TD Géométrie différentielle. Feuille 3

Exercice 1 *Courbe de Lissajous*
Dessiner la courbe paramétrée par $x = \sin 2t$ et $y = \cos 2t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Même question avec la courbe paramétrée par

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exercice 2 *Cubiques*
On cherche à étudier les courbes du plan d'équation

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{avec } a \neq 0, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que par un changement de variable affine, on peut se ramener à étudier les équations de type

$$y^2 = x^3 - 3\lambda x + 2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$
$$y^2 = -x^3 + 3\lambda x - 2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \tag{2}$$
$$y^2 = x^3 - 3\lambda x \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \tag{3}$$

2) Etudier les cubiques (1) et (2) en fonction de λ
3) Etudier les cubiques pour le cas (3).

Exercice 3 *Courbes en coordonées polaires.*
1) Dessiner la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho = a(1 + \cos\theta),$$

avec $a > 0$.
2) Même question pour

$$\rho = \frac{1}{4 + \cos 3\theta}.$$

3) Même question pour

$$\rho = \sin\frac{2\theta}{3}.$$

4) Même question avec

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta + \cos 4\theta}.$$

5) Même question avec

$$\theta = \frac{r^3}{(r-1)(r^2+r-1)}.$$

Exercice 4 Soit C la spirale logarithmique définie par $\rho = ae^{\theta}$ avec $a > 0$ fixé. Déterminer la *courbe orthoptique* de C, i.e. : l'ensemble des points du plan qui sont à l'intersection de deux tangentes orthogonales de C.