Université Picardie Jules Verne
Licence de mathématiques 2008-2009

Faculté de Mathématiques et Informatique

Géométrie différentielle. Rappel de calcul différentiel.

Exercice 1 Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Donner la définition de f différentiable en $a \in U$.

Exercice 2 Montrer qu'une application linéaire est différentiable en tout point.

Exercice 3 Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique, et φ la forme bilinéaire symétrique associée. Calculer la différentielle de q.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 0$ si $xy \neq 0$ et 1 sinon. f est elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 5 a) Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in U$, et si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet-elle une dérivée partielle au point a dans la direction de $\vec{v}$? Si oui, donner son expression en fonction de $d_a f$.
b) Soit $f(x, y) = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. f est elle dérivable en $(0, 0)$?

Exercice 6 a) Soit $f(x, y, z) = (x^2 y + \ln(\frac{y}{z}), \sqrt{x^2 - y^2})$. Chercher son ensemble de définition. Calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ dans les directions des axes, sa différentielle au point (x_0, y_0, z_0), son gradient au même point.
b) Mêmes questions avec les fonctions suivantes : $g(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{x}, x + y\right)$ et $h(x, y, z) = xyz^5$.

Exercice 7 Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe (*i.e.* une appliction $\mathbb{C}$ différentiable) , et $z_0 \in U$. Quelle propriété vérifie sa différentielle au point z_0, vue comme application linéaire $d_{z_0} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Exercice 8 **a)** Soit $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application bilinéaire. Calculer sa différentielle au point $x \in \mathbb{R}^n$.
b)Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle en $u \in \mathbb{R}^n$ de l'application $v \in \mathbb{R}^n \mapsto < Av, v >$.
c) Même question avec u fixé et l'application $A \mapsto < Au, u >$.

Exercice 9 On considère sur $M_n(\mathbb{R})$, la norme $||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||A(x)||$.
a) Montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$.
b) Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de $Gl_n(\mathbb{R})$ dans lui même en Id. En déduire la différentielle de cette application en tout point de $Gl(n, \mathbb{R})$.

Exercice 10 On considère l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
Soit $a \in Gl_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det au point a. (On fera d'abord pour $n = 2$).
L'application déterminant est elle différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 telle que pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $d_{(x,y)} f$ est une rotation de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est la composée d'une translation et d'une rotation.

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f est de classe C^1 ; admet elle une différentielle seconde à l'origine ?

Exercice 13 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 y + z^2, xyz^3 - x^2)$ est C^∞.

Exercice 14 a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y + \sin(x),\ y + \sin(x))$ est un difféomorphisme de classe C^1.
b) Montrer que l'application $t \mapsto t^3$ n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}$.