TD Géométrie différentielle. Feuille 2

Exercice 1 Soit N la nappe paramétrée par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) & \mapsto & (t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ t). \end{array}$$

Déterminer l'équation du plan tangent à N en un point régulier. Quel est l'allure de N au voisinage de $(0, 0, 0)$?

Exercice 2 Donner l'équation cartésienne des plans tangents en tout point régulier des nappes suivantes :
1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_1(u, v) = (u + v,\ u^2 + v,\ v^3)$
2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_2(s, t) = (s,\ t,\ (s^2 + t^2)(s^2 + t^2 - 8))$.

Exercice 3 Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par $z = (x^2 + y^2)^x$ dans son domaine de définition.
a) Donner l'équation du plan tangent à la surface S au point $M = (1, 0, 1)$.
b) En quels points de la surface S, les plans tangents sont-ils parallèles au plan xOy ?

Exercice 4 Déterminer le plan tangent en tout point de la surface définie par $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Exercice 5 Tracer les courbes paramétrées suivantes au voisinage du point paramétré par $t = 0$
a) $f(t) = (t^3, t^4)$
b) $f(t) = (t^3, t^5)$
c) $f(t) = (t^2, t^4)$
d) $f(t) = (t^2, t^7)$
e) $f(t) = (t^p, t^q)$, avec $p < q$ deux entiers.
f) $f(t) = (t^3 + t^4, t^5 + t^7)$

Exercice 6 Tracer les courbes paramétrées par

$$f(t) = (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t),$$

où a est un un réel strictement positif et

$$g(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt), \qquad b > 0,\ t \in [0, 2\pi].$$

Calculer les vecteurs unitaires tangents et les longueurs de ces courbes.

Exercice 7 Tracer les courbes paramétrées par

$$f(t) = (2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t);$$

et

$$g(t) = ((1 - t)^2 e^t,\ 2(1 - t)e^t).$$