réalisée dans [BJS12].

1.1.4 Équivalence orbitale forte et valeurs propres

Des systèmes dynamiques sont *orbitalement équivalents* s'il existe une bijection entre leurs espaces de phases préservant leur structure (mesurée, topologique, ...) et envoyant chaque orbite sur une orbite. Cette notion est apparue tout d'abord dans le contexte des actions de groupes préservant une mesure de probabilité (on parle dans ce cas d'équivalence orbitale mesurable) lors de l'étude des algèbres de Von Neuman [MVN36]. Un résultat notable de cette théorie est qu'il n'existe qu'une seule classe d'équivalence orbitale parmi toutes les actions de groupes moyennables [Dye59, OW80]. Motivés par ces résultats et la caractérisation de l'équivalence orbitale en termes d'algèbres de Von Neumann, Giordano Putnam et Skau ont obtenu un des résultats les plus importants dans ce contexte : les classes d'équivalences orbitales topologiques de \mathbb{Z} -action minimale sur un ensemble de Cantor sont caractérisées par le groupe K_0 de la C^* -algèbre associée [GPS95].

Plus précisément, deux \mathbb{Z} -systèmes minimaux de Cantor (X, T) et (Y, S) sont *orbitalement* équivalents (topologiquement) ou OE, s'il existe un homéomorphisme $F: X \rightarrow Y$ envoyant les orbites de T sur celles de S . Cela signifie qu'il existe des fonctions $\alpha: X \rightarrow \mathbb{Z}$ et $\beta: X \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que

$$F(Tx) = S^{\alpha(x)}F(x) \text{ et } F(T^{\beta(x)}x) = SF(x), \quad \forall x \in X.$$

Lorsque ces fonctions α et β sont continues, Boyle dans [Boy83] démontre que les systèmes sont alors *flip conjugués*, *i.e.* le système (X, T) est conjugué soit à (Y, S) soit à (Y, S^{-1}) . Si les fonctions α et β admettent au plus un point de discontinuité, on dit alors que les systèmes (X, T) et (Y, S) sont *fortement orbitalement équivalents* (ou Strongly Orbit Equivalent SOE). Cette notion est en fait une relation d'équivalence sur les systèmes minimaux de Cantor.

Rappelons comment est défini l'invariant total d'équivalence orbitale : le groupe K^0 . Notons par $H(X, T)$ le groupe quotient $C(X, \mathbb{Z})/\langle f - f \circ T, f \in C(X, T) \rangle$, où $C(X, \mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans \mathbb{Z} et $\langle f - f \circ T, f \in C(X, T) \rangle$ son sous-groupe engendré par les cobords du système (X, T) . La classe d'une fonction f sera notée $[f]$. Nous définissons le cône positif $H^+(X, T)$ par l'ensemble $\{[f]; f \in C(X, \mathbb{N})\}$. Le triplet

$$K^0(X, T) = (H(X, T), H^+(X, T), [1])$$

est un groupe ordonné ($[f] \geq [g]$ ssi $[f - g] \in H^+(X, T)$) unitaire, d'unité $[1]$: la classe de la fonction constante égale à 1. Algébriquement, $K^0(X, T)$ est un groupe de dimension (voir [Eff81]). Nous dirons que deux groupes de dimension sont isomorphes s'ils sont isomorphes et l'isomorphie préserve les cônes positifs et les unités.

Le groupe des *infinitésimaux* est alors le sous-groupe $\text{Inf}(K^0(X, T)) = \{[f]; \int f d\mu = 0 \text{ pour toute mesure de probabilité } T\text{-invariante}\}$. Le triplet quotient $K^0(X, T)/\text{Inf}(K^0(X, T))$ est :

$$(H(X, T)/\text{Inf}(K^0(X, T)), H(X, T)^+/\text{Inf}(K^0(X, T)), [1] \text{ mod } \text{Inf}(K^0(X, T))).$$

Il forme également un groupe de dimension.

Théorème 1.1.11 ([GPS95]) *Soient (X, T) et (Y, S) deux systèmes minimaux de Cantor. Alors, les systèmes (X, T) et (Y, S) sont SOE si et seulement si leur groupe de dimension $K^0(X, T)$ et $K^0(Y, S)$ sont isomorphes en tant que groupe de dimension. Les systèmes (X, T) et (Y, S) sont OE si et seulement si les groupes $K^0(X, T)/\text{Inf}(K^0(X, T))$ et $K^0(Y, S)/\text{Inf}(K^0(Y, S))$ sont isomorphes en tant que groupe de dimension.*

Ajoutons que le groupe $K^0(X, T)$ est totalement explicite lorsque l'on peut décrire le système minimal en terme de diagramme de Bratteli [HPS92, DHS99], comme par exemple pour un système substitutif. On obtient ainsi le fait contre-intuitif, qu'un sous-shift sturmien (X, σ) est OE au système minimal (X, σ^2) .

Il en ressort également que l'on peut construire une infinité indénombrable de groupes de dimension $K^0(X, T)$, et donc une infinité de classes d'équivalence orbitale. Ceci est très différent du cadre mesurable où tous les \mathbb{Z} -systèmes sont équivalents entre eux.

Il est alors naturel de se demander quelles sont les propriétés dynamiques préservées au sein d'une même classe d'équivalence orbitale (forte ou pas). Par exemple dans [HPS92], un isomorphisme affine est construit entre l'ensemble des traces du groupe de dimension $K^0(X, T)$ et l'ensemble $\mathcal{M}(X, T)$ des mesures de probabilités invariantes par l'action. Ainsi le simplexe des mesures de probabilité invariantes d'un système est un invariant de SOE. À l'inverse, l'entropie n'est pas un invariant de SOE, car à l'intérieur d'une même classe, il est possible de construire un exemple de système avec une entropie arbitraire (finie ou non) [BH94, Orm97, Sug03].

Concernant le spectre continu du système dynamique, moins de choses sont connues. Ormes, dans [Orm97] démontre notamment, que le groupe des valeurs propres racines de l'unité est un invariant de SOE, mais pas de OE. Il montre, de plus, qu'à l'intérieur d'une classe d'OE fixée, il est possible de réaliser n'importe quel groupe dénombrable du cercle (éventuellement trivial) comme groupe de valeurs propres mesurables.

Dans [IO07, CDHM03], est apparue une restriction sur le groupe additif des valeurs propres continues $E(X, T) = \{\alpha \in \mathbb{R}; \exp(2i\pi\alpha) \text{ est une valeur propre continue de } (X, T)\}$. C'est un sous-ensemble de l'image du groupe $K^0(X, T)$ par ses traces :

$$E(X, T) \subset I(X, T) := \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} \left\{ \int f d\mu; f \in C(X, \mathbb{Z}) \right\}.$$

Ce résultat peut être vu comme une version similaire des résultats de Schwartzman sur les cycles asymptotiques [Sch57], mais transposés dans le cas d'ensembles de Cantor (voir également [Pac86, Exe87]).

Dans un travail en commun avec M.I. Cortez et F. Durand, nous montrons la restriction suivante sur le spectre continu.

Théorème 1.1.12 ([4]) *Soit (X, T) un système minimal de Cantor sans infinitésimaux, i.e. $\text{Inf}K^0(X, T) = \{[0]\}$. Alors le groupe quotient $I(X, T)/E(X, T)$ est sans torsion.*

Pour illustrer ce résultat, prenons le cas où $K^0(X, T) = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = I(X, T)$ avec α un nombre irrationnel, comme c'est le cas, par exemple, pour un sous-shift sturmien. Le seul sous-groupe propre de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ sans torsion étant le groupe \mathbb{Z} , le théorème implique que n'importe quel autre système (Y, S) SOE à (X, T) , admet comme groupe additif de valeur propre $E(Y, S)$ soit le groupe $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ (c'est le cas pour un système sturmien), soit admet le groupe \mathbb{Z} . Il est alors topologiquement faiblement mélangeant (c'est le cas donné par les réalisations de Ormes [Orm97]). Mentionnons, que des résultats similaires ont été obtenus par Giordano, Handelmann et Hosseini [GHH].

Précisons également que l'hypothèse sur les infinitésimaux est optimale. En effet, si (X, σ) désigne un sous-shift sturmien, le système (X, σ^2) est également minimal, admet la même mesure de probabilité invariante que (X, σ) , admet des infinitésimaux (donné par des cobords pour σ qui ne sont pas des cobords pour σ^2), et il est standard de vérifier que $I(X, \sigma^2) = I(X, \sigma) = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ alors que $E(X, \sigma^2) = \mathbb{Z} + 2\alpha\mathbb{Z}$.

Nous donnons en outre, dans [4], un exemple où le groupe quotient $I(X, T)/E(X, T)$ a de la torsion et qui montre que le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(X, T)$ (voir la section 1.1.2) n'est pas invariant dans la classe d'OE.

La preuve du théorème 1.1.12 passe par les partitions de Kakutani-Rohlin et leurs descriptions en terme de diagramme de Bratteli-Vershik. Comme dans la section 1.1.3, une description fine des fonctions propres continues à partir du diagramme nous permet de donner des conditions arithmétiques sur les valeurs propres additives au sein du groupe $E(X, T)$.

En paraphrasant ce théorème, nous obtenons, pour (X, T) un système minimal de Cantor sans infinitésimaux, que l'ensemble $\{E(Y, S); (YS) \text{ système minimal de Cantor SOE à } (X, T)\}$ est inclu dans

$$\{\Gamma \text{ sous-groupe dénombrable de } I(X, T); \mathbb{Z} \subset \Gamma, I(X, T)/\Gamma \text{ est sans torsion}\}.$$

On se demande alors si, en fait, ceci caractérise complètement les sous-groupes de valeurs propres au sein d'une même classe d'équivalence orbitale. Nous obtenons seulement une réponse partielle, grâce à un résultat de réalisation de Sugisaki [Sug11].

Proposition 1.1.13 ([4]) *L'inclusion précédente est une égalité si et seulement si : pour tout sous-groupe dénombrable dense $\Gamma \subset \mathbb{R}$ contenant \mathbb{Z} , il existe un système de Cantor minimal (X, T) tel que $E(X, T) = \Gamma$ et $K^0(X, T) \simeq (\Gamma, \Gamma \cap \mathbb{R}^+, 1)$.*

Techniquement, pour réaliser la condition de cette proposition avec des diagrammes de Bratteli, il nous est nécessaire d'avoir une bonne vitesse d'approximation (de type sommable) de vecteurs définis par Γ par une suite de matrices à coefficients entiers. Malheureusement, nous n'avons pas trouvé de résultats d'approximation satisfaisant ces conditions.

1.2 Actions minimales de groupes résiduellement finis

Peu d'exemples et de résultats sont connus pour les actions continues et libre de groupes non commutatifs sur des ensembles de Cantor. Il se trouve que cette première base est nécessaire pour se forger une intuition pour l'étude d'ensembles de Delone dans différentes géométries. Une classe d'exemples de sous-shifts qui puisse s'étendre assez facilement à des groupes plus généraux que \mathbb{Z} sont les sous-shifts Toeplitz. Nous verrons qu'ils fournissent une riche classe de dynamiques, tout particulièrement pour l'équivalence orbitale.

Les \mathbb{Z} -sous-shifts Toeplitz ont été introduits par Jacobs et Keane [JK69] en adaptant une technique de Toeplitz [Toe28] pour créer des fonctions presque périodiques (au sens de H. Bohr) explicites. Du fait de leur nature arithmetico-combinatoire, cette famille de \mathbb{Z} -sous-shifts a fourni de nombreux exemples de \mathbb{Z} -actions minimales avec des propriétés ergodiques et dynamiques intéressantes et a été largement étudiée [GJ00, Dow05]. Citons notamment Williams [Wil84], qui utilise ces sous-shifts pour créer une \mathbb{Z} -action minimale mais possédant une infinité non dénombrable de mesures de probabilité ergodiques invariantes. Généralisant ce résultat, Downarowicz [Dow91] montre l'existence d'un tel sous-shift dont le simplexe des mesures de probabilité invariantes est affinement homéomorphe à un simplexe de Choquet arbitraire. Le spectre continu des sous-shifts Toeplitz est bien compris car on sait décrire explicitement leur facteur équicontinu maximal : c'est un odomètre [MP79] (mais voir [DL98] pour une preuve). Plus précisément, Downarowicz et Lacroix caractérisent les sous-shifts Toeplitz comme étant les systèmes symboliques qui sont des extensions presque injectives

d'odomètres [DL98]. De plus n'importe quel entropie finie peut être réalisée par un sous-shift Toeplitz [Kur03]. Il est également possible de réaliser topologiquement diverses autres propriétés ergodiques par ces systèmes Toeplitz [Dow97].

Dans cette section, nous généraliserons la notion de suite Toeplitz à une classe plus large de groupe et nous étendrons quelques propriétés connues à ces actions. Pour cela, il nous faudra tout d'abord généraliser la notion d'odomètre aux groupes résiduellement finis (sous-section 1.2.1), puis voir les propriétés relatives des suites Toeplitz dans la sous-section 1.2.2. Nous verrons finalement l'apport de ces exemples dans la théorie de l'équivalence orbitale dans la sous section 1.2.3.

1.2.1 Groupes résiduellement finis et odomètres

Un groupe au plus dénombrable G est dit *résiduellement fini* s'il existe une suite $\Gamma_1 \supset \dots \supset \Gamma_n \supset \Gamma_{n+1} \supset \dots$ de sous-groupes de G d'indices finis telle que leur intersection soit triviale :

$$\bigcap_{n \geq 1} \Gamma_n = \{e\}, \quad (1.2.1)$$

où e désigne l'élément neutre de G .

Bien évidemment un groupe fini est résiduellement fini. Un premier exemple infini est le groupe des entiers \mathbb{Z} , avec la suite de groupes $\Gamma_n = n!\mathbb{Z}$. Plus généralement, un résultat classique de Mal'cev [Mal39], assure que pour tout corps \mathbb{K} de caractéristique nulle, n'importe quel groupe finiment engendré de $GL_n(\mathbb{K})$ est résiduellement fini. En particulier, le groupe libre F_n et le groupe des tresses B_n engendrés par n éléments sont résiduellement finis. Dans la suite, nous supposons que G est un groupe dénombrable, finiment engendré et résiduellement fini.

Pour un tel groupe, il existe ainsi des projections canoniques $\pi_n : G/\Gamma_{n+1} \rightarrow G/\Gamma_n$ sur les ensembles de classes à droites. Nous appelons G -*sous-odomètre* ou *adding machine* associé à la suite $(\Gamma_n)_n$, la limite projective suivante :

$$\overleftarrow{G} = \varprojlim (G/\Gamma_n, \pi_n) = \{(x_n)_n \in \prod_{n=1}^{\infty} G/\Gamma_n; \pi_n(x_{n+1}) = x_n \forall n \geq 1\}.$$

On munit chaque ensemble fini G/Γ_n de la topologie discrète, et \overleftarrow{G} est un sous-ensemble compact de $\prod_{n=1}^{\infty} G/\Gamma_n$ pour la topologie produit. Le groupe G agit continûment par multiplication à gauche sur \overleftarrow{G} : pour $h \in G$ et $(g_n)_n \in \overleftarrow{G}$, $h \cdot (g_n)_n := (h \cdot g_n)_n$ où $h \cdot$ désigne la multiplication à gauche par l'élément h dans G/Γ_n . Cette action généralise l'odomètre usuel (pour le groupe \mathbb{Z}) puisqu'on peut montrer qu'une telle action est équicontinue et minimale sur un ensemble de Cantor [5]. Ajoutons que deux suites de sous-groupes emboîtés $(\Gamma_n^{(1)})_n$ $(\Gamma_n^{(2)})_n$, donnent des sous-odomètres aux dynamiques différentes dès que $\Gamma_1^{(2)}$ n'est inclus dans aucun groupe $\Gamma_n^{(1)}$. Il est donc facile d'en créer un nombre indénombrable.

Une subtilité apparaît dans le contexte non commutatif. En effet, lorsque les groupes Γ_n sont normaux, les quotients G/Γ_n ont une structure de groupe et \overleftarrow{G} également. Nous appelons alors \overleftarrow{G} un *odomètre*. Du fait la relation (1.2.1), G est un sous-groupe de \overleftarrow{G} et son action correspond à la multiplication sur \overleftarrow{G} , elle est donc libre : le stabilisateur de tout point est trivial. Réciproquement, n'importe quel groupe topologique homéomorphe à un ensemble de Cantor est un odomètre [Ser63, Proposition 0]. Par des résultats classiques, on

peut aussi montrer que n'importe quel sous-odomètre est le quotient d'un odomètre par un sous-groupe fermé [5].

Ajoutons que les valeurs propres mesurables d'un sous-odomètre $\overleftarrow{G} = \varprojlim (G/\Gamma_n, \pi_n)$, sont les caractères $\chi: G \rightarrow \mathbb{S}^1$ telles que $\chi(\gamma) = 1, \forall \gamma \in \Gamma_n$ [5].

1.2.2 Sous-shift Toeplitz

Pour un alphabet fini Σ , l'action à gauche du *shift* $\sigma: G \curvearrowright \Sigma^G$ sur l'ensemble des fonctions $x: G \rightarrow \Sigma$, est défini pour $g \in G$ par $\sigma^g(x)(h) = x(g^{-1}h)$, pour tout $h \in G$. Lorsque Σ est muni de la topologie discrète, Σ^G est un ensemble de Cantor et l'action du shift est continue. Comme pour le cas de \mathbb{Z} , un sous-ensemble fermé $X \subset \Sigma^G$ invariant par l'action du shift est appelé *sous-shift*.

Définition 1.2.1 Une suite $x \in \Sigma^G$ est dite Toeplitz si pour tout indice $g \in G$, il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset G$ tel que $\sigma^\gamma(x)(g) = x(\gamma^{-1}g) = x(g)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$.

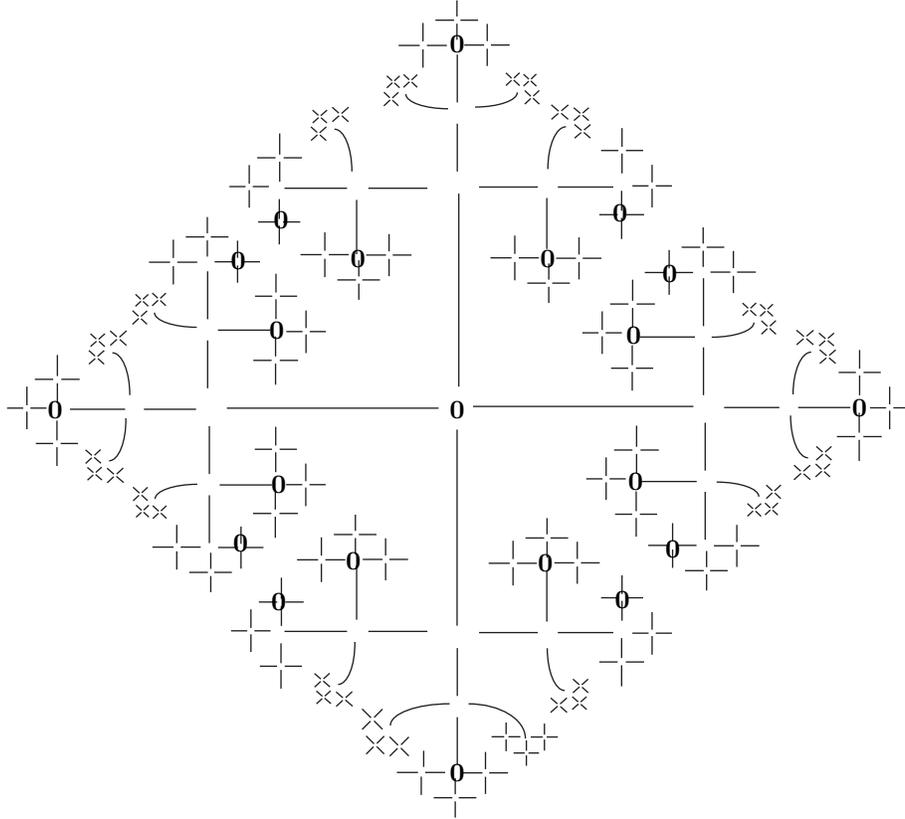


FIGURE 1.1 – Étape 1. On colorie e par $\mathbf{0}$ puis on prolonge par Γ_1 -périodicité où $\Gamma_1 = \langle a^3, b^3, aba^{-1}, a^{-1}ba, bab^{-1}, b^{-1}ab \rangle$ et a, b désignent des générateurs du groupe libre F_2 .

Le lecteur attentif remarquera que si l'on permute l'ordre des quantificateurs, on obtient la définition de suite périodique pour un sous-groupe d'indice fini. Étant donné une suite

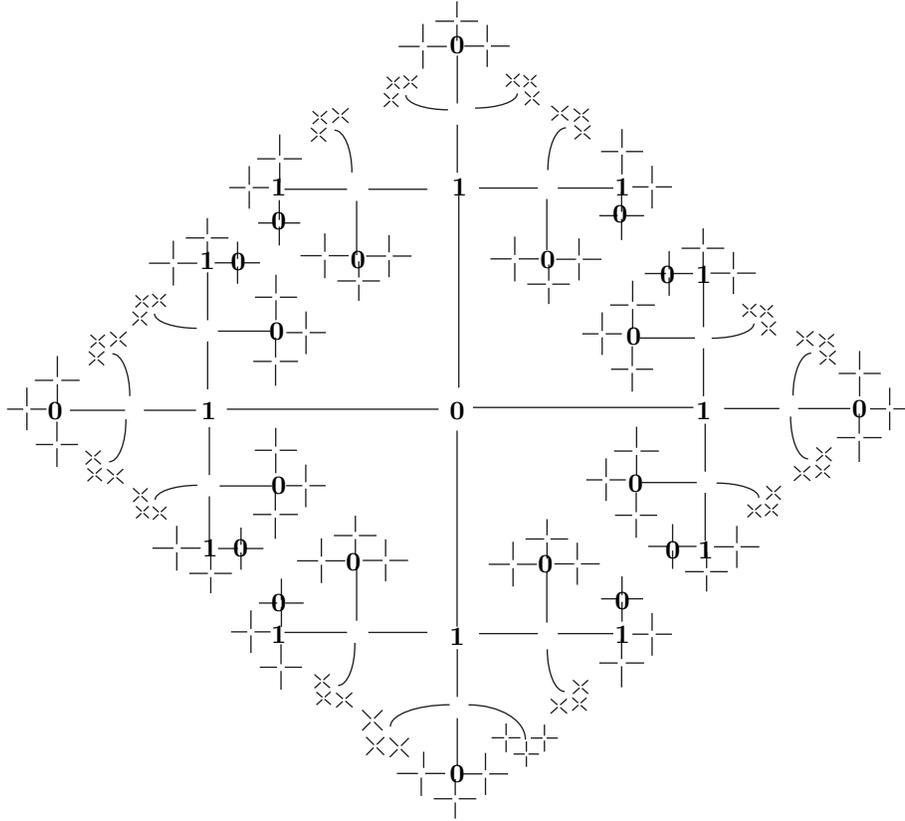


FIGURE 1.2 – Étape 2. On complète par **1** la coloration du domaine fondamental de Γ_1 puis on prolonge par Γ_2 -périodicité pour un certain groupe $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$.

décroissante de sous-groupe $(\Gamma_n)_n$ d'indices finis et d'intersection triviale, il est possible de construire une suite croissante de domaines fondamentaux finis D_n pour G/Γ_n de sorte que $\bigcup_n D_n = G$ et chaque D_{n+1} est une union de translats de D_n . On construit alors par récurrence une suite Toeplitz de la façon suivante : à l'étape n , on choisit arbitrairement $x|_{D_n}$ (pour les indices non encore définis) puis on prolonge par Γ_{n+1} -périodicité : pour tout $\gamma \in \Gamma_{n+1}$, $h \in D_n$, on pose $x(\gamma h) := x(h)$ (voir les figures 1.1 et 1.2).

Un *G-sous-shift Toeplitz* X est l'adhérence d'une orbite, par l'action du shift, d'une suite Toeplitz $\{\sigma^g(x); g \in G\}$. La G -action restreinte à ce sous-shift est alors *régulièrement récurrent*, dans le sens où pour tout voisinage V de x , il existe un sous-groupe $\Gamma \subset G$ d'indice fini tel que $\sigma^\gamma(v) \in V$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ [Kri06, 5]. Cette condition est plus forte que la presque périodicité et assure donc que l'action de G est minimale sur ce sous-shift [Aus88]. Nous dirons que la restriction de l'action du shift sur le sous-shift X est *fortement régulièrement récurrent* s'il existe un voisinage W arbitrairement petit de x tel que $\{\gamma \in G; \sigma^\gamma(x) \in W\}$ est un sous-groupe normal de G d'indice fini. Bien évidemment cette condition implique la récurrence régulière.

Dans un travail en commun avec M. I. Cortez, nous caractérisons les sous-shifts qui sont des extensions presque injectives de sous-odomètres en étendant au contexte non commutatif

les résultats de [DL98, Cor06]. Rappelons que le système (X, G) est une *extension presque injective* du système (\overleftarrow{G}, G) s'il existe une application continue $\pi: X \rightarrow \overleftarrow{G}$ surjective, commutant avec les actions, telle que π est injective sur un ensemble G_δ -dense (au sens de Baire).

Théorème 1.2.2 ([5]) *Un sous-shift minimal (X, G) est une extension presque injective d'un sous-odomètre (resp. un odomètre) (\overleftarrow{G}, G) par π si et seulement si X est un G -sous-shift Toeplitz (resp. fortement régulièrement récurrent).*

De plus l'ensemble des points d'injectivité de π est l'ensemble des suites Toeplitz de X .

Ce théorème implique en particulier que le facteur équicontinu maximal d'un sous-shift Toeplitz est un sous-odomètre \overleftarrow{G} [Aus88]. Ces systèmes partagent donc le même spectre continu. En fait, nous pouvons être beaucoup plus précis, et caractériser exactement l'odomètre en fonction de la combinatoire d'une suite Toeplitz. Il en ressort le théorème d'existence suivant :

Théorème 1.2.3 ([5]) *Pour tout sous-odomètre \overleftarrow{G} , il existe une suite Toeplitz $x \in \{0, 1\}^G$ telle que (\overleftarrow{G}, G) est le facteur équicontinu maximal du G -sous-shift Toeplitz associé à x .*

Citons également le travail de Krieger [Kri06] qui, lorsque le groupe G est moyennable, réalise n'importe quelle entropie par un sous-shift Toeplitz.

1.2.3 Équivalence orbitale pour les sous-shifts Toeplitz

Nous considérons ici le cas d'un groupe G résiduellement fini, finiment engendré et moyennable. Ainsi chaque action continue de G sur un espace métrique compact admet une mesure de probabilité invariante. Le théorème 1.2.2 peut faire penser que les sous-shifts Toeplitz et les odomètres ont des dynamiques très proches. Nous montrons, en fait, qu'il n'en est rien dans le contexte mesuré. Il est possible de réaliser n'importe quel simplexe (raisonnable) de mesures de probabilité invariantes par l'action du shift sur un sous-shift Toeplitz.

Théorème 1.2.4 ([6]) *Pour tout simplexe de Choquet K et n'importe quel odomètre \overleftarrow{G} , il existe un G -sous-shift Toeplitz X qui est une extension presque injective de (\overleftarrow{G}, G) et dont l'ensemble des mesures de probabilité invariantes est affinement homéomorphe à K .*

Ce résultat généralise celui de Downarowicz [Dow91] au cadre non commutatif moyennable. Une grande différence est que notre preuve est constructive. Elle repose sur une description de la dynamique par une partition à la Kakutani-Rohlin à l'aide d'une suite de Følner $(F_n)_n$. Nous construisons une telle suite avec une propriété combinatoire : il en existe une de sorte qu'à chaque étape, F_{n+1} est pavable par des translatés de F_n et chaque F_n est un domaine fondamental pour le groupe Γ_n (voir également [Wei01]). Nous en déduisons que pour une suite de matrices d'incidences $(M_n)_n$ vérifiant des conditions arithmétiques données par la suite de nombres $(\text{card } F_{n+1}/\text{card } F_n)_n$, il existe une suite Toeplitz dont le remplissage à l'étape n est "contrôlé" par la matrice M_n . Nous obtenons le résultat en décrivant le simplexe K par une limite inverse de simplexes de dimensions finies, ce qui nous donne les matrices d'incidences.

Une autre conséquence de notre construction arrive dans le contexte de l'équivalence orbitale. Suite à de nombreux travaux Giordano, Matui, Putnam et Skau [GMPS10] montrent que pour toute \mathbb{Z}^d -action (X, \mathbb{Z}^d) minimale sur un ensemble de Cantor, il existe une \mathbb{Z} -action (Y, S) minimale sur un Cantor qui lui est orbitalement équivalente, *i.e.* il existe un

homéomorphisme de $X \rightarrow Y$ préservant les orbites des systèmes. Dans ce contexte, le groupe de dimension modulo les infinitésimaux (définition similaire à celle de la section 1.1.4) est également un invariant total de l'équivalence orbitale [GMPS10].

Ce résultat est similaire à ceux de [OW80, CFW81] dans le contexte mesuré. Cependant, on ne sait toujours pas s'il peut s'étendre à n'importe quelle action minimale sur un Cantor d'un groupe dénombrable moyennable. À l'opposé, on sait que le même résultat est faux pour des groupes libres puisque Gaboriau [Gab00] a montré que si des actions des groupes libres F_n et F_p sont orbitalement équivalentes (même seulement mesurablement) alors le rang des groupes est préservé, *i.e.* $n = p$. De plus, nous ne savons toujours pas quelles sont les \mathbb{Z} -actions qui peuvent être réalisées comme des classes de \mathbb{Z}^d -actions. Nous donnons dans [6] une réponse partielle qui apparaît comme un corollaire de notre preuve du théorème 1.2.4.

Théorème 1.2.5 ([6]) *Soit (X, \mathbb{Z}) un \mathbb{Z} sous-shift Toeplitz. Alors pour tout entier $d \geq 1$, il existe un \mathbb{Z}^d sous-shift Toeplitz qui est orbitalement équivalent à (X, \mathbb{Z}) .*

Pour le démontrer, nous utilisons une description en terme de partition de Kakutani-Rohlin pour caractériser le groupe de dimension modulo les infinitésimaux associés à la \mathbb{Z}^d -action. En appliquant directement le résultat de [GMPS10], il suffit alors de décrire le groupe de dimension d'un \mathbb{Z} -sous-shift Toeplitz par une limite inverse de groupes pour donner une suite de matrices d'incidences permettant de définir le \mathbb{Z}^d -Toeplitz.

Chapitre 2

Systemes de Delone

Les concepts de base reliés aux ensembles de Delone euclidiens ou hyperboliques sont rappelés dans la première section, notamment la notion d’enveloppe topologique (sous-section 2.1.1) et ses propriétés géométriques (sous-section 2.1.2).

La section 2.2 ne traite que du cas euclidien. Nous décrivons d’abord quelques propriétés des ensembles linéairement répétitifs dans la sous-section 2.2.1, puis nous traitons des propriétés des homéomorphismes de l’enveloppe dans la sous-section 2.2.2.

La dernière section est relative aux ensembles de Delone en géométrie hyperbolique. Nous rappelons quelques constructions, qui ne sont pas toujours simple à trouver dans la littérature, dans la sous-section 2.3.1. La sous-section 2.3.2 concerne le lien entre les mesures harmoniques et les mesures invariantes des systèmes associés. La dernière sous-section traite de la K -théorie d’une famille d’exemples d’ensembles de Delone hyperboliques.

2.1 Généralités

2.1.1 Ensemble de Delone et enveloppe topologique

Nous considérerons à la fois la géométrie euclidienne et hyperbolique. Ainsi, en suivant les notions issues de [BG03], \mathbb{G} désignera dans cette section

- soit le groupe \mathbb{R}^d des translations de l’espace euclidien de dimension $d \geq 1$,
- soit le groupe des transformations affines $\{z \mapsto az + b; a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ vu comme sous-groupe d’isométries du demi plan hyperbolique $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$ munit de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Remarquons que les deux groupes agissent par isométries transitivement et librement sur leur espace homogène associé de sorte que l’on peut identifier ces groupes d’isométries et leurs espaces. Le groupe \mathbb{G} est munit d’une distance invariante par multiplication à gauche. Nous noterons par $B_R(x)$ la boule de rayon $R > 0$ centrée en un point $x \in \mathbb{G}$. Nous renvoyons le lecteur à [LP03, KP00] pour une présentation détaillée des ensembles de Delone euclidiens et à [Rud89, Rob96, Sol97] pour une introduction aux propriétés des systèmes de Delone associés. Tout ce qui est présenté dans cette section peut s’étendre aux pavages et à des groupes de Lie connexes [BG03].

Définition 2.1.1 *Un (r_X, R_X) -ensemble de Delone $X \subset \mathbb{G}$ est un sous-ensemble*

- r_X -uniformément discret, i.e. pour tout $x \in X$, $\text{card } B_{r_X}(x) \cap X \leq 1$;

— R_X -relativement dense, i.e. pour tout point $y \in \mathbb{G}$, $\text{card } B_{R_X}(y) \cap X \geq 1$.

Pour alléger les notations, nous parlerons d'ensemble de Delone, sans préciser les constantes r_X et R_X . Un R -patch P est un sous-ensemble fini de X de la forme $B_R(x) \cap X$ pour un certain $x \in X$. Deux patches P_1 et P_2 sont dits \mathbb{G} -équivalents s'il existe une isométrie $g \in \mathbb{G}$ telle que $g(P_1) = P_2$. Un ensemble de Delone X est dit *de \mathbb{G} -type fini* si pour tout $R > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de classes de \mathbb{G} -équivalence de R -patches. Un point $y \in X$ est une *occurrence* d'un R -patch P si les patches $B_R(y) \cap X$ et P sont \mathbb{G} -équivalents.

Nous allons donner à présent une topologie sur l'ensemble des ensembles de Delone de \mathbb{G} -type fini. Remarquons tout d'abord qu'à chaque ensemble de Delone X , nous pouvons associer une mesure de Radon $\nu_X := \sum_{x \in X} \delta_x$ où δ_x désigne la mesure de Dirac en x . Comme l'ensemble des mesures $\mathcal{M}(\mathbb{G}, r, R)$ obtenus à partir de (r, R) -ensembles de Delone est un sous-ensemble du dual des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c(\mathbb{G}, \mathbb{R})$. La topologie faible-* induit une topologie métrique sur cet ensemble fermé, appelée topologie de *Gromov-Hausdorff*, où une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles de Delone converge vers X si et seulement si pour tout ouvert borné U de \mathbb{G} , la suite d'ensembles $(U \cap X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $U \cap X$ pour la topologie de Hausdorff. De façon plus combinatoire, pour cette topologie, deux ensembles de Delone sont proches s'ils coïncident, par une isométrie de \mathbb{G} proche de l'identité, sur une grande boule centrée à l'origine.

Le groupe des transformations \mathbb{G} agit continûment par translation à droite* sur l'ensemble des ensembles de Delone de \mathbb{G} -type fini $X.g := g^{-1}(X) = \{g^{-1}(x); x \in X\}$. Cette action peut également être vue comme la restriction de l'action par translation à droite de \mathbb{G} sur $\mathcal{M}(\mathbb{G}, r, R)$ donnée par $\nu.g(f) := \nu(f(g^{-1}\cdot))$ pour $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{G})$, $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{G}$.

L'*enveloppe topologique* $\Omega(X)$ de l'ensemble de Delone X est la fermeture pour la topologie de Gromov-Hausdorff de l'orbite de X par l'action de \mathbb{G} . Le système dynamique $(\Omega(X), \mathbb{G})$ est alors appelé *système de Delone*. Il est direct de montrer que $\Omega(X)$ est un ensemble métrique compact (cf [KP00]). Le fait de se restreindre aux ensembles de Delone de \mathbb{G} -type fini implique une certaine rigidité : chaque élément est un ensemble de Delone X' dont chaque patch est équivalent à un patch de X [KP00, BG03]. De plus, l'action de \mathbb{G} est continue et le système dynamique $(\Omega(X), \mathbb{G})$ possède, par construction, une orbite dense (celle de X). Un résultat classique donne la caractérisation combinatoire suivante.

Proposition 2.1.2 ([Aus88]) *Soit X un ensemble de Delone de \mathbb{G} -type fini. Le système de Delone $(\Omega(X), \mathbb{G})$ est minimal si et seulement si X est répétitif : i.e. pour tout rayon $R > 0$ et pour tout R -patch P de X , il existe une constante $M(R) > 0$ telle que n'importe quelle boule de rayon M intersectée avec X contient une occurrence de P .*

Nous dirons qu'un ensemble de Delone X est *apériodique* si pour tout $g \in \mathbb{G} \setminus \{e\}$ $X.g \neq X$. Cet ensemble est dit *totalemtent apériodique* si pour tout ensemble $Y \in \Omega(X)$ et pour tout $g \in \mathbb{G} \setminus \{e\}$ $Y.g \neq Y$ ou, autrement dit, l'action de \mathbb{G} sur $\Omega(X)$ est libre. Dans le cas commutatif $\mathbb{G} = \mathbb{R}^d$, si X est répétitif et apériodique, alors il est totalement apériodique. Ce n'est pas le cas dans le cadre non commutatif. Les exemples classiques d'ensembles de Delone apériodiques répétitifs en géométrie euclidienne sont données par les méthodes de *coupée-projection* [dB81, KD86] et de substitution [Gar77, GS89]. Rappelons que le pavage de Penrose peut être obtenu par ces deux méthodes. Nous renvoyons à la sous-section 2.3.1 pour des exemples d'ensembles de Delone apériodiques et répétitifs en géométrie hyperbolique. Pour des exemples sur des groupes de Lie plus généraux, nous réferrons par exemple à [Moz97].

*. Le choix de l'action à droite deviendra clair lors de la présentation de la structure géométrique de l'enveloppe.

Pour des raisons techniques, il est utile d'introduire également le sous-ensemble de l'enveloppe Ξ appelé *transversale canonique* défini comme

$$\Xi(X) = \{Y \in \Omega(X); \text{l'origine } e \in Y\}.$$

Topologiquement, il est assez simple de voir que l'hypothèse de \mathbb{G} -type fini implique que cet ensemble est totalement discontinu. Lorsque l'ensemble de Delone X est répétitif et totalement aperiodique, c'est un ensemble de Cantor. Il est transverse à la dynamique dans le sens où pour tout $g \in \mathbb{G} \setminus \{e\}$ suffisamment proche de l'identité, les ensembles $\Xi(X).g$ et $\Xi(X)$ sont disjoints.

2.1.2 Structure géométrique de l'enveloppe

Nous rappelons ici la structure géométrique de lamination de ces enveloppes. Nous faisons référence à [BBG06, BG03] pour une présentation plus détaillée.

Soit (Ω, dist) un espace métrique compact, et supposons qu'il existe un recouvrement par des ouverts U_i et des homéomorphismes, appelés *carte*, $h_i: U_i \rightarrow V_i \times \Xi_i$ où V_i est un ensemble ouvert du groupe de Lie \mathbb{G} et Ξ_i est un espace métrique compact totalement discontinu. La collection d'ouverts et d'homéomorphismes (U_i, h_i) est appelé *atlas d'une lamination plate* si pour chaque *application de transition* $h_{i,j} = h_i \circ h_j^{-1}$, il existe un $g_{i,j} \in \mathbb{G}$ et un homéomorphisme $f_{i,j}: \Xi'_j \subset \Xi_j \rightarrow \Xi'_i \subset \Xi_i$ de sorte que $h_{i,j}$ s'écrive dans son domaine de définition

$$h_{i,j}(g, \xi) = (g_{i,j}.g, f_{i,j}(\xi)), \quad (2.1.1)$$

où $g_{i,j}.g$ désigne la multiplication à gauche de $x \in \mathbb{G}$ par $g_{i,j}$. Il est important de noter que l'élément $g_{i,j}$ et l'homéomorphisme $f_{i,j}$ sont indépendants des coordonnées (g, ξ) . Deux atlas sont dits *équivalents* si leur union est également un atlas de lamination plate. Une *lamination plate* est la donnée d'un espace métrique compact Ω et d'une classe d'équivalence d'atlas de lamination plate. Un atlas est alors dit *maximal* s'il contient n'importe quel atlas équivalent. Une *boîte* est un domaine d'une carte dans l'atlas maximal.

Ainsi un tel espace est une lamination géométrique [CGSY99, chapitre 2]. Plus précisément une telle lamination est une *variété boîte d'allumettes*, ou *matchbox manifold* [AO95] car son espace transverse est totalement discontinu. Encore plus spécifiquement, il admet une transversale globale. En résumé, nous avons :

1. des *plaques* : une plaque est un ensemble de la forme $h_i^{-1}(V_i \times \{\xi\})$ dans une carte.
2. Des *verticales* : une verticale est un ensemble de la forme $h_i^{-1}(\{g\} \times \Xi_i)$ dans une carte.

Comme les applications de transition envoient les plaques (resp. les verticales) sur des plaques (resp. des verticales), ces notions sont bien définies, indépendamment du choix de la carte, et leur union forme un ensemble globalement bien défini. Ainsi une *feuille* est la composante connexe des plaques qui s'intersectent. L'espace Ω est une union disjointe de feuilles et chaque feuille a une structure de variété différentiable. Une lamination plate Ω est dite *minimale* si toutes ses feuilles sont denses dans Ω . De la même façon, une union disjointe de verticales est bien définie et est appelée une *transversale* de Ω .

De la forme spéciale des applications de transition, on peut définir (indépendamment du choix de la carte) une action par multiplication à droite par un élément de \mathbb{G} proche de l'identité. Suivant l'appellation originelle [BG03], nous appellerons \mathbb{G} -*solénoïde*[†] toute

†. Pour éviter une certaine ambiguïté avec le terme solénoïde, réservé à des actions équicontinues, certains auteurs préfèrent utiliser le terme de *lamination pavable*.

lamination plate Ω dont chaque feuille est isométrique à \mathbb{G} . Dans ce cas, l'action locale de \mathbb{G} s'étend en une action globale continue de \mathbb{G} sur Ω . Celle-ci est libre (le stabilisateur de tout point est trivial) et les feuilles correspondent aux orbites de l'action.

Une propriété importante de cette action est qu'elle envoie une verticale sur une verticale. Ceci lui donne une propriété que nous appellerons un peu abusivement *temps de retour localement constant* : i.e. pour tout $g \in \mathbb{G}$ et pour tout point $x \in \Omega$ dans une verticale $\tilde{\Xi}$ d'une boîte B , si $x.g$ appartient à une verticale $\tilde{\Xi}_2$ d'une boîte B_2 , alors pour tout $y \in \tilde{\Xi}$ suffisamment proche de x , nous avons $y.g \in \tilde{\Xi}_2$. Il en ressort que chaque verticale est *transverse* à l'action puisque pour tout $g \in \mathbb{G}$ suffisamment proche de l'identité et pour toute verticale $\tilde{\Xi}$ suffisamment petite, les ensembles $\tilde{\Xi}.g$ et $\tilde{\Xi}$ sont disjoints.

Des exemples de \mathbb{G} -solénoïdes minimaux sont alors obtenus par des suspensions d'actions minimales libres d'un réseau, ou d'un semi-réseau cocompact de \mathbb{G} (ex : \mathbb{Z}^d pour $\mathbb{G} = \mathbb{R}^d$, ou le semi-groupe de Baumslag-Solitar pour le groupe \mathbb{G} des transformations affines) sur un ensemble de Cantor Ξ , en prenant des applications *temps* localement constantes. Voir la section 1.2 pour de tels exemples. La suspension d'un odomètre (cf sous-section 1.2.1), nous donne ainsi un \mathbb{G} -solénoïde avec une action de \mathbb{G} équicontinue.

À l'opposé des systèmes équicontinus, la notion suivante est caractéristique des systèmes associés aux ensembles de Delone [FS14].

Définition 2.1.3 *Le \mathbb{G} -solénoïde Ω est dit expansif s'il existe un $\eta > 0$ vérifiant pour tout homéomorphisme $h: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ tel que $h(e) = e$, si $x, y \in \Omega$ sont tels que $\sup_{g \in \mathbb{G}} \text{dist}(x.g, y.h(g)) < \eta$ alors il existe un g_0 η -proche de e tel que $x.g_0 = y$.*

La relation entre les ensembles de Delone et les solénoïdes est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.1.4 ([BG03]) *Soit $X \subset \mathbb{G}$ un ensemble de Delone totalement apériodique de \mathbb{G} -type fini. Alors l'enveloppe continue de $\Omega(X)$ a une structure de \mathbb{G} -solénoïde expansif où l'action de \mathbb{G} sur $\Omega(X)$ coïncide avec celle de \mathbb{G} sur le solénoïde. Réciproquement, si Ω est un \mathbb{G} -solénoïde expansif minimal, alors il existe un ensemble de Delone $X \subset \mathbb{G}$ totalement apériodique de \mathbb{G} -type fini et répétitif tel que les systèmes dynamiques (Ω, \mathbb{G}) et $(\Omega(X), \mathbb{G})$ sont conjugués.*

La structure de lamination des espaces de Delone avait déjà été remarquée dans [CGSY99, chapitre 2]. Les boîtes s'obtiennent assez naturellement dans le contexte des pavages. En effet, pour un R -patch P que l'on peut supposer, quitte à le translater, centré en l'origine, nous noterons par $\text{conv } P \subset \mathbb{G}$ son enveloppe convexe. Soit i_P l'application

$$\begin{aligned} i_P: \text{conv } P \times \Xi_P &\rightarrow \Omega(X) \\ (g, Y) &\mapsto Y.g = g^{-1}(Y) \end{aligned}$$

où Ξ_P désigne l'ensemble $\{Y \in \Xi(X), B_R(0) \cap Y = P\}$. Il est alors simple de vérifier que cette application est un homéomorphisme sur son ensemble image. De plus, la collection de ces applications forme un atlas de lamination plate. Ainsi l'enveloppe d'un ensemble de Delone répétitif totalement apériodique est localement homéomorphe au produit cartésien d'un ensemble de Cantor par un ouvert de \mathbb{G} et l'ensemble $\Xi(X)$ est une transversale globale.

Une *décomposition en boîtes* est une collection de boîtes ouvertes deux à deux disjointes $\mathcal{B} = \{B^{(1)}, \dots, B^{(t)}\}$ de Ω telle que l'union de leur fermeture recouvre l'espace Ω . En identifiant les points appartenant à une même verticale de la fermeture d'une boîte, nous obtenons

un simplexe B . Comme la lamination est plate, ce simplexe hérite d'une structure supplémentaire de *variété branchée* [Wil74, BG03], *i.e.* est localement le recollement de variétés tangentes entre elles. Cette variété possède donc un espace tangeant en chacun de ses points. En prenant une suite de décompositions en boîtes $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ "bien emboîtées", dans le sens où chaque verticale d'une boîte de \mathcal{B}_n est incluse dans une verticale d'une boîte de \mathcal{B}_{n+1} , plus quelques conditions techniques, Benedetti et Gambaudo obtiennent qu'un \mathbb{G} -solénoïde est conjugué à une limite projective de variétés branchées

$$\varprojlim (B_n, f_n) = \left\{ (x_n)_{n \geq 0} \in \prod_{n \geq 0} B_n; f_n(x_{n+1}) = x_n \right\},$$

où chaque $f_n: B_{n+1} \rightarrow B_n$ est une application continue surjective, envoyant le lieu singulier sur le lieu singulier [BG03, Sad03].

2.2 Ensembles de Delone euclidiens

2.2.1 Ensembles linéairement répétitifs

Rappelons que d'après la Proposition 2.1.2, un ensemble de Delone $X \subset \mathbb{R}^d$ est répétitif si tout R -patch apparaît dans n'importe quelle boule de rayon M . La plus petite valeur M possible pour un R fixé sera appelée *fonction de répétitivité* et sera désignée par $M_X(R)$.

Définition 2.2.1 *Un ensemble de Delone $X \subset \mathbb{R}^d$ est dit linéairement répétitif si sa fonction de répétitivité $M_X(R)$ croît au plus linéairement, i.e. il existe une constante $L > 1$ telle que $M_X(R) \leq LR$ pour tout $R > 0$.*

Dans la suite, nous dirons que X est *linéairement répétitif (de constante L)*. Cette notion est apparue dans [LP02]. De façon indépendante, la notion similaire de \mathbb{Z} -sous-shift *linéairement récurrent* avait été introduite, peu de temps auparavant dans [Dur96, DHS99] pour étudier les relations entre les systèmes substitutifs et les groupes de dimension stationnaires.

Selon le théorème suivant, il s'agit de la croissance la plus lente possible de fonction de répétitivité pour un ensemble de Delone aperiodique.

Théorème 2.2.2 ([LP02], Thm 2.3) *Soit $d \geq 1$. Il existe une constante $c(d) > 1$ telle que tout ensemble de Delone $X \subset \mathbb{R}^d$ vérifiant*

$$M_X(R) \leq c(d)R \quad \text{pour un certain } R > 0,$$

a une période non nulle : i.e. il existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $X + \vec{v} = X$.

Citons également un autre résultat de [LP02] qui stipule que si pour un $R > 0$, $M_X(R) < \frac{4}{3}R$, alors l'ensemble de Delone X a d périodes indépendantes.

Les exemples classiques d'ensembles de Delone aperiodiques, c'est-à-dire ceux issus des substitutions primitives, sont linéairement répétitifs [Sol98]. Pourtant, de différents points de vue, la collection des ensembles de Delone linéairement répétitifs est petite dans la famille des ensembles de Delone de \mathbb{R}^d . Par exemple, dans [MH40], Morse et Hedlund caractérisent les sous-shifts sturmiens linéairement récurrents (ou linéairement répétitifs) comme étant ceux qui codent une rotation d'angle $\alpha \in [0, 1[$ dont le développement en fraction continue est borné. Ces angles sont alors mal approchés par les nombres rationnels. Ils forment un

ensemble maigre au sens de Baire et de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue. Cependant, cet ensemble est de dimension de Hausdorff maximal 1. Mentionnons que tous ces résultats ont été étendus aux dimensions supérieures aux ensembles de Delone obtenus par coupé-projection dans [HKW].

Un ensemble de Delone $X \subset \mathbb{R}^d$ linéairement répétitif aperiodique possède de nombreuses propriétés rigides. Par exemple d'un point de vue combinatoire, deux occurrences d'un même R -patch sont à une distance au moins linéaire en R . Ceci implique que la complexité de X est la plus basse possible [Len04, LP03] : si $N_X(R)$ désigne le nombre de R -patch, à translation près, alors $N_X(R) \in \Theta(R^d)$ signifiant qu'il existe des constantes $cste_1, cste_2 > 0$ telles que pour tout R suffisamment grand

$$cste_1 R^d \leq N_X(R) \leq cste_2 R^d.$$

Sa structure hiérarchique est également très contrainte. Étant donnée n'importe quelle taille $R > 0$, il est possible de décomposer X en de gros patches (chacun contenant au moins un R -patch) de sorte que le nombre de ces gros patches, à translation près, est uniformément borné en R [3]. D'un point de vue structurel, il est possible de décrire le \mathbb{R}^d -solénoïde $\Omega(X)$ par une limite projective de variétés branchées $\varprojlim (B_n, f_n)$ avec un nombre fini de variétés branchées à homéomorphisme près et où la suite des applications $(f_n^*)_n$ en homologie est uniformément bornée [APC11].

D'un point de vue ergodique, les systèmes associés aux ensembles de Delone linéairement répétitifs sont minimaux et uniquement ergodiques. Il est même possible de déterminer des vitesses de convergences du nombre moyen d'occurrences d'un patch [LP03, APC11]. Précisons que ces systèmes sont d'entropie nulle et ne sont jamais mesurablement fortement mélangeants [1]. Ces ensembles de Delone possèdent bien d'autres propriétés géométriques et nous renvoyons le lecteur à [1] et ses références pour un survol des différentes propriétés et caractérisations connues des ensembles de Delone linéairement répétitifs.

D'un point de vue dynamique, nous montrons dans [3] que la famille des ensembles de Delone linéairement répétitifs est "stable" dans la famille des systèmes de Delone aperiodiques.

Proposition 2.2.3 ([3]) *Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de Delone linéairement répétitif de constante $L > 1$. Alors il existe une constante $C(L, d)$ (ne dépendant que de L et de d) telle que pour toute application facteur $\pi: (\Omega(X), \mathbb{R}^d) \rightarrow (\Omega(Y), \mathbb{R}^d)$ sur un système de Delone aperiodique,*

- *L'ensemble de Delone Y est linéairement répétitif, et*
- *chaque fibre de π contient au plus C éléments.*

Ainsi tout système de Delone aperiodique facteur d'un ensemble de Delone linéairement répétitif X est lui aussi linéairement répétitif. De plus, chaque application facteur a des fibres de cardinal uniformément borné. Concernant la preuve, le premier point se déduit assez directement des définitions. Quant au second point, il repose sur la propriété de répulsion des occurrences de patches. Si un facteur possède beaucoup de pré-images d'un même point, chacune de ces pré-images définit un R -patch différent en l'origine. Tous ces patches ont donc une occurrence dans une boule de rayon LR de X . Nous obtenons par l'image de π un patch de Y avec des occurrences beaucoup trop proches.

Dans [3], nous en déduisons qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de tels facteurs non conjugués.

Théorème 2.2.4 ([3]) *Soient un réel $L > 1$ et un entier $d \geq 1$. Il existe une constante $N(L, d)$ telle que tout ensemble de Delone $X \subset \mathbb{R}^d$ linéairement répétitif de constante L , a au plus N systèmes de Delone a périodiques, non conjugués, facteurs du système $(\Omega(X), \mathbb{R}^d)$.*

Ce résultat étend aux systèmes de Delone un résultat de [Dur00] pour les sous-shifts linéairement récurrent.

La preuve repose de façon essentielle sur les contraintes de structure hiérarchique d'un ensemble de Delone linéairement répétitif. Pour simplifier, considérons les cas où chaque facteur $\pi: \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$ est localement constant le long de chaque verticale d'une décomposition en boîtes de $\Omega(X) \simeq \varprojlim (B_n, f_n)$. Il s'ensuit que chaque facteur π se factorise en une application $\tilde{\pi}$ d'une variété branchée B_n vers $\Omega(Y)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de variétés branchées non isomorphes, il n'y a qu'un nombre fini d'identification possible des faces d -dimensionnelles de ces variétés branchées par des applications de type $\tilde{\pi}$. Il suffit alors de montrer que des facteurs identifiant les mêmes d -faces d'un variété branchée ont les mêmes fibres impliquant ainsi que les systèmes facteurs sont conjugués. Le cas général se déduit de celui-ci en prouvant qu'une application facteur est une perturbation d'une application localement transversalement constante.

2.2.2 Sur les homéomorphismes de l'enveloppe

Rappelons que deux systèmes de Delone $(\Omega(X), \mathbb{R}^d)$, $(\Omega(Y), \mathbb{R}^d)$ sont dits *orbitalement équivalents* ou *flot-équivalents*, s'il existe un homéomorphisme $F: \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$ tel que pour tout $x \in \Omega(X)$

$$F(\text{Orb}_{\mathbb{R}^d}(x)) = \text{Orb}_{\mathbb{R}^d}(F(x)).$$

Dans le cadre des ensembles de Delone a périodiques, les orbites correspondent aux feuilles de la lamination, c'est-à-dire aux composantes connexes par arc de cet espace. Ainsi tout homéomorphisme envoie une feuille sur une feuille. Dire que deux systèmes de Delone sont flot-équivalents revient donc à dire que leur enveloppe sont homéomorphes. Un invariant naturel de flot-équivalence est alors le groupe des homéomorphismes $\text{Homeo}(\Omega(X))$ de l'enveloppe $\Omega(X)$. Nous nous intéresserons dans cette section à ce groupe et, plus particulièrement à sa composante connexe de l'identité dans le cadre un peu plus général de \mathbb{R}^d -solénoïde Ω . Nous montrons en particulier que ce groupe est simple, *i.e.* il n'admet pas de sous-groupe normal propre non trivial.

Rappelons que le groupe des homéomorphismes $\text{Homeo}(M)$ d'une variété M a déjà bien été étudié. Dans les années 60, Fisher [Fis60] puis Anderson [And62] ont montré que ce groupe est simple lorsque la variété M est compacte sans bord. Un résultat important dans ce domaine est dû à D. Epstein [Eps70] qui a établi une condition suffisante sur un groupe d'homéomorphismes pour que son sous-groupe dérivé (engendré par les commutateurs) soit simple. Ainsi, un groupe vérifiant la condition d'Epstein est simple si et seulement s'il est *parfait* (*i.e.* tout élément du groupe s'écrit comme un produit de commutateurs). Plus tard cette problématique fut étendue aux sous-groupes de difféomorphismes. Mentionnons alors les travaux de Herman [Her73], Thurston [Thu74] et Mather [Mat74] qui ont fourni une classification presque complète des groupes simples de difféomorphismes de variétés. Plus récemment ces problèmes de simplicité, ont été étudiés dans le contexte des feuilletages. Par exemple, étant donné un feuilletage \mathcal{F} d'une variété M , Rybicki [Ryb95] et Tsuboi [Tsu06] ont caractérisé la simplicité et la perfection de la composante connexe de l'identité du groupe des difféomorphismes de M préservant le feuilletage \mathcal{F} . Précisons que ces groupes ne vérifient pas la condition d'Epstein.

Pour donner nos résultats dans ce contexte, nous devons introduire quelques notations. Pour un \mathbb{R}^d -solénoïde Ω , nous désignerons par $D(\Omega)$ le groupe des *déformations*, i.e. la composante connexe par arc de l'identité dans $\text{Homeo}(\Omega)$. En d'autres termes, pour chaque déformation, il existe un chemin continu d'homéomorphismes (pour la topologie C^0) la reliant à l'identité. De façon générale, pour un groupe topologique G nous noterons par G^0 la composante connexe de l'identité dans G .

Dans le cas des systèmes de Delone, certaines subtilités dans les définitions disparaissent puisque la composante connexe de l'identité est le groupe des déformations.

Proposition 2.2.5 ([2]) *Soit Ω un \mathbb{R}^d -solénoïde expansif. Alors $\text{Homeo}^0(\Omega)$ est égal à $D(\Omega)$ et est ouvert dans $\text{Homeo}(\Omega)$.*

Il s'ensuit par le Théorème 2.1.4 que n'importe quel homéomorphisme d'une enveloppe $\Omega(X)$, suffisamment proche de l'identité, est une déformation. De plus, comme l'identité préserve chaque feuille, remarquons que chaque déformation préserve également chaque feuille. Nous noterons alors par $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega)$ le groupe des homéomorphismes de Ω , qui préservent chaque feuille de Ω . Ce phénomène est très différent du cas équicontinue car, dans ce cas, le solénoïde a une structure de groupe topologique abélien où \mathbb{R}^d est sous-groupe dense. Ainsi n'importe quelle translation par un élément x proche de l'élément neutre de Ω , définit un homéomorphisme arbitrairement proche de l'identité. Si x n'est pas dans la feuille de l'élément neutre, cette translation ne préserve aucune feuille.

Un autre sous-groupe apparaissant naturellement dans le cadre des systèmes de Delone est celui des homéomorphismes préservant des verticales.

Définition 2.2.6 *Un homéomorphisme préserve la structure verticale d'un \mathbb{R}^d -solénoïde Ω si, pour tout point $x \in \Omega$ dans une verticale Ξ d'une boîte B , si $f(x)$ appartient à une verticale Ξ_2 d'une boîte B_2 , alors pour tout $y \in \Xi$ suffisamment proche de x , on a $f(y) \in \Xi_2$.*

Par exemple, du fait de la propriété de temps de retour localement constant, chaque homéomorphisme associé à la \mathbb{R}^d -action $x \mapsto x + \vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$, préserve la verticale. Nous noterons par $\text{Homeo}_{pv}(\Omega)$ l'ensemble des homéomorphismes de $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega)$ préservant la verticale. De même $D_{pv}(\Omega)$ désignera la composante connexe par arc de l'identité dans le groupe $\text{Homeo}_{pv}(\Omega)$.

Nous obtenons, dans le cas général le théorème suivant.

Théorème 2.2.7 ([2]) *Soit Ω un \mathbb{R}^d -solénoïde. Notons par G soit le groupe $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega)$ soit le groupe $\text{Homeo}_{pv}(\Omega)$. Alors*

1. $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega)^0 = D(\Omega)$ et $\text{Homeo}_{pv}(\Omega)^0 = D_{pv}(\Omega)$;
2. G^0 est ouvert dans G ;
3. G^0 est simple.

Ce théorème concerne aussi bien les enveloppes d'ensembles de Delone apériodiques que les suspensions de \mathbb{Z}^d -actions équicontinues, distales, ...

La preuve du Théorème 2.2.7 suit la même stratégie que dans [Fis60] pour des variétés triangulées. En utilisant une généralisation du théorème de Schoenflies dû à Edwards et Kirby [EK71], nous montrons que les groupes considérés sont *factorisables* (ou *fragmentables*), i.e tout homéomorphisme se décompose en un produit de déformations à supports arbitrairement petits. Ceci permet de démontrer la Proposition 2.2.5 et les items (1) et (2) du Théorème 2.2.7. Comme le critère d'Epstein ne s'applique pas ici, nous donnons dans [2] une condition suffisante pour qu'un sous-groupe de commutateurs de $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega)$ soit

simple. Nous montrons ensuite que les groupes $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega)^0$ et $\text{Homeo}_{pv}(\Omega)^0$ sont parfaits et vérifient le critère précédent de simplicité.

Dans le cas particulier de la dimension 1, nous montrons en outre que ces groupes sont *uniformément parfaits* : tout élément s'écrit comme un produit de 2 commutateurs [2]. Ce dernier résultat empêche notamment l'existence de quasi-morphisme sur ces groupes.

Du point de vue de la flot équivalence, grâce à un théorème difficile de Ben Ami et Rubin [BAR10], nous obtenons également en corollaire de la preuve du Théorème 2.2.7 que les groupes $D(\Omega)$ et $D_{pv}(\Omega)$ sont des invariants complets de la classe d'équivalence orbitale du système (Ω, \mathbb{R}^d) .

Proposition 2.2.8 ([2]) *Soient Ω_1, Ω_2 deux \mathbb{R}^d -solénoïdes. Pour $i = 1, 2$, désignons par G_i soit le groupe $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega_i)^0$ soit le groupe $\text{Homeo}_{pv}(\Omega_i)^0$.*

- i) Si Ω_1 et Ω_2 sont homéomorphes, alors les groupes $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega_1)^0$ et $\text{Homeo}_{\mathcal{L}}(\Omega_2)^0$ sont isomorphes.*
- ii) Réciproquement pour tout isomorphisme $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$, il existe un homéomorphisme $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tel que $\varphi(g) = h \circ g \circ h^{-1}$ pour tout $g \in G_1$.*

Cette propriété montre ainsi que l'on peut interpréter chaque invariant de flot-équivalence en des termes algébriques. Par exemple, il est montré dans [Jul12] que les croissances asymptotiques des fonctions complexité et répétitivité sont des invariants de flot-équivalence. Il reste à interpréter ces croissances de façon algébrique sur le groupe des homéomorphismes de l'enveloppe.

2.3 Ensembles de Delone hyperboliques

Dans cette section, nous nous intéresserons aux ensembles de Delone X de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 qui sont de type fini pour le groupe affine $GA = \{z \mapsto az + b; a > 0, b \in \mathbb{R}\}$

2.3.1 Exemples

Dans l'article [Pen80], Penrose rappelle les principales propriétés de son célèbre pavage éponyme, et donne en plus un exemple de pavage de \mathbb{H}^2 de GA -type fini (voir figure 2.1).

Il considère le polygone convexe P_a de sommets, les points A_n d'affixe $a(p-1)/2 + i$ pour $1 \leq n \leq 3$, A_4 d'affixe dans le plan complexe \mathbb{C} , $2i + a$ et $A_5 : 2i$, pour un paramètre $a > 0$ fixé. Le polygone P_a possède ainsi 5 arêtes géodésiques. Considérons les isométries

$$R: z \mapsto 2z \text{ et } S: z \mapsto z + a.$$

Le pavage hyperbolique de Penrose est alors défini par $\mathcal{P}_a = \{R^k \circ S^n P_a; n, k \in \mathbb{Z}\}$ (voir figure 2.1). Penrose montre dans [Pen80] qu'il est *faiblement apériodique* dans le sens où, aucun groupe cocompact Γ d'isométries de \mathbb{H}^2 ne préserve ce pavage. L'argument homologique de Penrose est le suivant : si cela était le cas, le pavé P_a pourrait paver la surface compacte \mathbb{H}^2/Γ . Mettons une charge positive sur les arêtes A_4A_5 et une charge négative sur chaque arête A_1A_2 et A_2A_3 . Comme une arête de type A_4A_5 ne peut rencontrer qu'une arête de type A_1A_2 ou A_2A_3 , la surface compacte \mathbb{H}^2/Γ possède une charge globale nulle. Pourtant chaque pavé P_a a une charge négative et la surface doit avoir une charge globale strictement négative.

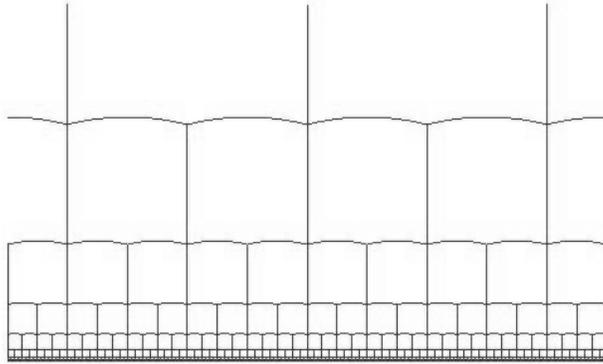


FIGURE 2.1 – Le pavage hyperbolique de Penrose

L'argument homologique de Penrose a été généralisé de différentes manières, notamment dans [BW92] pour d'autres espaces non moyennables. De façon plus géométrique, G. Margulis et S. Mozes font remarquer dans [MM98] que la formule de Gauss-Bonnet implique que l'aire d'une surface hyperbolique de courbure constante égale à -1 , est un multiple entier de π . Comme l'aire de P_a , qui ne dépend que de ses angles, varie continûment avec le paramètre a , le pavé P_a a une aire non rationnellement liée avec π pour un nombre indénombrable de paramètres a . Il ne peut donc pas paver une surface compacte.

Le pavage de la figure 2.1 n'est donc pas stable pour un réseau cocompact, cependant on peut montrer que son stabilisateur est le groupe $\langle R \rangle$ engendré par la transformation R . Cette isométrie préserve une géodésique verticale (dans le modèle du demi-plan supérieur). En décorant les pavés le long de cette géodésique de façon à casser cette symétrie, nous construisons un pavage non périodique. Dans [GS05], Goodman-Strauss utilise cette idée. Il code la dynamique d'une application de l'intervalle sans point périodique, puis il décore les pavés P_a selon ce codage de façon à ce que la décoration des pavés le long d'une géodésique verticale code la dynamique de l'application. Les pavages obtenus avec ces pavés ne sont invariants par aucune isométrie [GS05]. Ils sont donc totalement apériodiques (voir section 2.1.1). Pour des groupes de Lie semi-simples de rang supérieur à 3, Mozes construit dans [Moz97] une famille finie de pavés ne pouvant engendrer que des pavages totalement apériodiques. Pour être plus complet sur ce thème, ajoutons qu'un résultat récent de Aubrun, Barbieri et Thomassé [ABT15] démontrent que n'importe quel groupe dénombrable admet un pavage totalement apériodique.

Mentionnons également qu'il est possible de construire des ensembles de Delone hyperboliques de type fini par la méthode de coupé-projection. En effet, il suffit pour cela de considérer l'espace produit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ muni de la distance produit. Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit isométriquement sur l'espace produit. Considérons alors un sous-groupe discret Γ , cocompact et *irréductible* : *i.e.* tel que les groupes $\Gamma \cap (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \{\mathrm{Id}\})$ et $\Gamma \cap (\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ n'engendrent pas un sous-groupe d'indice fini dans Γ . Notons par π_1, π_2 les projections $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ sur, respectivement, les premières et secondes coordonnées. Pour une origine

$x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ fixée, soit $B \subset \mathbb{H}^2$ la boule centrée en $\pi_2(x)$ de rayon supérieur au diamètre d'un domaine fondamental de Γ , nous considérons alors l'ensemble

$$X = \pi_1\{\gamma(x); \gamma \in \Gamma, \pi_2(\gamma(x)) \in B\} \subset \mathbb{H}^2.$$

Comme le groupe Γ est cocompact, il est finiment engendré et l'ensemble X est uniformément discret. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de R -patches à isométrie près. Le choix de la fenêtre B assure que X est relativement dense. Ainsi X forme un ensemble de Delone.

Malheureusement, même si les résultats de théorie des groupes nous assure l'existence de réseaux Γ cocompacts et irréductibles, il est difficile d'en construire un de façon effective pour en faire un dessin explicite. Si l'on relaxe l'hypothèse de cocompacité par celle de covolume fini ($\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 / \Gamma$ a un volume fini pour la mesure de Haar invariante à droite), il est plus simple d'en décrire un. Par exemple, considérons l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, ou $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pour un entier d différent d'un carré. Il admet deux plongements dans \mathbb{R} définis par $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mapsto a \pm b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Ceux-ci s'étendent en deux plongements denses du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Le produit de ces deux plongements donne alors un plongement de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dont l'image est un sous-groupe discret de covolume fini et irréductible [Mar91, Zim84]. Il est possible de réaliser des plongements similaires à partir de corps de nombres quaternioniques pour obtenir des groupes cocompacts irréductibles [MR03].

L'ensemble de Delone obtenu par cette méthode de coupé-projection n'est pas nécessairement totalement apériodique. Il faut alors modifier les patches en les décorant. Une façon de l'obtenir est de considérer un sous-shift $X \subset \Sigma^\Gamma$ sur un alphabet fini Σ , dont l'action du shift est libre (voir section 1.2.2 pour des exemples) et de considérer l'action diagonale de Γ sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times X$.

Remarquons qu'il est également possible de faire de même sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{Q}_p$ où \mathbb{Q}_p désigne l'ensemble des entiers p -adique pour un nombre premier p avec le groupe d'isométries $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Nous utilisons une technique similaire dans la section 2.3.3.

2.3.2 Mesures invariantes et mesures harmoniques

À la différence du contexte euclidien, nous verrons qu'il n'est pas possible de définir de fréquence d'apparition d'un motif pour un ensemble de Delone X de GA type fini.

Ainsi, dans le contexte euclidien, pour un système de Delone $(\Omega(Y), \mathbb{R}^d)$ uniquement ergodique, *i.e.* admettant une unique mesure de probabilité μ invariante par la \mathbb{R}^d action (c'est le cas pour un ensemble de Delone substitutif), le théorème ergodique de Birkhoff assure que la limite suivante existe

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R(0))} \int_{B_R(0)} f(Y + \vec{v}) d\mathrm{Leb}(\vec{v}) = \int_{\Omega(Y)} f(x) d\mu(x),$$

pour toute fonction intégrable $f: \Omega(Y) \rightarrow \mathbb{R}$, où Leb désigne la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d . En prenant comme fonction f , la fonction indicatrice d'une boîte associée à un R_p -patch P centré en l'origine (cf section 2.1.2), nous obtenons en divisant la limite précédente par le volume de $\mathrm{conv} P$, que la limite suivante existe

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R(0))} \mathrm{card} \{\vec{v} \in B_R(0); (Y + \vec{v}) \cap B_{R_p}(0) = P\};$$

ou, autrement dit, que le patch P apparaît dans Y avec une certaine fréquence. Cette limite correspond en fait, avec les notations de la section 2.1.2, à la valeur $\nu(\Xi_P)$ pour une certaine

mesure ν sur la transversale Ξ obtenue comme limite $\mu(i_{\mathbb{P}}(B_{\epsilon}(0) \times \Xi_{\mathbb{P}}))/\text{vol}(B_{\epsilon}(0))$ lorsque ϵ tend vers 0 [BBG06]. Géométriquement cette mesure correspond à une *mesure transverse invariante*.

Définition 2.3.1 Une mesure transverse invariante ν pour une \mathbb{G} -lamination est la donnée d'une mesure positive ν_i sur chaque espace transverse Ξ_i de la lamination, de sorte que si $B \subset \Xi_i$ est un borélien contenu dans le domaine de définition de $f_{i,j}$, alors $\mu_i(B) = \mu_j(f_{i,j}(B))$.

L'hypothèse de l'existence d'une telle mesure est une hypothèse forte.

Proposition 2.3.2 ([13]) Un GA -solénoïde n'admet pas de mesure transverse invariante.

Ceci provient essentiellement du fait que le groupe GA n'est pas *unimodulaire*, i.e. il admet une mesure de Haar invariante par multiplication à gauche λ_L qui est différente de la mesure de Haar invariante par multiplication à droite λ_R , ou plus précisément, λ_L n'est pas invariante par la multiplication à droite. Ainsi, étant donnée une mesure transverse invariante $\{\nu_i\}$, il est possible de construire une mesure finie sur le solénoïde qui localement est le produit de ν_i par λ_L . Nous obtenons alors une contradiction en étudiant l'image de cette mesure par la GA -action par multiplication à droite. La propriété 2.3.2 peut s'étendre aisément à n'importe quelle lamination dont les feuilles sont isométriques à un groupe de Lie non unimodulaire.

Pour passer outre ce problème et étudier les fréquences d'apparition des motifs, nous devons passer par une autre notion géométrique de mesure : les *mesures harmoniques*. Pour cela, nous sommes amenés à introduire les formes différentielles sur un \mathbb{G} -solénoïde Ω , ou plus généralement sur une lamination [CGSY99, chapitre 2].

Dans une boîte homéomorphe à $V \times \Xi$, nous appellerons *k-forme différentielle*, $k = 0, 1, 2$, une famille de k -formes différentielles réelles (de classe C^∞) dans les plaques $V \times \{\xi\}$ qui dépend continûment du paramètre ξ pour la topologie C^∞ . Une k -forme sur Ω est alors donnée par des k -formes différentielles dans chaque boîte compatible sur les intersections, dans un sens évident. L'espace $A^k(\Omega)$ désignera l'espace vectoriel topologique des k -formes sur Ω . L'opérateur de différentiation le long des feuilles définit un opérateur $d: A^k(\Omega) \rightarrow A^{k+1}(\Omega)$.

Les *cycles feuilletés*, introduits par Sullivan [Sul76], sont des formes linéaires continues $A^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positives sur les formes strictement positives et qui s'annulent sur les formes exactes. Un résultat important de [Sul76] est que les cycles feuilletés correspondent aux mesures transverses invariantes. Ainsi, une autre formulation de la proposition 2.3.2 est : un GA -solénoïde n'admet pas de cycle feuilleté.

Nous sommes alors amenés à étudier la notion plus générale de *courant harmonique* introduit par Garnett dans [Gar83]. L'opérateur laplacien le long des feuilles Δ donne un opérateur réel $A^0(\Omega) \rightarrow A^2(\Omega)$ dont l'image $\text{Im}\Delta$ est inclu dans l'ensemble des formes exactes. Un *courant harmonique* est une forme linéaire continue $A^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive sur les formes strictement positives et nulles sur $\text{Im}\Delta$. Les cycles feuilletés sont donc des exemples de courants harmoniques mais n'importe quelle lamination, en particulier n'importe quel \mathbb{G} -solénoïde, admet un courant harmonique [Gar83, Can03].

Comme pour les cycles feuilletés, en identifiant l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ et $A^2(\Omega)$ par le choix d'une métrique le long des feuilles, il est possible d'associer à un courant harmonique une mesure positive et finie sur Ω . Ces mesures, appelées *mesures harmoniques*, sont alors caractérisées de la façon suivante : pour n'importe quelle fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée et lisse le long des feuilles, l'intégrale $\int \Delta f d\mu = 0$ † si et seulement si la mesure μ est

†. où Δ désigne le laplacien le long des feuilles pour la métrique choisie

harmonique [Gar83, Can03].

Une telle mesure se désintègre localement, au travers des cartes, dans $V \times \Xi$ en le produit d'une mesure ν sur l'espace transverse Ξ par une mesure μ_ξ harmonique définie sur ν -presque toutes les plaques $V \times \{\xi\}$. Il se trouve que chaque mesure μ_ξ est absolument continue par rapport à la mesure de Riemann dz le long des feuilles et dont la densité $z \mapsto f(z, \xi)$ est, pour ν -presque tout ξ , une fonction harmonique positive. Ainsi pour tout borélien $B \subset V \times \Xi$, la mesure de B s'écrit

$$\iint_B f(z, \xi) dz d\nu(\xi).$$

Bien que cette décomposition ne soit pas unique, la fonction $\phi_\mu: z \mapsto \int f(z, \xi) d\nu(\xi)$ est intrinsèque à la mesure harmonique.

Les feuilles d'un \mathbb{G} -solénoïde étant simplement connexes, il est possible, en recollant les fonctions harmoniques $f(z, \xi)$ définies sur chaque plaque, de définir une fonction globale $f: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ harmonique. Dans le cas d'un \mathbb{R}^2 -solénoïde, comme il n'existe pas de fonction harmonique positive non constante sur le plan, chaque densité locale f est constante. Ainsi chaque mesure harmonique se désintègre en un produit d'une mesure ν sur la transversale par la mesure de Riemann et ν définit une mesure transverse invariante.

Garnett donne également dans [Gar83] un théorème ergodique remarquable associé aux mesures harmoniques. Pour cela, il est nécessaire de considérer pour x un point base d'une lamination Ω , la *mesure de Wiener* \mathbb{P}_x sur l'ensemble des chemins continus $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ tels que $\gamma(0) = x$. Cette mesure est obtenue par la théorie du mouvement brownien en utilisant le noyau de la chaleur.

Théorème 2.3.3 ([Gar83]) *Soit μ une mesure harmonique d'une lamination Ω . Pour n'importe quelle fonction bornée $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la limite $\ell(x, \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(i))$ existe pour μ -presque tout point $x \in \Omega$ et \mathbb{P}_x -presque tout chemin γ . Cette limite est constante le long des feuilles de Ω et $\ell(x, \gamma)$ est constante pour \mathbb{P}_x -presque tout chemin γ . De plus $\int \ell(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$.*

De la même façon que pour les mesures invariantes, on pourra parler de mesure harmonique *ergodique* si la mesure de tout borélien saturé de feuilles est de mesure nulle ou totale. Ainsi dans le cas d'enveloppe d'un ensemble de Delone de GA -type fini totalement apériodique, nous pourrions parler de fréquence de passage dans un motif le long d'un chemin brownien pour une mesure harmonique ergodique.

Théorème 2.3.4 ([13]) *Une mesure finie sur un GA -solénoïde est harmonique si et seulement si elle est invariante par l'action du groupe affine.*

La preuve vient essentiellement du fait bien connu suivant : en notant λ_L la mesure de Haar sur GA invariante par multiplication à gauche et $R_g * \lambda_L$ la mesure image de λ par la multiplication à droite par g , la fonction $\varphi: g \mapsto d\lambda/dR_g * \lambda$ est une fonction harmonique *minimale*, i.e. toute fonction harmonique positive dont le rapport avec φ est bornée, est proportionnelle à φ . Ainsi, pour $g_*\mu$ la mesure image d'une mesure harmonique μ par l'action de $g \in GA$, un calcul direct nous permet de conclure que l'intégrale $\int f dg_*\mu$ est indépendante de g pour toute fonction test f .

Ce résultat peut être étendu au cas des laminations définies par des actions localement libres du groupe affine. Par exemple, pour une lamination \mathcal{L} par surfaces hyperboliques, son fibré unitaire tangent $T^1\mathcal{L}$ hérite également d'une structure de lamination. Cette lamination $T^1\mathcal{L}$ est, de plus, munie de l'action des flots géodésique et horocyclique stable (le long des

feuilles). Ces deux flots conjoints engendrent une action continue du groupe affine GA . La même preuve du Théorème 2.3.4 donne que les mesures harmoniques de cette lamination sont invariantes par l'action conjointe des flots géodésique et horocyclique. Il est possible alors de montrer que ces mesures se projettent de façon surjective en des mesures harmoniques sur \mathcal{L} . Ceci est fait dans [Mar06, BM08].

En utilisant de plus la structure de limite projective $\varprojlim_n (B_n, f_n)$ de variétés branchées d'un GA -solénoïde, nous obtenons la caractérisation suivante :

Théorème 2.3.5 ([13]) *Il existe une suite de morphismes linéaires $(A_n)_{n \geq 0}$ tel que l'ensemble des mesures harmoniques est isomorphe à la limite projective de cônes dans l'espace des 2-chaînes des variétés branchées $\varprojlim_n (C_2(B_n, \mathbb{R})^+, A_n)$.*

Une caractérisation similaire est donnée pour les mesures transverses invariantes de \mathbb{G} -solénoïde pour \mathbb{G} unimodulaire dans [BG03]. La différence est qu'il n'y a pas ici de mesure transverse invariante. Le Théorème 2.3.4 nous permet de décrire la forme des fonctions locales ϕ_μ , pour une mesure harmonique μ . Ce sont des fonctions harmoniques minimales. La caractérisation s'obtient alors en considérant la suite des intégrales $\int_V \phi_\mu(z) dz$ pour des boîtes de la forme $V \times \Xi$.

Nous obtenons en corollaire que le nombre de mesures de probabilité harmoniques et ergodiques est borné par le nombre maximal de faces des variétés branchées. Grâce à cela nous donnons des exemples explicites avec un nombre arbitraire de mesures harmoniques.

Théorème 2.3.6 ([13]) *Pour tout entier $r \geq 1$, il existe un ensemble de Delone $X \subset \mathbb{H}^2$ de GA -type fini, totalement apériodique et répétitif, dont l'enveloppe $\Omega(X)$ a exactement r mesures de probabilité harmoniques ergodiques.*

La réalisation de ces exemples est, par essence, similaire à celle du Théorème 1.2.4. Ce résultat illustre la grande variété de dynamique que l'on peut obtenir à l'aide des ensembles de Delone. À l'opposé, si l'on considère des laminations hyperboliques dont la dynamique transverse est conforme, il y a, dans le cas minimal, une unique mesure harmonique [DK07]. Par la suite, ces exemples de laminations minimales non uniquement ergodiques ont été étendus au cas de feuilletages lisses d'une variété de dimension 5 dans [Der09] et dans le cas de la codimension 1 dans [DV11].

2.3.3 C^* -algèbres

La géométrie non-commutative des systèmes de Delone étudie les C^* -algèbres de leur enveloppe. Le lecteur pourra consulter [Ren80, Ren09] pour des introductions lumineuses sur les C^* -algèbres associées aux systèmes dynamiques. Une telle C^* -algèbre permet alors de donner des invariants topologiques et géométriques de la lamination. De plus, certains invariants K -théoriques de systèmes de Delone euclidiens ont une interprétation physique. En particulier lorsque l'on modélise un quasi-cristal par un ensemble de Delone, l'image de la K -théorie de l'enveloppe par la trace canonique indice les trous dans le spectre de l'opérateur de Schrödinger associé au quasi-cristal [Bel92].

Pour un ensemble de Delone euclidien, les traces de la C^* -algèbre sont en bijection avec les mesures transverses invariantes de l'enveloppe [BBG06]. Ces algèbres ont été depuis bien étudiées et ont conduit à diverses preuves de la conjecture du *gap-labelling* [BBG06, BOO03, KP03] : pour une action de \mathbb{R}^d minimale, l'image de la K -théorie par une trace est le sous-groupe dénombrable de \mathbb{R} engendré par les mesures de clopens (ensembles ouverts et fermés) de la transversale canonique pour une mesure transversalement invariante.

La situation est différente lorsque que l'ensemble de Delone est hyperbolique de GA -type fini, puisqu'il n'existe pas de mesure transversalement invariante (Proposition 2.3.2). Ainsi, la C^* -algèbre ne possède pas de trace. Cependant chaque mesure harmonique (ou GA -invariante par le Théorème 2.3.4) donne un cocycle 3-cyclique ([ENN88]) sur la C^* -algèbre du système. Avec Oyono-Oyono, nous avons étudié dans [12] ces C^* -algèbres pour une famille spécifique d'exemples. Nous en donnons une description explicite et nous calculons leur K -théorie ainsi que leur cohomologie de Čech.

La famille d'exemples est obtenue en décorant les pavés du pavage hyperbolique donné par Penrose dans [Pen80] (voir section 2.3.1). Ainsi pour le pavé P_1 défini dans la section 2.3.1 et un entier $i \in \{1, \dots, r\}$, $r \geq 1$, nous noterons par $P^{(i)}$ un ensemble de $i + 5$ points, dont 5 points sont aux sommets du pavé P_1 et i points (la *décoration*) sont à l'intérieur d'une boule de rayon $1/6$ centrée au barycentre du pavé P_1 . Cette décoration est faite de sorte que, pour n'importe quel pavage fait de translatés (pour le groupe affine) de P_1 et pour tout choix de décoration i pour chaque pavé, correspond un unique ensemble de Delone union des translatés des $P^{(i)}$.[§]

Pour une suite $w = (w_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \{1, \dots, r\}^{\mathbb{Z}}$, l'ensemble de Delone de GA -type fini $\mathcal{P}(w)$ est défini par $\mathcal{P}(w) = \{R^p \circ S^n(P^{(w-q)}), n, q \in \mathbb{Z}\}$, avec les notations de la section 2.3.1. Son stabilisateur est un sous-groupe de $\langle R \rangle$. Désignons par $Z_w = \{\sigma^n(w), n \in \mathbb{Z}\}$ le sous-shift engendré par w . Il est assez simple de vérifier que l'ensemble de Delone $\mathcal{P}(w)$ est totalement apériodique si la suite w est non périodique pour le shift et qu'il est répétitif si et seulement si le système (Z_w, σ) est minimal.

L'enveloppe $\Omega(\mathcal{P}(w))$ de l'ensemble de Delone $\mathcal{P}(w)$ a une structure de suspension. Pour voir cela, considérons $GA(\mathbb{Z}[1/2])$ le groupe des transformations affines $a_{n,b}: z \mapsto 2^n z + b$ où $n \in \mathbb{Z}$ et b est un rationnel de la forme $p/2^q$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Ce groupe agit naturellement à gauche sur le produit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{Q}_2$ où \mathbb{Q}_2 désigne l'ensemble des rationnels 2-adiques. Il agit également sur Z_w par $a_{n,b}.w' = \sigma^{-n}(w')$. Le produit de ces deux actions donne une action à gauche de $GA(\mathbb{Z}[1/2])$ sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{Q}_2 \times Z_w$ qui est continue propre et sans point fixe. L'enveloppe $\Omega(\mathcal{P}(w))$ est alors conjuguée au quotient de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{Q}_2 \times Z_w$ par cette action. En décomposant encore plus cette suspension, il est possible de la décrire en termes de double suspension (suspension de suspension). Ceci nous permet dans [12] d'expliciter sa C^* -algèbre à partir de celle donnée par Z_w .

Ainsi si $C(Z_w, A)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur Z_w à valeurs dans l'anneau A , nous noterons les groupes quotients par

$$\begin{aligned} \text{inv } C(Z_w, \mathbb{Z}) &= C(Z_w, \mathbb{Z}) / \langle f = f \circ \sigma; f \in C(Z_w, \mathbb{Z}) \rangle, \\ \text{coinv } C(Z_w, \mathbb{Z}) &= C(Z_w, \mathbb{Z}) / \langle f - f \circ \sigma^{-1}; f \in C(Z_w, \mathbb{Z}) \rangle, \\ \text{coinv } C(Z_w, \mathbb{Z}[1/2]) &= C(Z_w, \mathbb{Z}[1/2]) / \langle f - 2f \circ \sigma^{-1}; f \in C(Z_w, \mathbb{Z}[1/2]) \rangle. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.7 ([12]) *Nous avons les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned} K^0(\Omega(\mathcal{P}(w))) &\simeq \text{inv } C(Z_w, \mathbb{Z}) \oplus \text{coinv } C(Z_w, \mathbb{Z}[1/2]), \text{ et} \\ K^1(\Omega(\mathcal{P}(w))) &\simeq \text{coinv } C(Z_w, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

[§]. Dans [12] nous considérons la décoration d'un pavage. Le choix de la décoration est fait ici pour se placer dans le contexte équivalent d'ensemble de Delone.

Concernant la cohomologie de Čech à coefficients entiers, nous avons

$$\begin{aligned}\check{H}^0(\Omega(\mathcal{P}(w)), \mathbb{Z}) &\simeq \text{inv } C(Z_w, \mathbb{Z}), \\ \check{H}^1(\Omega(\mathcal{P}(w)), \mathbb{Z}) &\simeq \text{coinv } C(Z_w, \mathbb{Z}), \\ \check{H}^2(\Omega(\mathcal{P}(w)), \mathbb{Z}) &\simeq \text{coinv } C(Z_w, \mathbb{Z}[1/2]).\end{aligned}$$

Le lecteur remarquera que ces invariants topologiques sont similaires aux groupes de dimension de la dynamique sur la transversale (cf section 1.1.4). Ajoutons que les isomorphismes sont décrits de façon explicite dans [12].

Chapitre 3

Modèle de Frenkel-Kontorova associé à un quasi-cristal

Introduction

Le modèle de Frenkel-Kontorova (FK) [BK04, FBGG05] décrit comment une chaîne infinie d'atomes "minimise l'énergie totale d'un système" lorsque cette énergie prend en compte les interactions entre les proches voisins et un environnement extérieur. Les configurations sont modélisées par une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^d$ où x_n représente la position de l'atome indicé par n . Une configuration $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite *minimisante* pour une *énergie d'interaction* $E: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ si l'énergie de chaque segment $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ ne peut être abaissée en changeant la configuration à l'intérieur du segment sans changer les deux points du bord. Plus formellement, en notant

$$E(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) := \sum_{k=m}^{n-1} E(x_k, x_{k+1}),$$

une configuration $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite minimisante si pour tous les entiers $m < n$ et pour tous les points $y_m, y_{m+1}, \dots, y_n \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $y_m = x_m$ et $y_n = x_n$, nous avons

$$E(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq E(y_m, y_{m+1}, \dots, y_n).$$

En dimension $d = 1$, un exemple classique d'énergie d'interaction E est de la forme $E(x, y) = V(x) + U(y - x)$ où $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est potentiel 1-*périodique* ($V(x + 1) = V(x)$ pour tout réel x) représentant l'interaction avec un environnement à structure périodique, et $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ représentant l'interaction entre les atomes. En particulier, le modèle original de Frenkel-Kontorova [FK38] considère l'énergie d'interaction $E(x, y) = 1/2(1 - \cos(\pi x)) + 1/2C(y - x - \mu)^2$, pour des paramètres C et μ . Les hypothèses suivantes sur les potentiels sont dites *classiques* et étendent le modèle original :

- *régularité* : U et $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^2 ;
- *twist*, ou *stricte convexité* : $U''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- *super-linéarité* : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{U(x)}{|x|} = +\infty$.

Il est alors simple de montrer que des configurations minimisantes existent dans ce contexte et que l'ensemble de ces configurations est fermé pour la topologie produit sur

$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Ces configurations ont été initialement décrites par S. Aubry -P.Y Le Daeron [ALD83]. Leurs travaux précurseurs ainsi que ceux, indépendants, de J. Mather [Mat82, Mat91] et de nombreux autres (voir les survols [MF94, CI99, Fatar]), ont débouchés à la *théorie d'Aubry-Mather* qui donne une assez bonne compréhension de ces configurations minimisantes. Ajoutons que les propriétés du modèle FK ont été étendues aux dimensions supérieures par E. Garibaldi et P. Thieullen dans [GT11].

À la vue de ces résultats et de ceux sur les ensembles de Delone, il est naturel d'espérer pouvoir comprendre également les propriétés des configurations minimisantes dans un contexte quasi-périodique. À notre connaissance, ce problème fut initialement étudié dans [vE99]. La première section de ce chapitre concerne quelques propriétés de ces configurations dans le cas de la dimension 1, sous des hypothèses classiques, et avec un potentiel V équivariant relativement à un quasi-cristal. La seconde section traite d'une énergie d'interaction presque périodique en dimension quelconque. Cela revient à considérer une famille d'énergies stationnaire par rapport à un système dynamique minimal. Ce contexte englobe celui de la première section.

3.1 FK associé à un quasi-cristal de dimension un

Pour une énergie de la forme $E(x, y) = V(x) + U(y - x)$ où $U, V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfont les hypothèses classiques et V est périodique, Aubry et Le Daeron, montrent dans [ALD83], que chaque configuration minimisante $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ admet un *nombre de rotation* ρ , *i.e.* la limite suivante existe :

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x_n}{n} = \rho \geq 0.$$

Remarquons que l'inverse de cette limite peut s'interpréter en termes de densité de particules de la configuration minimisante. Aubry et Le Daeron montrent également que le nombre de rotation ρ dépend continûment de la configuration minimisante $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (pour la topologie produit). De plus, ces nombres de rotations ne possèdent aucune propriété arithmétique particulière puisque tout réel positif est le nombre de rotation d'une configuration minimisante. Ce dernier point implique aussi qu'il existe un nombre indénombrable de configurations minimisantes. Précisons qu'Aubry et Le Daeron démontrent, en fait, des résultats beaucoup plus précis concernant la combinatoire de ces configurations. Nous nous restreindrons cependant à leurs derniers résultats mentionnés.

Avec J.M. Gambaudo et P. Guiraud [10], nous étendons ces résultats au contexte d'un potentiel V quasi-périodique associé à un *quasi-cristal* $X \subset \mathbb{R}$. Pour la suite, nous dirons que $X \subset \mathbb{R}$ est un quasi-cristal si

1. X est un ensemble de Delone de \mathbb{R} -type fini (voir section 2.1.1) ;
2. X est répétitif (voir proposition 2.1.2) ;
3. Pour tout R -patch P de X et tout réel $x \in \mathbb{R}$, la limite suivante existe

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}\{v \in [x - M, x + M]; v \text{ est une occurrence de } P\}}{2M} = \nu(P) > 0,$$

uniformément et indépendamment de x .

Rappelons que la condition (2), par la proposition 2.1.2, est équivalente à la minimalité de la \mathbb{R} -action sur l'enveloppe de X . La condition (3) est équivalente à l'unique ergodicité de cette dernière action (voir la section 2.3.2). Par exemple, les ensembles de Delone linéairement répétitifs forment des quasi-cristaux (voir la section 2.2.1).

Pour un quasi-cristal fixé X , nous considérerons des fonctions *fortement X -équivariantes* (ou *strongly equivariant functions*) dans le sens de [Kel03]. Un potentiel $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dit fortement X -équivariant s'il existe une constante $R_V > 0$ telle que

$$V(x) = V(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (B_{R_V}(x) \cap X) - x = (B_{R_V}(y) \cap X) - y.$$

Ainsi, si x et y sont deux occurrences d'un même R_V -patch, la valeur du potentiel est la même en ces deux points.

Bien évidemment un potentiel périodique est fortement équivariant pour un quasi-cristal périodique. De façon général, si $\delta := \sum_{x \in X} \delta_x$ désigne la mesure de Radon associée à un quasi-cristal X , et si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse (resp. C^p) à support compact. Il est alors simple de vérifier que la convolution $g * \delta$ donne une fonction fortement équivariante lisse (resp. C^p). Il est simple également de voir que toute fonction fortement équivariante s'étend de façon unique en une fonction continue sur l'enveloppe de X , $\hat{V}: \Omega(X) \rightarrow \mathbb{R}$ [10, Kel03]. Cette fonction vérifie $\hat{V}(X - t) = V(t)$ pour tout réel t et \hat{V} est localement constante sur les verticales Ξ (cf section 2.1.2). L'enveloppe est alors un espace similaire au cercle dans le cas périodique.

Dans ce contexte, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 ([10]) *Pour un quasi-cristal X , un potentiel $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 fortement X -équivariant et une fonction $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 , super-linéaire et strictement convexe, nous avons*

i) toute configuration minimisante $(x_n)_n$ admet un nombre de rotation

$$\rho((x_n)_n) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x_n}{n}.$$

ii) La fonction nombre de rotation $(x_n)_n \mapsto \rho((x_n)_n)$ est continue pour la topologie produit.

iii) Tout nombre $\rho \geq 0$ est le nombre de rotation d'une configuration minimisante.

La stratégie de la preuve d'Aubry et Le Daeron dans le cas périodique [ALD83] consiste à montrer que les configurations minimisantes ont une combinatoire particulière : si on projette une telle configuration $(x_n)_n$ sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} , il existe un homéomorphisme f du cercle, préservant l'orientation tel que $f(x_n \bmod \mathbb{Z}) = x_{n+1} \bmod \mathbb{Z}$, pour tout entier n . Ainsi, une telle configuration admet un nombre de rotation. Cette propriété combinatoire remarquable repose sur le fameux *lemme de croisement d'Aubry* qui utilise fortement la condition twist.

Nous suivons une stratégie similaire dans le cas quasi-périodique [10], où nous montrons qu'une configuration minimisante admet une combinatoire particulière. Plus précisément, si $x, y \in \mathbb{R}$ sont deux occurrences d'un même R' -patch de X ($(B_{R'}(x) \cap X) - x = (B_{R'}(y) \cap X) - y$, $R' \geq R_V$), alors

$$|\text{card}(\{x_n\}_n \cap B_{R'}(x)) - \text{card}(\{x_n\}_n \cap B_{R'}(y))| \leq 3.$$

Grâce à cette propriété et à la fréquence uniforme des occurrences des patches de X (condition (3)), nous obtenons l'existence des nombres de rotation et leur continuité. Si l'hypothèse d'unique ergodicité était enlevée, nous obtiendrions que la suite $(x_n/n)_n$ admet plusieurs valeurs d'adhérences.

Remarquons que cette condition combinatoire est un peu plus faible que dans le cas périodique puisqu'elle n'implique pas que chaque configuration minimisante est l'orbite d'un homéomorphisme de l'enveloppe $\Omega(X)$.

Pour construire des configurations minimisantes avec un nombre de rotation prescrit, nous considérons des configurations finies qui minimisent l'énergie totale sur un motif avec un nombre bien choisi d'atomes. Une limite de ces configurations, en prenant des motifs de plus en plus grands, nous donne une configuration minimisante adéquate.

Pour conclure cette section, ajoutons qu'il existe un point de vue plus dynamique des configurations minimisantes. En remarquant qu'un minimum est un point critique, nous obtenons des équations d'Euler-Lagrange discrètes : pour toute configuration minimisante $(x_n)_n$ et pour tout entier n ,

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x_{n-1}, x_n) + \frac{\partial E}{\partial x}(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Ce qui se traduit, sous les hypothèses standard, par

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - V'(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - (U')^{-1}(p_n - V'(x_n)), \end{cases}$$

en posant $p_n = x_{n+1} - x_n$. En conséquence, toute configuration minimisante est une orbite d'un homéomorphisme Φ de \mathbb{R}^2 appelé *application standard* (ou *standard map*) qui possède de nombreuses propriétés. Dans le cas périodique, cet homéomorphisme se projette en un homéomorphisme sur le fibré tangent du cercle $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Dans le cas quasi-périodique, il s'étend en un homéomorphisme du fibré tangent de l'enveloppe $\Omega(X) \times \mathbb{R}$. Il est alors naturel de se demander si les propriétés classiques des homéomorphismes de l'anneau s'étendent dans le contexte quasi-périodique. Une première étude de base a été effectuée dans [AP10].

3.2 FK multidimensionnel et stationnaire

Nous étendons le modèle de FK quasi-périodique à un contexte plus général dans [11] avec, cette fois, une approche lagrangienne plus proche du point de vue de Mather. Afin de simplifier la présentation, nous ne donnerons pas ici les hypothèses les plus faibles pour les résultats et nous en référons à [11] pour le lecteur intéressé.

Nous considérons une famille d'énergie d'interaction en dimension supérieure $d \geq 1$ $E_\omega : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, dépendant d'un environnement ω . Nous supposons de plus, que la famille de tous les environnements forme un espace métrique compact Ω muni d'une \mathbb{R}^d -action continue $\tau : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \Omega$, telle que le système dynamique $(\Omega, \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}^d})$ soit minimal. Nous nous intéressons aux familles d'énergies $\{E_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ possédant *une forme lagrangienne*, i.e. dont il existe une fonction continue $L : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, appelée *lagrangien*, telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, E_\omega(x, y) = L(\tau_x(\omega), y - x).$$

Le triplet $(\Omega, \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}^d}, L)$ est appelé *modèle d'interaction presque périodique**.

Définition 3.2.1 *Soit $(\Omega, \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}^d}, L)$ un modèle d'interaction presque périodique. Le lagrangien L est dit super-linéaire si*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\omega \in \Omega} \inf_{\|t\| \geq R} \frac{L(\omega, t)}{\|t\|} = +\infty.$$

*. Précisons que l'expression "presque périodique" est liée à la minimalité du système et est plus générale que la notion de "presque périodique au sens de H. Bohr"

L est dit faiblement twist s'il existe une fonction $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, C^0 telle que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $\tilde{E}_\omega(x, y) := E_\omega(x, y) + U(\tau_x \omega) - U(\tau_y \omega)$ est C^2 et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{\partial^2 \tilde{E}_\omega}{\partial x \partial y}(x, \cdot) < 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{E}_\omega}{\partial x \partial y}(\cdot, y) < 0 \quad p.p.$$

Dans ce contexte, nous retrouvons tous les exemples traités dans la section précédente 3.1.

Exemple 3.2.2 (Ex. périodique) Pour $\Omega = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et τ_t la translation par $t \in \mathbb{R}$ modulo \mathbb{Z} , nous retrouvons l'énergie d'interaction originelle en prenant $L(\omega, t) = V(\omega) + U(t)$ pour $\omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$, avec $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $V: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Exemple 3.2.3 (Ex. quasi-cristal) De même, en considérant $\Omega(X)$ l'enveloppe d'un quasi-cristal X et une fonction continue $\hat{V}: \Omega(X) \rightarrow \mathbb{R}$, le lagrangien $L(\omega, t) = \hat{V}(\omega) + U(t)$ pour $\omega \in \Omega(X)$ et $t \in \mathbb{R}$, nous retrouvons l'énergie d'interaction associée à un quasi-cristal traitée dans la section 3.1.

Remarquons que dans ces deux cas, les propriétés de super-linéarité et twist de la fonction U impliquent les propriétés de super-linéarité et de faible twist du lagrangien.

Exemple 3.2.4 (Ex. presque périodique au sens de Bohr) Le lagrangien défini, pour des constantes K_1, K_2, λ , par

$$L((\omega_1, \omega_2), t) = \frac{1}{2}|t - \lambda|^2 + \frac{K_1}{(2\pi)^2}(1 - \cos 2\pi\omega_1) + \frac{K_2}{(2\pi)^2}(1 - \cos 2\pi\omega_2),$$

où $t \in \mathbb{R}$ et $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{T}^2$, donne également un modèle d'interaction presque périodique, super-linéaire et faiblement twist pour le flot $\tau_t(\omega) = \omega + t(1, \sqrt{2}) \in \mathbb{T}^2$.

Ainsi le contexte de modèle d'interaction quasi-périodique est beaucoup plus large que celui étudié dans la section précédente puisque il englobe des systèmes expansifs, équicontinus ou avec des régularités intermédiaires (distal, etc...). Ajoutons que ce modèle stationnaire a déjà été étudié pour l'équation d'Hamilton-Jacobi dans le contexte stationnaire ergodique (la dépendance en ω n'est alors que mesurable et l'action de τ est ergodique) [LS03, DS09, DS12] ou alors associé à des fonctions presque périodiques au sens de H. Bohr (par ex. [SdlL12, Ish99]).

Remarquons qu'un modèle d'interaction presque périodique avec un lagrangien L super-linéaire implique les propriétés suivantes pour chaque énergie d'interaction $E_\omega: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$:

- *stationnarité*: $\forall t, x, y \in \mathbb{R}^d \ E_\omega(x + t, y + t) = E_{\tau_t(\omega)}(x, y)$.
- *bornée par translation*: $\forall R > 0, \sup_{\|y-x\| \leq R} E_\omega(x, y) < +\infty$.
- *uniforme continuité par translation*: $\forall R > 0 \ E_\omega(x, y)$ est uniformément continue en $\|y - x\| \leq R$.
- *super-linéarité*: $\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\|y-x\| \geq R} \frac{E_\omega(x, y)}{\|y-x\|} = +\infty$.

Sous les seules hypothèses de super-linéarité, de borné par translation et d'uniforme continuité par translation de l'énergie, l'existence de configuration bi-infinie minimisante n'est pas clair. Nous savons prouver seulement l'existence de configuration minimisante semi-infini $(x_n)_{n \geq 0}$ (voir proposition 3.2.6). Nous obtenons tout de même un peu plus, car nous montrons que ces configurations sont *calibrées*. C'est une notion clef dans la théorie KAM faible.

Définition 3.2.5 Nous disons qu'une configuration $(x_n)_n$ est c -calibrée pour une énergie d'interaction E (au niveau $c \in \mathbb{R}$) si pour tous les entiers $m < n$,

$$E(x_m, \dots, x_n) - (m - n)c \leq \inf_{k \geq 1} \inf_{y_0 = x_m, \dots, y_k = x_n} [E(y_0, \dots, y_k) - kc].$$

Il est simple de voir qu'une configuration calibrée $(x_n)_n$ est une configuration minimisante, mais la réciproque n'est pas vraie. Mentionnons également, qu'en ces termes, Aubry et Le Daeron prouvent dans [ALD83] que pour une énergie d'interaction périodique en dimension $d = 1$, toute configuration minimisante est en fait calibrée pour un certain c .

Sous des hypothèses assez faible, nous obtenons l'existence de configuration semi-infinie calibrée.

Proposition 3.2.6 ([11]) Pour une énergie d'interaction $E: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, C^0 , super-linéaire, bornée par translation et uniformément continue par translation, il existe une calibration $\bar{c} \in \mathbb{R}$ et une configuration $(x_n)_{n \geq 0}$ \bar{c} -calibrée.

Nous avons donc pour un modèle d'interaction presque périodique $(\Omega, \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}^d}, L)$, avec un lagrangien L C^0 et super-linéaire, l'existence de configurations calibrées semi-infinies pour tout environnement $\omega \in \Omega$. La preuve de la proposition 3.2.6 provient d'une généralisation directe de la stratégie moderne de la théorie d'Aubry-Mather et est similaire à celle de [Zav12]. Le modèle FK apparait naturellement comme une discrétisation en temps de l'équation d'Hamilton Jacobi. Le pendant discret des solutions de viscosité ou solution KAM faible de ces équations, sont les fonctions propres d'un opérateur dit de *Lax-Oleinik*. L'étude de cet opérateur, nous permet dans l'annexe de [11] de démontrer la proposition 3.2.6.

Pour un modèle d'interaction quasi-périodique, une calibration importante est donnée par l'énergie minimale.

Définition 3.2.7 Pour une famille d'interaction $\{E_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ de forme lagrangienne, l'énergie minimale est la quantité

$$\bar{E} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\omega \in \Omega} \inf_{x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{n} E_\omega(x_0, \dots, x_n).$$

Cette limite est en fait un supremum par super-additivité et est finie pour L super-linéaire. Cette constante \bar{E} joue le rôle d'un drift et $E_\omega(x, y) - \bar{E}$ est similaire à une "distance signée".

Nous montrons dans [11] l'existence de configurations \bar{E} -calibrées bi-infinies pour les environnements ω qui sont dans le projeté de l'ensemble de Mather : $Mather(L) \subset \Omega \times \mathbb{R}^d$, défini un peu plus loin (définition 3.2.10). Pour être plus précis, notons $pr: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$ la projection sur la première coordonnée, nous avons :

Théorème 3.2.8 ([11]) Soit $(\Omega, \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}^d}, L)$ un modèle d'interaction presque périodique, avec L un lagrangien superlinéaire C^0 . Alors pour tout $\omega \in pr(Mather(L))$, il existe une configuration \bar{E} -calibrée $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $x_0 = 0$ et $\sup_n \|x_{n+1} - x_n\| < +\infty$.

Pour définir l'ensemble de Mather, il faut tout d'abord considérer la notion de *mesure holonomique*. Une telle mesure μ est une mesure de probabilité sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall f \in C^0(\Omega), \quad \int f(\omega) \mu(d\omega, dt) = \int f(\tau_t \omega) \mu(d\omega, dt).$$

La mesure de Dirac $\delta_{(\omega, 0)}$ est un exemple de mesure holonomique. Plus généralement, n'importe quelle mesure de probabilité invariante par l'application standard est holonomique.

La proposition suivante est fondamentale pour les configurations calibrées, car elle relie leur existence avec un problème de minimisation ergodique plus simple à traiter.

Proposition 3.2.9 ([11]) *Si L est C^0 super-linéaire, alors $\bar{E} = \inf\{\int Ld\mu; \mu \text{ est holonomique}\}$ et l'infimum est atteint pour une certaine mesure.*

Une mesure qui réalise l'infimum précédent est dite *minimisante*.

Définition 3.2.10 *L'ensemble de Mather de L est l'ensemble*

$$\text{Mather}(L) := \bigcup_{\mu \text{ minimisante}} \text{supp}(\mu) \subset \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

L'ensemble de Mather est non vide (Proposition 3.2.9) et est en fait compact lorsque le lagrangien L est super-linéaire [11]. Il est cependant possible que son projeté $pr(\text{Mather}(L))$ ne rencontre pas toutes les orbites du flot τ . Dans l'exemple 3.2.4, en prenant $\lambda = 0$, il est simple de voir que $\bar{E} = 0$ et que les mesures minimisantes sont des combinaison convexes de mesures de Dirac. De plus la projection de l'ensemble de Mather ne rencontre qu'un nombre fini de τ -orbite.

Dans les exemples associés aux quasi-cristaux, nous montrons, en dimension $d = 1$, que cette pathologie disparaît. Dans ce cas, le projeté de l'ensemble de Mather rencontre toutes les orbites.

Plus précisément, pour Ω un \mathbb{R} -solénoïde (voir section 2.1.2), nous dirons qu'un lagrangien $L: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *transversalement constant* si pour toute verticale Ξ , $L(\cdot, t)|_{\Xi}$ est localement constant pour tout t fixé. Dans la suite, nous appellerons *modèle quasi-cristallin* un tel modèle d'interaction $(\Omega, \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}, L)$ avec un lagrangien L super-linéaire, faiblement twist et transversalement constant. L'exemple 3.2.3 pour une fonction V fortement X -équivariante donne un exemple d'un tel système.

Théorème 3.2.11 ([11]) *Soit $(\Omega, \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}, L)$ un modèle quasi-cristallin où l'action τ est uniquement ergodique. Alors le projeté de l'ensemble de Mather $pr(\text{Mather}(L))$ rencontre toute τ -orbite. En particulier, pour tout $\omega \in \Omega$, il existe une configuration \bar{E} -calibrée $(x_{n,\omega})_{n \in \mathbb{Z}}$ pour E_ω avec des sauts et une distance à l'origine uniformément bornés en ω :*

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_{n+1,\omega} - x_{n,\omega}| < +\infty, \text{ et } \sup_{\omega \in \Omega} |x_{0,\omega}| < +\infty.$$

La démonstration du théorème 3.2.8 n'est pas directe et passe par l'étude des propriétés du *potentiel de Mañé*. La preuve du théorème 3.2.11 provient d'une description des mesures invariantes sur le solénoïde via des tours de Kakutani-Rohlin et d'une analyse de la combinatoire des configurations minimisantes dans ce contexte, via l'étude du potentiel de Mañé et le lemme de croisement d'Aubry.

Remarquons que la théorie d'Aubry-Mather dans le cas périodique, montre que l'ensemble de Mather est inclus dans un graphe de $\Omega \times \mathbb{R}$. Nous ne savons pas démontrer ce dernier point dans notre contexte, même si nous en sommes proche. Des simulations numériques (semi-rigoureuses) tendent à assurer l'existence de ces graphes invariants. De plus, dans le cas particulier de l'équation du pendule quasi-périodique, où l'on remplace le terme usuel en \sin par une fonction fortement équivariante par rapport à ensemble de Delone donné par une substitution Pisot, ou par une suite sturmienne, nous obtenons l'existence d'une solution de viscosité et l'ensemble de Mather est supporté dans un graphe donné par cette solution. Ici les calculs sont assez explicites et nous devons utiliser fortement que les suites considérées sont *balancées* ce qui assure une vitesse de convergence rapide pour les moyennes ergodiques du nombre d'apparition d'un motif arbitraire.

Références

Publications

- [1] José Aliste-Prieto, Daniel Coronel, María Isabel Cortez, Fabien Durand, and Samuel Petite.
Mathematics of Aperiodic Order, chapter Linearly repetitive Delone set, page 28.
Progress in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Basel, 2015.
- [2] José Aliste-Prieto and Samuel Petite.
On the simplicity of homeomorphism group of a tilable lamination.
arXiv :1408.1337.
- [3] María Isabel Cortez, Fabien Durand, and Samuel Petite.
Linearly repetitive Delone systems have a finite number of nonperiodic Delone system factors.
Proc. Amer. Math. Soc., 138(3) :1033–1046, 2010.
- [4] María Isabel Cortez, Fabien Durand, and Samuel Petite.
Eigenvalues and strong orbit-equivalence.
Ergodic Theory Dynamical Systems, 2015.
- [5] María Isabel Cortez and Samuel Petite.
 G -odometers and their almost one-to-one extensions.
J. Lond. Math. Soc. (2), 78(1) :1–20, 2008.
- [6] María Isabel Cortez and Samuel Petite.
Invariant measures and orbit equivalence for generalized Toeplitz subshifts.
Groups Geom. Dyn., 8(4) :1007–1045, 2014.
- [7] Sebastian Donoso, Fabien Durand, Alejandro Maass, and Samuel Petite.
On automorphism groups of low complexity subshifts.
Ergodic Theory Dynamical Systems, 2015.
- [8] Fabien Durand and Samuel Petite.
Unimodular pisot substitutions and domain exchanges.
arXiv :1408.2110.
- [9] Youssef Fares and Samuel Petite.
The valuative capacity of subshifts of finite type.
J. Number Theory, 158 :165–184, 2016.
- [10] Jean-Marc Gambaudo, Pierre Guiraud, and Samuel Petite.
Minimal configurations for the Frenkel-Kontorova model on a quasicrystal.
Comm. Math. Phys., 265(1) :165–188, 2006.
- [11] Eduardo Garibaldi, Samuel Petite, and Philippe Thieullen.
Discrete weak-kam methods for stationary uniquely ergodic setting.

- arXiv :1312.1967.
- [12] Hervé Oyono-Oyono and Samuel Petite.
 C^* -algebras of Penrose hyperbolic tilings.
J. Geom. Phys., 61(2) :400–424, 2011.
- [13] Samuel Petite.
 On invariant measures of finite affine type tilings.
Ergodic Theory Dynam. Systems, 26(4) :1159–1176, 2006.

Bibliographie

- [ABT15] Nathalie Aubrun, Sebastián Barbieri, and Stéphan Thomassé, *Realization of aperiodic subshifts and densities in groups*, arXiv preprint arXiv :1507.03369 (2015).
- [AI01] P. Arnoux and S. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8** (2001), 181–207, Journées Montoises d’Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000).
- [ALD83] S. Aubry and P. Y. Le Daeron, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions. I. Exact results for the ground-states*, Phys. D **8** (1983), no. 3, 381–422. MR 719634 (85f :58032)
- [And62] R. D. Anderson, *On homeomorphisms as products of conjugates of a given homeomorphism and its inverse*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp. 231–234. MR 0139684 (25 #3115)
- [AO95] Jan M. Aarts and Lex G. Oversteegen, *Matchbox manifolds*, Continua (Cincinnati, OH, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 170, Dekker, New York, 1995, pp. 3–14. MR 1326831 (96d :54034)
- [AP10] José Aliste-Prieto, *Translation numbers for a class of maps on the dynamical systems arising from quasicrystals in the real line*, Ergodic Theory Dynam. Systems **30** (2010), no. 2, 565–594. MR 2599893 (2011g :37106)
- [APC11] José Aliste-Prieto and Daniel Coronel, *Tower systems for linearly repetitive Delone sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **31** (2011), no. 6, 1595–1618.
- [AR91] P. Arnoux and G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité $2n + 1$* , Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 199–215.
- [Aus88] Joseph Auslander, *Minimal flows and their extensions*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 153, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122. MR 956049 (89m :54050)
- [BAR10] Edmund Ben Ami and Matatyahu Rubin, *On the reconstruction problem for factorizable homeomorphism groups and foliated manifolds*, Topology Appl. **157** (2010), no. 9, 1664–1679. MR 2639833 (2011m :57036)
- [BBG06] Jean Bellissard, Riccardo Benedetti, and Jean-Marc Gambaudo, *Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling*, Comm. Math. Phys. **261** (2006), no. 1, 1–41. MR 2193205 (2007c :46063)
- [BD01] Marcy Barge and Beverly Diamond, *A complete invariant for the topology of one-dimensional substitution tiling spaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 5, 1333–1358. MR 1855835 (2002k :37026)
- [BD02] M. Barge and B. Diamond, *Coincidence for substitutions of Pisot type*, Bull. Soc. Math. France **130** (2002), 619–626.

- [BDM05] X. Bressaud, F. Durand, and A. Maass, *Necessary and sufficient conditions to be an eigenvalue for linearly recurrent dynamical cantor systems*, J. London Math. Soc. **72** (2005), 799–816.
- [Bel92] Jean Bellissard, *Gap labelling theorems for Schrödinger operators*, From number theory to physics (Les Houches, 1989), Springer, Berlin, 1992, pp. 538–630. MR 1221111 (94e :46120)
- [BG03] Riccardo Benedetti and Jean-Marc Gambaudo, *On the dynamics of \mathbb{G} -solenoids. Applications to Delone sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 3, 673–691. MR 1992658 (2004f :37019)
- [BH94] Mike Boyle and David Handelman, *Entropy versus orbit equivalence for minimal homeomorphisms*, Pacific J. Math. **164** (1994), no. 1, 1–13. MR 1267499 (95m :28019)
- [BJS12] V. Berthé, T. Jolivet, and A. Siegel, *Substitutive Arnoux-Rauzy sequences have pure discrete spectrum*, Unif. Distrib. Theory **7** (2012), 173–197.
- [BK04] O. M. Braun and Y. S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova model*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Concepts, methods, and applications. MR 2035039 (2004k :82001)
- [BLR88] Mike Boyle, Douglas Lind, and Daniel Rudolph, *The automorphism group of a shift of finite type*, Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988), no. 1, 71–114. MR 927684 (89m :54051)
- [BM08] Yuri Bakhtin and Matilde Martínez, *A characterization of harmonic measures on laminations by hyperbolic Riemann surfaces*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **44** (2008), no. 6, 1078–1089. MR 2469335 (2009j :37048)
- [BOO03] Moulay-Tahar Benameur and Hervé Oyono-Oyono, *Gap-labelling for quasi-crystals (proving a conjecture by J. Bellissard)*, Operator algebras and mathematical physics (Constanța, 2001), Theta, Bucharest, 2003, pp. 11–22. MR 2018220 (2005f :46121a)
- [Boy83] McBlaine Michael Boyle, *Topological orbit equivalence and factor maps in symbolic dynamics*, Master’s thesis, University of Washington, 1983, Thesis (Ph.D.), p. 106. MR 2632783
- [BW92] Jonathan Block and Shmuel Weinberger, *Aperiodic tilings, positive scalar curvature and amenability of spaces*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 4, 907–918. MR 1145337 (93d :53054)
- [Can03] Alberto Candel, *The harmonic measures of Lucy Garnett*, Adv. Math. **176** (2003), no. 2, 187–247. MR 1982882 (2004m :58057)
- [CDHM03] M. I. Cortez, F. Durand, B. Host, and A. Maass, *Continuous and measurable eigenfunctions of linearly recurrent dynamical cantor systems*, J. London Math. Soc. **67** (2003), 790–804.
- [CFW81] A. Connes, J. Feldman, and B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, Ergodic Theory Dynamical Systems **1** (1981), no. 4, 431–450 (1982).
- [CGSY99] Dominique Cerveau, Étienne Ghys, Nessim Sibony, and Jean-Christophe Yoccoz, *Dynamique et géométrie complexes*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 8, Société Mathématique de France, Paris; distributed by American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, Papers from the Meeting “State of the Art of the Research of the Société Mathématique de

- France” held at École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, January 1997. MR 1760840 (2001a :37002)
- [CI99] Gonzalo Contreras and Renato Iturriaga, *Global minimizers of autonomous Lagrangians*, 22° Colóquio Brasileiro de Matemática. [22nd Brazilian Mathematics Colloquium], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1999. MR 1720372 (2001j :37113)
- [CK15] Van Cyr and Bryna Kra, *The automorphism group of a shift of linear growth : beyond transitivity*, Forum Math. Sigma **3** (2015), e5 (27 pages). MR 3324942
- [Cor06] María Isabel Cortez, \mathbb{Z}^d Toeplitz arrays, Discrete Contin. Dyn. Syst. **15** (2006), no. 3, 859–881. MR 2220753 (2007b :37020)
- [CS01] V. Canterini and A. Siegel, *Geometric representation of substitutions of pisot type*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5121–5144.
- [dB81] N. G. de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose’s nonperiodic tilings of the plane. I, II*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **43** (1981), no. 1, 39–52, 53–66. MR 609465 (82e :05055)
- [Dek78] F. M. Dekking, *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **41** (1978), 221–239.
- [Der09] Bertrand Deroin, *Non unique-ergodicity of harmonic measures : smoothing Samuel Petite’s examples*, Differential geometry, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009, pp. 36–42. MR 2523488 (2010h :37009)
- [DHS99] F. Durand, B. Host, and C. Skau, *Substitutive dynamical systems, bratteli diagrams and dimension groups*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **19** (1999), 953–993.
- [dJ78] Andrés del Junco, *A simple measure-preserving transformation with trivial centralizer*, Pacific J. Math. **79** (1978), no. 2, 357–362.
- [DK07] Bertrand Deroin and Victor Kleptsyn, *Random conformal dynamical systems*, Geom. Funct. Anal. **17** (2007), no. 4, 1043–1105. MR 2373011 (2010j :37012)
- [DL98] T. Downarowicz and Y. Lacroix, *Almost 1-1 extensions of Furstenberg-Weiss type and applications to Toeplitz flows*, Studia Math. **130** (1998), no. 2, 149–170.
- [Dow91] Tomasz Downarowicz, *The Choquet simplex of invariant measures for minimal flows*, Israel J. Math. **74** (1991), no. 2-3, 241–256. MR 1135237 (93e :54029)
- [Dow97] ———, *The royal couple conceals their mutual relationship : a noncoalescent Toeplitz flow*, Israel J. Math. **97** (1997), 239–251. MR 1441251 (99d :28031)
- [Dow05] ———, *Survey of odometers and Toeplitz flows*, Algebraic and topological dynamics, Contemp. Math., vol. 385, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 7–37. MR 2180227 (2006f :37009)
- [DS09] Andrea Davini and Antonio Siconolfi, *Exact and approximate correctors for stochastic Hamiltonians : the 1-dimensional case*, Math. Ann. **345** (2009), no. 4, 749–782. MR 2545865 (2010m :49042)
- [DS12] ———, *Weak KAM Theory topics in the stationary ergodic setting*, Calc. Var. Partial Differential Equations **44** (2012), no. 3-4, 319–350. MR 2915325
- [Dur96] F. Durand, *Contributions à l’étude des suites et systèmes dynamiques substitutifs*, Ph.D. thesis, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), 1996.
- [Dur98a] F. Durand, *A characterization of substitutive sequences using return words*, Discrete Math. **179** (1998), 89–101.

- [Dur98b] F. Durand, *A generalization of Cobham's theorem*, Theory Comput. Systems **31** (1998), 169–185.
- [Dur00] ———, *Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic subshift factors*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **20** (2000), 1061–1078.
- [DV11] Bertrand Deroin and Constantin Vernicos, *Feuilletage de Hirsch, mesures harmoniques et g -mesures*, Publ. Mat. Urug. **12** (2011), 79–85. MR 3012241
- [Dye59] H. A. Dye, *On groups of measure preserving transformation. I*, Amer. J. Math. **81** (1959), 119–159. MR 0131516 (24 #A1366)
- [Eff81] Edward G. Effros, *Dimensions and C^* -algebras*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 46, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, D.C., 1981. MR 623762 (84k :46042)
- [EK71] Robert D. Edwards and Robion C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. Math. (2) **93** (1971), 63–88. MR 0283802 (44 #1032)
- [ENN88] G. A. Elliott, T. Natsume, and R. Nest, *Cyclic cohomology for one-parameter smooth crossed products*, Acta Math. **160** (1988), no. 3-4, 285–305. MR 945014 (89h :46093)
- [Eps70] D. B. A. Epstein, *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Compositio Math. **22** (1970), 165–173. MR 0267589 (42 #2491)
- [Exe87] Ruy Exel, *Rotation numbers for automorphisms of C^* algebras*, Pacific J. Math. **127** (1987), no. 1, 31–89. MR 876017 (88a :46068)
- [Fatar] A. Fathi, *The weak kam theorem in lagrangian dynamics*, Cambridge University Press, book to appear.
- [FBGG05] L. M. Floría, C. Baesens, and J. Gómez-Gardeñes, *The Frenkel-Kontorova model*, Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems, Lecture Notes in Phys., vol. 671, Springer, Berlin, 2005, pp. 209–240. MR 2395732 (2009e :82047)
- [Fer97] Sébastien Ferenczi, *Systems of finite rank*, Colloq. Math. **73** (1997), no. 1, 35–65. MR 1436950 (98g :28020)
- [Fis60] Gordon M. Fisher, *On the group of all homeomorphisms of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 193–212. MR 0117712 (22 #8487)
- [FK38] Y. I. Frenkel and T. Kontorova, *Phys. Z. Sowietunion* **1** (1938), no. 13.
- [FeMN96b] Sébastien Ferenczi, Christian Mauduit, and Arnaldo Nogueira, *Substitution dynamical systems : algebraic characterization of eigenvalues*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 4, 519–533. MR 1386224 (97b :58085)
- [Fog02] N. P. Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [FS14] Natalie Priebe Frank and Lorenzo Sadun, *Fusion : a general framework for hierarchical tilings of \mathbb{R}^d* , Geom. Dedicata **171** (2014), 149–186. MR 3226791
- [Fur81] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981, M. B. Porter Lectures. MR 603625 (82j :28010)
- [Gab00] Damien Gaboriau, *Coût des relations d'équivalence et des groupes*, Invent. Math. **139** (2000), no. 1, 41–98. MR 1728876 (2001f :28030)
- [Gar77] Martin Gardner, *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Sci. Amer.(USA) **236** (1977), 110–119.

- [Gar83] Lucy Garnett, *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*, J. Funct. Anal. **51** (1983), no. 3, 285–311. MR 703080 (84j :58099)
- [GHH] Thierry Giordano, David Handelman, and M. Hosseini, *Communication privée*.
- [GJ00] Richard Gjerde and Orjan Johansen, *Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems : applications to Toeplitz flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems **20** (2000), no. 6, 1687–1710. MR 1804953 (2002a :46092)
- [GMPS10] Thierry Giordano, Hiroki Matui, Ian F. Putnam, and Christian F. Skau, *Orbit equivalence for Cantor minimal \mathbb{Z}^d -systems*, Invent. Math. **179** (2010), no. 1, 119–158. MR 2563761 (2011d :37013)
- [GPS95] T. Giordano, I. Putnam, and C. F. Skau, *Topological orbit equivalence and c^* -crossed products*, Internat. J. Math. **469** (1995), 51–111.
- [GS89] Branko Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, A Series of Books in the Mathematical Sciences, W. H. Freeman and Company, New York, 1989, An introduction. MR 992195 (90a :52027)
- [GS05] Chaim Goodman-Strauss, *A strongly aperiodic set of tiles in the hyperbolic plane*, Invent. Math. **159** (2005), no. 1, 119–132. MR 2142334 (2006c :68106)
- [GT11] Eduardo Garibaldi and Philippe Thieullen, *Minimizing orbits in the discrete Aubry-Mather model*, Nonlinearity **24** (2011), no. 2, 563–611. MR 2765475 (2012b :37166)
- [Had98] J. Hadamard, *Sur la forme des lignes géodésiques à l’infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre*, Bull. Soc. Math. France **26** (1898), 195–216.
- [Hed69] G. A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Systems Theory **3** (1969), 320–375. MR 0259881 (41 #4510)
- [Her73] Michael R. Herman, *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973), no. 2, 75–86, Colloque International sur l’Analyse et la Topologie Différentielle (Colloques Internationaux CNRS, Strasbourg, 1972). MR 0391166 (52 #11988)
- [HKW] A. Haynes, H. Koivusalo, and J. Walton, *Characterization of linearly repetitive cut and project sets.*, arXiv :1503.04091.
- [Hoc10] Michael Hochman, *On the automorphism groups of multidimensional shifts of finite type*, Ergodic Theory Dynam. Systems **30** (2010), no. 3, 809–840. MR 2643712 (2011d :37031)
- [Hos86a] B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), no. 4, 529–540. MR 873430 (88i :26007)
- [Hos92] ———, *Représentation géométrique des substitutions sur 2 lettres*, Unpublished manuscript (1992).
- [HP89] B. Host and F. Parreau, *Homomorphismes entre systèmes dynamiques définis par substitutions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **9** (1989), no. 3, 469–477. MR 1016665 (91g :28022)
- [HPS92] R. H. Herman, I. Putnam, and C. F. Skau, *Ordered bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Internat. J. Math. **3** (1992), 827–864.
- [HS03] M. Hollander and B. Solomyak, *Two-symbol Pisot substitutions have pure discrete spectrum*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23** (2003), 533–540.
- [IO07] Benjamín A. Itzá-Ortiz, *Eigenvalues, K -theory and minimal flows*, Canad. J. Math. **59** (2007), 596–613.

- [Ish99] Hitoshi Ishii, *Homogenization of the Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equations*, Stochastic analysis, control, optimization and applications, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 305–324. MR 1702967 (2000h :49047)
- [JK69] Konrad Jacobs and Michael Keane, *0 – 1-sequences of Toeplitz type*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **13** (1969), 123–131.
- [Jul12] Antoine Julien, *Complexity as a homeomorphism invariant for tiling spaces*, arXiv preprint arXiv :1212.1320 (2012).
- [KC15] Bryna Kra and Van Cyr, *The automorphism group of a shift of subquadratic growth*, Proc. Maer. Math. Soc. (2015).
- [KD86] A. Katz and M. Duneau, *Quasiperiodic patterns and icosahedral symmetry*, J. Physique **47** (1986), no. 2, 181–196. MR 831883 (87m :52025)
- [Kel03] Johannes Kellendonk, *Pattern-equivariant functions and cohomology*, J. Phys. A **36** (2003), no. 21, 5765–5772. MR 1985494 (2004e :52025)
- [KP00] Johannes Kellendonk and Ian F. Putnam, *Tilings, C^* -algebras, and K -theory*, Directions in mathematical quasicrystals, CRM Monogr. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 177–206. MR 1798993 (2001m :46153)
- [KP03] Jerome Kaminker and Ian Putnam, *A proof of the gap labeling conjecture*, Michigan Math. J. **51** (2003), no. 3, 537–546. MR 2021006 (2005f :46121b)
- [KR90] K. H. Kim and F. W. Roush, *On the automorphism groups of subshifts*, Pure Math. Appl. Ser. B **1** (1990), no. 4, 203–230 (1991). MR 1137698 (92j :28009)
- [Kri06] Fabrice Krieger, *Groupes moyennables, dimension topologique moyenne et sous-décalages*, Geom. Dedicata **122** (2006), 15–31. MR 2295539 (2008e :37004)
- [KT91] Jonathan L. King and Jean-Paul Thouvenot, *A canonical structure theorem for finite joining-rank maps*, J. Analyse Math. **56** (1991), 211–230.
- [Kur03] Petr Kurka, *Topological and symbolic dynamics*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 11, Société Mathématique de France, Paris, 2003. MR 2041676 (2004k :37017)
- [Len04] Daniel Lenz, *Aperiodic linearly repetitive Delone sets are densely repetitive*, Discrete Comput. Geom. **31** (2004), no. 2, 323–326. MR 2060644 (2005a :37027)
- [LM88] Mariusz Lemańczyk and Mieczysław K. Mentzen, *On metric properties of substitutions*, Compositio Math. **65** (1988), no. 3, 241–263. MR 932072 (89c :28023)
- [LP02] Jeffrey C. Lagarias and Peter A. B. Pleasants, *Local complexity of Delone sets and crystallinity*, Canad. Math. Bull. **45** (2002), no. 4, 634–652, Dedicated to Robert V. Moody. MR 1941231 (2003i :52023)
- [LP03] ———, *Repetitive Delone sets and quasicrystals*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 3, 831–867. MR 1992666 (2005a :52018)
- [LS03] Pierre-Louis Lions and Panagiotis E. Souganidis, *Correctors for the homogenization of Hamilton-Jacobi equations in the stationary ergodic setting*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), no. 10, 1501–1524. MR 1988897 (2004m :35018)
- [Mac82] Alan L. Mackay, *Crystallography and the penrose pattern*, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications **114** (1982), no. 1–3, 609 – 613.
- [Mal39] A. Malcev, *Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **6** (48) (1939), 331–336. MR 0002152 (2,7d)
- [Mar91] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991. MR 1090825 (92h :22021)

- [Mar06] Matilde Martínez, *Measures on hyperbolic surface laminations*, Ergodic Theory Dynam. Systems **26** (2006), no. 3, 847–867. MR 2237474 (2007c :37027)
- [Mat74] John N. Mather, *Commutators of diffeomorphisms*, Comment. Math. Helv. **49** (1974), 512–528. MR 0356129 (50 #8600)
- [Mat82] ———, *Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology **21** (1982), no. 4, 457–467. MR 670747 (84g :58084)
- [Mat91] ———, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207** (1991), no. 2, 169–207. MR 1109661 (92m :58048)
- [MF94] John N. Mather and Giovanni Forni, *Action minimizing orbits in Hamiltonian systems*, Transition to chaos in classical and quantum mechanics (Montecatini Terme, 1991), Lecture Notes in Math., vol. 1589, Springer, Berlin, 1994, pp. 92–186. MR 1323222 (97a :58059)
- [MH40] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
- [MM98] G. A. Margulis and S. Mozes, *Aperiodic tilings of the hyperbolic plane by convex polygons*, Israel J. Math. **107** (1998), 319–325. MR 1658579 (99k :52031)
- [Mor21] H. M. Morse, *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1921), 84–100.
- [Moz97] Shahar Mozes, *Aperiodic tilings*, Invent. Math. **128** (1997), no. 3, 603–611. MR 1452434 (98j :52037)
- [MP79] Nelson G. Markley and Michael E. Paul, *Almost automorphic symbolic minimal sets without unique ergodicity*, Israel J. Math. **34** (1979), no. 3, 259–272 (1980).
- [MR03] Colin Maclachlan and Alan W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 219, Springer-Verlag, New York, 2003. MR 1937957 (2004i :57021)
- [MVN36] F. J. Murray and J. Von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. (2) **37** (1936), no. 1, 116–229. MR 1503275
- [Orm97] Nicholas S. Ormes, *Strong orbit realization for minimal homeomorphisms*, J. Anal. Math. **71** (1997), 103–133. MR 1454246 (99c :28053)
- [Orn72] Donald S. Ornstein, *On the root problem in ergodic theory*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II : Probability theory, Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972, pp. 347–356. MR 0399415 (53 #3259)
- [OW80] Donald S. Ornstein and Benjamin Weiss, *Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **2** (1980), no. 1, 161–164. MR 551753 (80j :28031)
- [Pac86] Judith A. Packer, *K-theoretic invariants for C*-algebras associated to transformations and induced flows*, J. Funct. Anal. **67** (1986), no. 1, 25–59. MR 842602 (87m :46137)
- [Pen80] R. Penrose, *Pentaplexity : a class of nonperiodic tilings of the plane*, Math. Intelligencer **2** (1979/80), no. 1, 32–37. MR 558670 (81d :52012)
- [Que87] M. Queffélec, *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1294, Springer-Verlag, 1987.
- [QZ04] Anthony Quas and Luca Zamboni, *Periodicity and local complexity*, Theoret. Comput. Sci. **319** (2004), no. 1-3, 229–240. MR 2074955 (2005e :68204)

- [Rau82] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
- [Ren80] Jean Renault, *A groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer, Berlin, 1980. MR 584266 (82h :46075)
- [Ren09] ———, *C^* -algebras and dynamical systems*, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications], Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2009, 27o Colóquio Brasileiro de Matemática. [27th Brazilian Mathematics Colloquium]. MR 2536186 (2011e :46110)
- [Rob96] E. Arthur Robinson, Jr., *The dynamical theory of tilings and quasicrystallography*, Ergodic theory of \mathbf{Z}^d actions (Warwick, 1993–1994), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 228, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 451–473. MR 1411233 (97i :52023)
- [Rud89] Daniel J. Rudolph, *Markov tilings of \mathbf{R}^n and representations of \mathbf{R}^n actions*, Measure and measurable dynamics (Rochester, NY, 1987), Contemp. Math., vol. 94, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 271–290. MR 1012996 (91b :28016)
- [Ryb95] Tomasz Rybicki, *The identity component of the leaf preserving diffeomorphism group is perfect*, Monatsh. Math. **120** (1995), no. 3–4, 289–305. MR 1363142 (96m :57056)
- [Sad03] Lorenzo Sadun, *Tiling spaces are inverse limits*, J. Math. Phys. **44** (2003), no. 11, 5410–5414. MR 2014868 (2004i :37031)
- [SBGC84] Dan Shechtman, Ilan Blech, Denis Gratias, and John W Cahn, *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Physical Review Letters **53** (1984), no. 20, 1951.
- [Sch57] Sol Schwartzman, *Asymptotic cycles*, Ann. of Math. (2) **66** (1957), 270–284. MR 0088720 (19,568i)
- [SdlL12] Xifeng Su and Rafael de la Llave, *KAM theory for quasi-periodic equilibria in one-dimensional quasi-periodic media*, SIAM J. Math. Anal. **44** (2012), no. 6, 3901–3927. MR 3023435
- [Ser63] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie galoisienne*, Cours au Collège de France, vol. 1962, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1962/1963. MR 0180551 (31 #4785)
- [Sie03] A. Siegel, *Représentation des systèmes dynamiques substitutifs non unimodulaires*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23** (2003), 1247–1273.
- [Sie04] ———, *Pure discrete spectrum dynamical system and periodic tiling associated with a substitution*, Ann. Inst. Fourier **54** (2004), 341–381.
- [Sol97] Boris Solomyak, *Dynamics of self-similar tilings*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **17** (1997), 695–738.
- [Sol98] B. Solomyak, *Nonperiodicity implies unique composition for self-similar translationally finite tilings*, Discrete Comput. Geom. **20** (1998), no. 2, 265–279. MR 1637896 (99f :52028)
- [ST16] Ville Salo and Ilkka Törmä, *Block maps between primitive uniform and pisot substitutions*, arXiv :1306.3777, 2016.
- [Sug03] Fumiaki Sugisaki, *The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms. I*, Internat. J. Math. **14** (2003), no. 7, 735–772. MR 2001264 (2004i :37004)

- [Sug11] ———, *Almost one-to-one extensions of Cantor minimal systems and order embeddings of simple dimension groups*, Münster J. Math. **4** (2011), 141–169.
- [Sul76] Dennis Sullivan, *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*, Invent. Math. **36** (1976), 225–255. MR 0433464 (55 #6440)
- [Thu74] William Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 304–307. MR 0339267 (49 #4027)
- [Toe28] O. Toeplitz, *Ein Beispiel zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, Math. Ann. **98** (1928), no. 1, 281–295. MR 1512405
- [Tsu06] Takashi Tsuboi, *On the group of foliation preserving diffeomorphisms*, Foliations 2005, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, pp. 411–430. MR 2284795 (2007m :57034)
- [vE99] T. van Erp, *Frenkel kontorova model on quasiperiodic substrate potentials*, Ph.D. thesis, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1999.
- [Wei01] Benjamin Weiss, *Monotileable amenable groups*, Topology, ergodic theory, real algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 257–262. MR 1819193 (2001m :22014)
- [Wil74] R. F. Williams, *Expanding attractors*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1974), no. 43, 169–203. MR 0348794 (50 #1289)
- [Wil84] Susan Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **67** (1984), no. 1, 95–107. MR 756807 (86k :54062)
- [Zav12] Maxime Zavidovique, *Strict sub-solutions and Mañé potential in discrete weak KAM theory*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 1, 1–39. MR 2874895 (2012m :37111)
- [Zim84] Robert J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984. MR 776417 (86j :22014)