TD Géométrie différentielle. Feuille 7

Définition 1 *Une nappe réglée est une nappe paramétrée $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de la forme*

$$f(s,t) = \gamma(s) + t\vec{v}(s),$$

avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée et $\vec{v} : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.

Si l'on note D_s la droite passant par le point $\gamma(s)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(s)$, la nappe est l'union des droites D_s. Ces droites sont appelées des *génératrices*.

Exercice 1 Montrer que les nappes suivantes sont réglées.
1) $f\colon (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto (t\cos s, t\sin s, s)$.
2) $f\colon (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \left(t\frac{\sin s}{1+\cos^2 s}, t\frac{\sin s\cos s}{1+\cos^2 s}, t\right)$.
3) $z = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$ où $\alpha, \beta > 0$.
a) On montrera tout d'abord que l'intersection du plan tangent avec le support de la nappe en un point quelconque est la réunion de deux droites sécantes.
4) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ avec $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Exercice 2 1) Soient P_1 et P_2 deux plans non confondus, d'équations respectives

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la surface d'équation $F(a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z) = 0$ est un *cylindre* au sens où le support est une réunion de droites parallèles de direction $P_1 \cap P_2$.

Exercice 3 1) Soit F un polynôme homogène de degré k en (x,y,z) : $F(tx,ty,tz) = t^kF(x,y,z)$ pour tout réel t. Montrer que la surface d'équation implicite $F(x,y,z) = 0$ est un *cône* de sommet O au sens où le support est une réunion de droites passant par O.
2) Montrer que la surface d'équation $x^2 + xy - xz + y^2 + z^2 + x + 3y - z + 3 = 0$ est un cône et trouver son sommet.
3) À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, la quadrique $x(a-y) + y(z-a) + z(x-a) - a = 0$ est-elle un cône ?

Exercice 4 1) Soit Δ la droite passant par (a_1, b_1, c_1) et dirigée par le vecteur (a_2, b_2, c_2). Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la surface d'équation implicite :

$$F((x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2,\ a_2x + b_2y + c_2z) = 0$$

est une *surface de révolution* d'axe Δ au sens où son support est une réunion de cercles d'axe Δ et de points de Δ.
2) Montrer que la surface d'équation $xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 0$ est de révolution. Préciser l'axe.
3) Identifier la surface $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$.

Définition 2 *Une surface définie par* $F(x,y,z)=0$ *est une* quadrique *si* F *des de la forme :*

$$F(x,y,z)=\Phi(x,y,z)+L(x,y,z)+b,$$

où Φ *est une forme quadratique non nulle sur* $\mathbb{R}^3$*,* L *est une forme linéaire sur* $\mathbb{R}^3$*, et* b *est un réel.*

Exercice 5 On dit que $O' \in \mathbb{R}^3$ est un centre de la quadrique $F=0$ s'il existe un réel b' tel que

$$F(M)=\Phi(\vec{O'M})+b'.$$

1) Montrer que le centre d'une quadrique F est l'unique point O' tel que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(O')=\frac{\partial F}{\partial y}(O')=\frac{\partial F}{\partial z}(O')=0.$$

Exercice 6 1) Classifier toutes les quadriques à centres.
2) Classifier les autres quadriques.

Exercice 7 Donner une équation réduite et identifier le le type des quadriques suivantes :
1) $3x^2+3y^2+3z^2+2xy-6z-1=0$
2) $15x^2-2y^2-19z^2+2\sqrt{6}xy-2\sqrt{3}xz-34\sqrt{2}yz-1=0.$