TD Géométrie différentielle. Feuille 5

Exercice 1 Donner une représentation paramétrique en fonction de l'abscisse curviligne des courbes suivantes :
1) du cercle de rayon R centré en l'origine.
2) De la spirale logarithmique paramétrée pour $k \in \mathbb{R}_+^*$ fixé par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^{kt}\cos t,\ e^{kt}\sin t).$$

Exercice 2 Calculer les courbures pour les différentes courbes suivantes :
1) En tout point d'un cercle de rayon R.
2) Au sommet de la parabole $y = 2px^2$ $(p > 0)$.
3) Aux sommets de l'ellipse $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, avec $a, b > 0$.
4) En un point quelconque de la spirale logarithmique $\rho = e^\theta$.
5) En tout point de la courbe $x^2 - y^2 = 3$.
6) Du folium de Descartes

$$\begin{cases} x = & \frac{3a}{2}\frac{(1-t^2)(1+t)}{1+3t^2} \\ y = & \frac{3a}{2}\frac{(1-t^2)(1-t)}{1+3t^2} \end{cases}$$

avec $a > 0$, en l'origine.

Exercice 3 Calculer la courbure d'une courbe donnée par une l'équation polaire

$$\rho = f(\theta)$$

avec f une fonction C^∞.

Exercice 4 Soit $\mathcal{C}$ un arc orienté dont $f : I \to \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation par l'abscisse curviligne de classe C^4. On suppose que la courbure en $s_0 \in I$ n'est pas nulle. On appelle *cercle osculateur* le cercle centré au centre de courbure en s_0 et de rayon, le rayon de courbure en s_0. Etudier la position relative de ce cercle avec $\mathcal{C}$ lorsque :
1) la courbure est localement monotone.
2) La courbure a un maximum local en s_0.
3) La courbure a un minimum local en s_0.

Exercice 5 Le lieu des centres de courbure d'une courbe $\mathcal{C}$ est une nouvelle courbe $\mathcal{D}$, appelée la *développée* de $\mathcal{C}$. La courbe $\mathcal{C}$ est alors une *développante* de $\mathcal{D}$.
a) Montrer que pour une courbe dont la courbure de s'annule pas, en tout point la tangente à $\mathcal{D}$ est orthogonale à la tangente à $\mathcal{C}$.
b) Dans les exemples suivants, calculer la développée de :
   1) la parabole $y = 2px^2$ $(p > 0)$.
   2) De l'ellipse $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, avec $a, b > 0$.
   3) De la spirale logarithmique $\rho = e^\theta$.
   4) De la tractrice

$$\begin{cases} x = & \ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = & \frac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

c) Calculer la développante de la parabole $y = x^2$ passant par l'origine.

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}$. On considère la courbe Γ_n d'équation polaire :

$$\rho = \left(\sin(\frac{\theta}{n})\right)^n \qquad 0 < \theta < n\pi.$$

A tout point M de Γ_n, on associe le centre de courbure C de Γ_n au point M, puis P la projection orthogonale de C sur la droite OM. Trouver une équation polaire du lieu de P quand M décrit Γ_n.