TD Géométrie différentielle. Feuille 4

Exercice 1 1) Déterminer la courbe d'équation

$$x^3 + y^3 + x^2 - y^2 = 0.$$

2) Reconnaître la courbe donnée par

$$x^2 + xy + y^2 - \frac{z}{4} = 0 \text{ et } x^2 + xy + z^2 - \frac{y}{4} = 0.$$

3) Dessiner la courbe paramétrée par

$$f(t) = \big((5 + 2\cos\frac{p}{q}t)\cos t,\ (5 + 2\cos\frac{p}{q}t)\sin t,\ 2\sin\frac{p}{q}t\big),$$

avec p et q entiers.

Exercice 2 Soient $M_0 \in \mathbb{R}^3$, $(a,h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$, Γ est l'hélice circuaire à pas constant de représentation paramétrique $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht\ (t \in \mathbb{R})$.
Montrer que les points de contact des plans osculateurs à Γ passant par M_0 sont coplanaires.

Exercice 3 Former une équation cartésienne du plan osculateur :
1) En tout point de la courbe paramétrée par

$$x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}.$$

2) En tout point de la courbe définie en coordonnées cylindriques par,

$$\rho = e^\theta,\ z = e^\theta.$$

3) Au point (0,0,0) de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} \tan x - \tan y & = \tan z \\ sh\ x + sh\ y & = 2sh\ z + 2z^2 \end{cases}$$

4) Au point (2,1,2) de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 9 \\ x^2 - y^2 & = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 Déterminer $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 pour que, en notant $\Gamma : x = t,\ y = t^2,\ z = f(t)$, on ait :

$$\begin{cases} A = (1,1,1) \in \Gamma \\ \text{La tangente en A à } \Gamma \text{ est parallèle au vecteur } (1,2,3) \\ \text{le plan osculateur en tout point M de } \Gamma \text{ passe par la projection orthogonale } m \text{ de } M \text{ sur } O_y. \end{cases}$$

Exercice 5 Soit Γ $x = at, y = bt^2,\ z = ct^3$, pour $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ fixés.
Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux plans osculateurs à Γ ayant des traces sur le plan xOy orthogonales.

Exercice 6 Soit Γ $y = x^2,\ z = x^3$.
a) Déterminer les cordes de Γ aux extrémités desquelles les plans osculateurs à Γ sont orthogonaux.
b) Former une équation cartésienne de la surface réunion de ces cordes.