TD Géométrie différentielle. Feuille 6

Exercice 1 Calculer la courbure et la torsion dans les exemples suivants.
1) L'hélice circulaire définie par

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt, \text{ avec } a > 0, b \neq 0.$$

2) La cubique gauche

$$x = t, \qquad y = \frac{t^2}{2}, \qquad z = \frac{t^3}{6}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3) L'intersection de la sphère de rayon 1 centré en $(0,0,0)$ et du cylindre $x^2 + y^2 = y$

$$x = \sin t \cos t, \qquad y = \cos^2 t \qquad z = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}$ un arc régulier C^3 sans point d'inflexion. Montrer que $\mathcal{C}$ est inclu dans un plan affine si seulement si sa torsion est nulle.

Exercice 3 On donne l'arc orienté $\mathcal{C}$

$$x = \frac{\cos t}{sht}, \qquad y = \frac{\sin t}{sht}, \qquad z = \frac{cht}{sht}, \qquad t > 0.$$

a) Montrer que le plan osculateur en un point de $\mathcal{C}$ reste tangent à une sphère fixe.
b) Déterminer au point de paramètre t le repère de Frenet et la courbure de $\mathcal{C}$.

Exercice 4 Soit $D = \{f : J \to \mathbb{R}\ C^2, f(0) = 0, f'(0) = \tan\theta,$ pour un certain voisinage J de $0\}$ pour un $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
Pour $f \in D$, soit Γ la courbe paramétrée par

$$x \in J, \qquad y = x^2, \qquad z = f(x).$$

Notons C le centre de courbure de Γ en $(0,0,0)$.
Quel est le lieu de C quand f varie dans D ?

Exercice 5 Soit $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction C^5. Soit Γ la courbe définie par

$$\begin{cases} x = p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta \\ y = p'(\theta)\cos\theta + p(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

a) Montrer que l'ensemble des tangentes à Γ est la famille des droites

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta), \qquad \theta \in I.$$

b) Déterminer la famille des normales à Γ, en fonction de p'.
c) En déduire une courbe γ_0 telle que $\gamma_0 = \gamma_4$ où l'on note γ_i la développée de γ_{i-1}.
d) En déduire une courbe dont le rayon de courbure au point M est égale à la distance de l'origine à M.

Exercice 6 Soit $\mathcal{C}$ un arc régulier C^3 sans point d'inflexion, et telle que la torsion ne s'annule pas. Soient $T(s)$ et $R(s)$ les fonction rayons de torsion et de courbure au point paramétrés par l'abscisse curviligne s. Montrer que $\mathcal{C}$ est contenu dans une sphère si et seulement si

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right) = 0.$$