

Dynamiques symboliques sur $\mathbb{Z}^d$

Samuel Petite

LAMFA UMR 6140 du CNRS
Université de Picardie Jules Verne, France

1er avril 2011

Plan

1 Notions de base et exemples

- Définitions
- Sous-shift de type fini
- Substitution

2 Systèmes dynamiques

- Définitions et propriétés
- Application des systèmes dynamiques
- Relation entre SFT et substitutions

Références

- *Symbolic and algebraic dynamical systems.* D. LIND, K. SCHMIDT. In: Handbook of Dynamical Systems, ed. B. Hasselblatt and A. Katok, vol. 1A, 2002, 765-812
- *On the dynamics and recursive properties of multidimensional symbolic systems.* M. HOCHMAN Inventiones Mathematica, Vol. 176, Number 1, April, 2009
- *Substitution, dynamical systems-spectral analysis.* M. QUEFFÉLEC, LNM, vol. 1294, 1987
- *Symbolic Dynamics and Tilings of $\mathbb{R}^d$.* E. ARTHUR ROBINSON 81–119, Proc. Sympos. Appl. Math., 60, AMS

Notions de base

Soient Σ un alphabet fini et $d \geq 1$ un entier.

$$\Sigma^{\mathbb{Z}^d} := \{(x_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}; x_m \in \Sigma \quad \forall m \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Exemple : $d = 2$

```

0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1
0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1
0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1
0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1
0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1
0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0
0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0

```

Notions de base

Σ muni de la topologie discrète.

$\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la topologie produit est un espace métrique compact.

Notions de base

Σ muni de la topologie discrète.

$\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la topologie produit est un espace métrique compact.

Deux suites $(x_m), (y_m) \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ sont proches si elles coïncident sur un grand motif autour de l'origine.

$$x_m = y_m \quad \forall \quad ||m|| \leq R.$$

Notions de base

Action continue du *décalage* (ou *shift*) sur $\mathbb{Z}^d$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, on définit un homéomorphisme

$$\begin{aligned}\sigma^n: \Sigma^{\mathbb{Z}^d} &\longrightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \\ x = (x_m)_m &\longmapsto \sigma^n(x) = (x_{n+m})_m\end{aligned}$$

Notions de base

Action continue du *décalage* (ou *shift*) sur $\mathbb{Z}^d$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, on définit un homéomorphisme

$$\begin{aligned}\sigma^n: \Sigma^{\mathbb{Z}^d} &\rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \\ x = (x_m)_m &\mapsto \sigma^n(x) = (x_{n+m})_m\end{aligned}$$

Un ensemble $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ est dit *shift-invariant* si

$$\sigma^n(X) = X \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^d.$$

Notions de base

Action continue du *décalage* (ou *shift*) sur $\mathbb{Z}^d$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, on définit un homéomorphisme

$$\begin{aligned}\sigma^n : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} &\rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \\ x = (x_m)_m &\mapsto \sigma^n(x) = (x_{n+m})_m\end{aligned}$$

Un ensemble $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ est dit *shift-invariant* si

$$\sigma^n(X) = X \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^d.$$

Ex : $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$

$$X = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}.$$

X est appelé *sous-shift engendré par* x .

Tout motif de $y \in X$ est un motif de x .

Notions de base

Pour tout ensemble non vide $F \subset \mathbb{Z}^d$, l'application

$$\pi_F: \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \Sigma^F$$

est la projection qui restreint chaque $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ à F .

Notions de base

Pour tout ensemble non vide $F \subset \mathbb{Z}^d$, l'application

$$\pi_F: \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \Sigma^F$$

est la projection qui restreint chaque $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ à F .

Définition

Un ensemble $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ fermé et shift-invariant est appelé sous-shift de type fini (subshift of finite type, SFT) s'il existe un ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}^d$ et un ensemble de motifs $P \subset \Sigma^F$ tels que

$$X = X(F, P) = \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}; \pi_F \circ \sigma^n(x) \in P \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^d\}.$$

P est l'ensemble des motifs autorisés.

Exemple de Ledrappier : SFT *algébrique*.

$$\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } d = 2.$$

$$X = \{x_{(n,m)} \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}; \ x_{(n,m)} + x_{(n+1,m)} = x_{(n,m+1)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1

Exemple de Ledrappier : SFT *algébrique*.

$$\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } d = 2.$$

$$X = \{x_{(n,m)} \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}; x_{(n,m)} + x_{(n+1,m)} = x_{(n,m+1)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

1 0 1
0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1

Exemple de Ledrappier : SFT *algébrique*.

$$\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } d = 2.$$

$$X = \{x_{(n,m)} \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}; x_{(n,m)} + x_{(n+1,m)} = x_{(n,m+1)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

```

1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0
0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1

```

Exemple de Ledrappier : SFT *algébrique*.

$$\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } d = 2.$$

$$X = \{x_{(n,m)} \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}; x_{(n,m)} + x_{(n+1,m)} = x_{(n,m+1)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

```

0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1
0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1
0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1
0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1
0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0
0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0

```

Pavage de Wang. $d = 2$

Pour chaque indice $m \in \mathbb{Z}^2$, on associe le carré unité $m + [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ dont les côtés sont coloriés par une couleur dans $\{1, \dots, r\}$;

Pavage de Wang. $d = 2$

Pour chaque indice $m \in \mathbb{Z}^2$, on associe le carré unité $m + [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ dont les côtés sont coloriés par une couleur dans $\{1, \dots, r\}$;

- $g(m), d(m)$ désignent les couleurs des côtés gauche et droit.
- $h(m), b(m)$ désignent les couleurs des côtés haut et bas.

Soit $T \subset \Sigma = \{1, \dots, r\}^4$ un ensemble de carrés coloriés (d, h, g, b) .

Pavage de Wang. $d = 2$

Pour chaque indice $m \in \mathbb{Z}^2$, on associe le carré unité $m + [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ dont les côtés sont coloriés par une couleur dans $\{1, \dots, r\}$;

- $g(m), d(m)$ désignent les couleurs des côtés gauche et droit.
- $h(m), b(m)$ désignent les couleurs des côtés haut et bas.

Soit $T \subset \Sigma = \{1, \dots, r\}^4$ un ensemble de carrés coloriés (d, h, g, b) .

Deux carrés $m, m' \in T$ peuvent s'intersecter le long de côtés de même couleur : *i.e.*

$$d(m) = g(m') \quad \text{si} \quad m' = m + (1, 0)$$

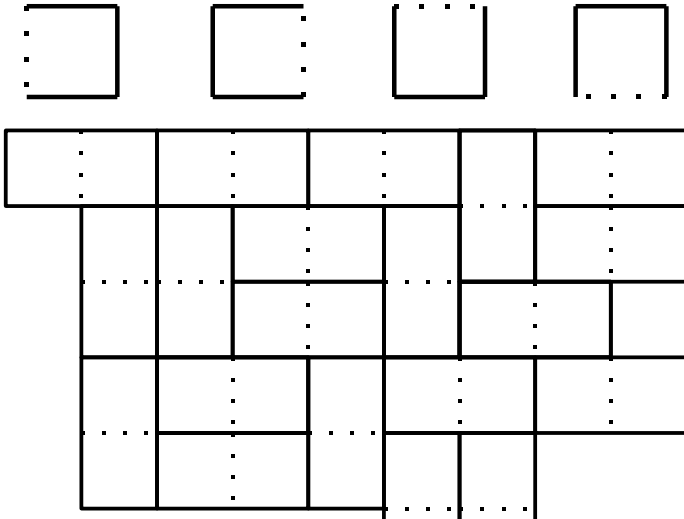
$$h(m) = b(m') \quad \text{si} \quad m' = m + (0, 1)$$

L'ensemble des colorations admissibles $W_T \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est un SFT appelé *sous-shift de Wang*

Pavage de Wang, avec 2 couleurs



Pavage de Wang, avec 2 couleurs

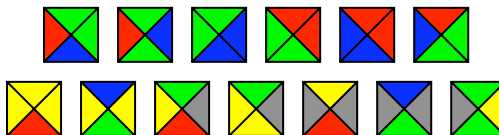


Problème du pavage

Problème du pavage

Étant donnée une famille T de pavés de Wang.

Le SFT associé $W_T \neq \emptyset$?



Problème du pavage

Problème du pavage

Étant donnée une famille T de pavés de Wang.

Le SFT associé $W_T \neq \emptyset$?

Conjecture de Wang

Si $W_T \neq \emptyset$, alors il existe $x \in W_T$ périodique.

Une suite x est dite *périodique* s'il existe $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ t.q.
 $\sigma^n(x) = x$.

Ex : en dimension 1

Problème du pavage

Proposition (Wang, 1961)

Conjecture de Wang $\Rightarrow$ le problème du pavage est décidable.

Problème du pavage

Proposition (Wang, 1961)

Conjecture de Wang $\Rightarrow$ le problème du pavage est décidable.

Théorème (Berger, 1966)

Le problème du pavage est indécidable pour $d \geq 2$.

Différent de la dimension 1

Problème du pavage

Proposition (Wang, 1961)

Conjecture de Wang $\Rightarrow$ le problème du pavage est décidable.

Théorème (Berger, 1966)

Le problème du pavage est indécidable pour $d \geq 2$.

Différent de la dimension 1

Exemple explicite de pavés de Wang ($\simeq 50\,000$ pavés) sans pavage périodique.

Record actuel : Kari, Culik avec 13 pavés.

Problème du pavage

Théorème

Tout sous-shift de type fini peut être représenté par un sous-shift de Wang.

Problème du pavage

Théorème

Tout sous-shift de type fini peut être représenté par un sous-shift de Wang.

Preuve. Soit $X(F, P) \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ avec $F \subset \mathbb{Z}^2$ fini.

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $F \subset \{-r+1, \dots, r\}^2 = F'$. Soit alors $P' = \pi_{F'}(X(F, P))$.

$$\text{On a : } X(F, P) = X(F', P').$$

Chaque carré

$$\tau = \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \in P', \quad A, B, C, D \text{ de taille } r \times r,$$

est vu comme un carré coloré de couleur A B et C D le long des côtés horizontaux et A C et B D le long des côtés verticaux. 

Substitution

Notons Σ^* l'ensemble des motifs finis.

Définition (Substitution)

C'est la donnée d'une application $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ t.q. pour $a \in \Sigma$

$$\varphi(a) = \begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

où $n \geq 2$ indépendant de a , et $a_{i,j} \in \Sigma$.

Substitution

Notons Σ^* l'ensemble des motifs finis.

Définition (Substitution)

C'est la donnée d'une application $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ t.q. pour $a \in \Sigma$

$$\varphi(a) = \begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

où $n \geq 2$ indépendant de a , et $a_{i,j} \in \Sigma$.

On étend ensuite φ en une application $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.

$$X_\varphi = \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}; \text{ tout motif de } x \text{ est un sous-motif de } \varphi^n(a), \\ n \geq 1, a \in \Sigma\}$$

est un sous-shift.

Substitution

Proposition

$$X_\varphi \neq \emptyset.$$

Substitution

Proposition

$$X_\varphi \neq \emptyset.$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$0 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Substitution

Proposition

$$X_\varphi \neq \emptyset.$$

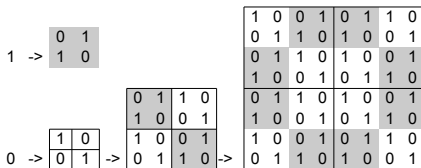
$$1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$0 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Substitution

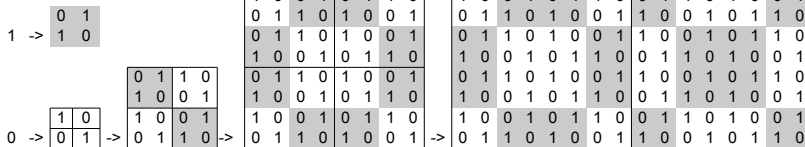
Proposition

$$X_\varphi \neq \emptyset.$$



Proposition

$$X_\varphi \neq \emptyset.$$



Dynamiques symboliques sur $\mathbb{Z}^d$

◀ ☰ ▶ ☰ ↺ 🔍 ↻

Substitution

Définition

Pour $\Sigma = \{1, \dots, r\}$. La matrice de structure A de la substitution φ est la matrice $r \times r$ dont le terme

$$A_{i,j} = \text{nombre de couleur } i \text{ dans } \varphi(j).$$

Une substitution est dite *primitive* s'il existe $k > 0$ t.q. $A^k > 0$.

Substitution

Définition

Pour $\Sigma = \{1, \dots, r\}$. La matrice de structure A de la substitution φ est la matrice $r \times r$ dont le terme

$$A_{i,j} = \text{nombre de couleur } i \text{ dans } \varphi(j).$$

Une substitution est dite *primitive* s'il existe $k > 0$ t.q. $A^k > 0$.

φ s'étend à une application sur $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$.

De façon évidente $\varphi(X_\varphi) \subset X_\varphi$.

Substitution

[illegible]

Substitution

Proposition

Soient φ une substitution primitive et une suite $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$. Alors $x \in X_\varphi$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset X_\varphi$ t. q.

$$\varphi^n(x_n) = x, \quad \forall n \geq 1.$$

i.e. x a une infinité de pré-images par φ .

Substitution

Proposition

Soient φ une substitution primitive et une suite $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$. Alors $x \in X_\varphi$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset X_\varphi$ t. q.

$$\varphi^n(x_n) = x, \quad \forall n \geq 1.$$

i.e. x a une infinité de pré-images par φ .

Preuve. Si $x \in X_\varphi$, $n \geq 1$.

Pour tout motif fini centré en l'origine P de x , par primitivité, il existe $k \geq 1$ t.q.

P est un sous-motif de $\varphi^n(\varphi^k(1))$.

Soit $y = \lim_k \varphi^k(1) \in X_\varphi$.

On a $x = \varphi^n(y)$.

Système dynamique

Définition

Un sous-shift X est dit minimal, s'il ne contient pas de sous-shift non vide strictement inclus dans X .

Système dynamique

Définition

Un sous-shift X est dit minimal, s'il ne contient pas de sous-shift non vide strictement inclus dans X .

Théorème

Tout sous-shift non vide contient un sous-shift minimal non vide.

Système dynamique

Définition

Un sous-shift X est dit minimal, s'il ne contient pas de sous-shift non vide strictement inclus dans X .

Théorème

Tout sous-shift non vide contient un sous-shift minimal non vide.

Preuve. On applique le lemme de Zorn aux sous-ensembles fermés de X non vides, invariants par le shift. Cet ensemble admet un plus petit élément au sens de l'inclusion. Il est minimal. $\square$

Système dynamique

Si $x \in X$ est un sous-shift minimal, alors

$$\overline{O(x)} = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} = X.$$

Toutes les orbites sont denses.

Système dynamique

Si $x \in X$ est un sous-shift minimal, alors

$$\overline{O(x)} = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} = X.$$

Toutes les orbites sont denses.

Théorème (Gottschalk, 1944)

Le sous-shift $\overline{O(x)}$ est minimal si et seulement si la suite x est répétitive.

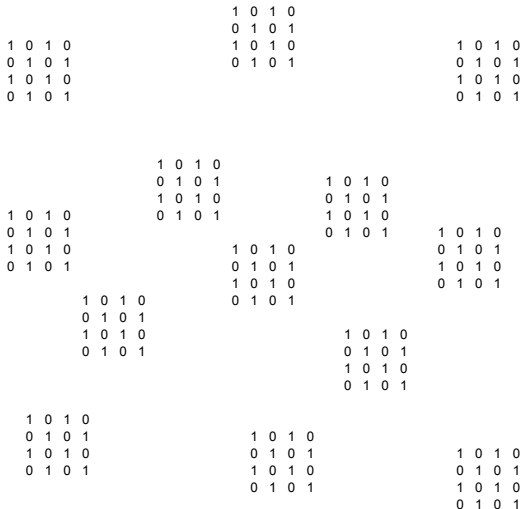
Définition

*Une suite x est dite répétitive si :
pour tout motif P de x , il existe un rayon $R > 0$ vérifiant :*

$$\forall m \in \mathbb{Z}^d, \quad \pi_{B_R(m)}(x) \text{ contient le motif } P$$

L'ensemble des occurrences d'un motif P est à distance bornée de tout point de $\mathbb{Z}^d$.

Système dynamique



Système dynamique

Une suite $\mathbb{Z}^2$ périodique est répétitive.

Proposition

Si φ est une substitution primitive, alors toute suite de X_φ est répétitive.

Système dynamique

Une suite $\mathbb{Z}^2$ périodique est répétitive.

Proposition

Si φ est une substitution primitive, alors toute suite de X_φ est répétitive.

Preuve. On suppose $A > 0$ (quitte à considérer φ^k).

Soit P un motif de $x \in X$.

Par primitivité, $\exists k \geq 1$ t.q. P est un sous-motif de $\varphi^k(a)$, $\forall a \in \Sigma$.

Soit $R = \sup_{a \in \Sigma} 2 \operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi^k(a))$.

Soit $x^{(k)} \in X_\varphi$ tel que $\varphi^k(x^{(k)}) = x$.

Pour $m \in \mathbb{Z}^d$, x_m appartient à un motif $\varphi^k(x_n^{(k)})$

Il existe donc une occurrence de P dans x à une distance $\leq R$. $\square$

Système dynamique

Proposition

Si la substitution φ est primitive, alors X_φ est minimal.

Système dynamique

Proposition

Si la substitution φ est primitive, alors X_φ est minimal.

Proposition

*De plus, pour $x \in X_\varphi$,
le nombre de motifs de taille $n \times m$ est polynomial en n, m .*

Proposition

Pour une substitution primitive φ et $x \in X_\varphi$,
chaque motif P de x apparaît avec une fréquence uniforme en x ,
i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'occurrences de } P \text{ dans } \pi_{[-n,n]^2}(x)}{(2n+1)^2} \text{ converge.}$$

Cette propriété s'appelle *unique ergodicité*.

Pour les substitutions, cette propriété est vraie quelque soit la dimension.

Système dynamique : application

Théorème (Furstenberg)

Si X est un espace métrique compact et $T_i : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, n$, des homéomorphismes t.q.

$$T_i \circ T_j = T_j \circ T_i, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Alors, il existe $x \in X$ et une suite d'entiers $n_p \rightarrow_{p \rightarrow \infty} +\infty$ t.q.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_i^{n_p}(x) = x, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Système dynamique : application

Soient $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ et $X = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$.

Système dynamique : application

Soient $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ et $X = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$.
Soit $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ et

$$T_i = \sigma^{u_i}.$$

Système dynamique : application

Soient $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ et $X = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$.
Soit $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ et

$$T_i = \sigma^{u_i}.$$

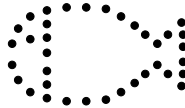
Alors il existe $y \in X$, t.q. pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $k \geq 1$
t.q.

$$\sigma^{k \cdot u_i}(y) \simeq y \text{ à } \epsilon \text{ près, pour tout } i.$$

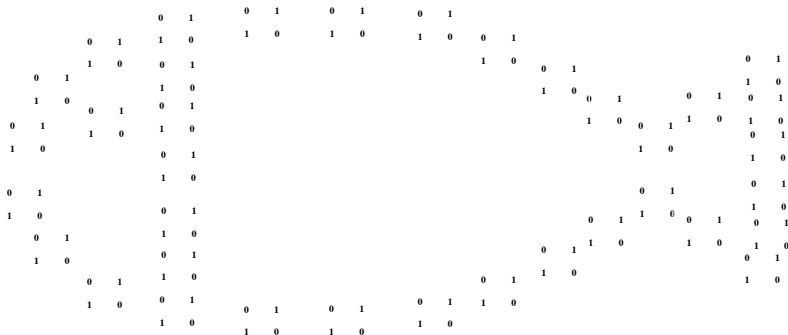
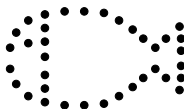
i.e. y et $\sigma^{k \cdot u_i}(y)$ coïncident sur un grand motif de support $1/\epsilon$.

Rappelons que x a les mêmes motifs que y .

Système dynamique : application



Système dynamique : application



Système dynamique : application

Théorème

Soit $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$.

Pour tout ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}^d$, pour tout $\epsilon > 0$,
il existe un entier $n \geq 1$ et un motif P de x t.q.

- $\text{supp}(P)$ contient une boule de rayon $1/\epsilon$,
- pour tout $\vec{u} \in F$,

$P + n\vec{u}$ est un motif de x .

Pour tout ensemble fini F , il existe un certain motif arbitrairement grand dont les occurrences dans x contiennent une homothétie de F .

Système dynamique

Définition

Une application continue $G: X \rightarrow Y$ entre deux sous-shift, surjective et commutant avec le shift, i.e.

$$G \circ \sigma^n = \sigma^n \circ G \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d,$$

est appelée application facteur.

On dit alors que le sous-shift Y est *facteur* de X .

Système dynamique

Définition

Une application continue $G: X \rightarrow Y$ entre deux sous-shift, surjective et commutant avec le shift, i.e.

$$G \circ \sigma^n = \sigma^n \circ G \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d,$$

est appelée application facteur.

On dit alors que le sous-shift Y est *facteur* de X .

Définition

Si de plus G est bijective, alors G est une conjugaison et les sous-shifts sont dits topologiquement conjugués.

Les systèmes dynamiques considèrent les systèmes modulo conjugaison

Système dynamique

Soit $F \subset \mathbb{Z}^d$ est fini.

Soit une application locale $g: \Sigma^F \rightarrow \Sigma'$ sur un alphabet Σ' .

Elle induit une application globale continue $G: \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \Sigma'^{\mathbb{Z}^d}$, par

$$G(x)_m = g(\pi_F(\sigma^m x)) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^d.$$

G est appelée fonction de blocs glissants. (*sliding bloc codes*).

Une fonction de blocs glissants commute avec l'action

Système dynamique

Soit $F \subset \mathbb{Z}^d$ est fini.

Soit une application locale $g: \Sigma^F \rightarrow \Sigma'$ sur un alphabet Σ' .

Elle induit une application globale continue $G: \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \Sigma'^{\mathbb{Z}^d}$, par

$$G(x)_m = g(\pi_F(\sigma^m x)) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^d.$$

G est appelée fonction de blocs glissants. (*sliding bloc codes*).

Une fonction de blocs glissants commute avec l'action

Théorème (Curtis, Lyndon, Hedlund, 1969)

Une application facteur entre deux sous-shifts est une fonction de blocs glissants.

Ainsi la classe des SFT est stable par conjugaison.

Un sous-shift facteur d'un SFT est dit *sofic*.

Système dynamique

Théorème (Mozes, 1989)

Soit φ une $\mathbb{Z}^2$ substitution, alors le sous-shift X_φ est un facteur d'un sous-shift de type fini $X(F, P)$.

De plus l'application facteur G est presque injective, mesurablement et topologiquement.

L'ensemble $\{y \in X_\varphi; \#G^{-1}(y) = 1\}$ est générique topologiquement et mesurablement, i.e. c'est une union dénombrable d'ouverts denses de mesures totales.

Les fréquences des motifs correspondants sont identiques.

Système dynamique

Théorème (Mozes, 1989)

Soit φ une $\mathbb{Z}^2$ substitution, alors le sous-shift X_φ est un facteur d'un sous-shift de type fini $X(F, P)$.

De plus l'application facteur G est presque injective, mesurablement et topologiquement.

L'ensemble $\{y \in X_\varphi; \#G^{-1}(y) = 1\}$ est générique topologiquement et mesurablement, i.e. c'est une union dénombrable d'ouverts denses de mesures totales.

Les fréquences des motifs correspondants sont identiques.
Ce résultat est vrai en dimension $d \geq 2$.
SFT très différent d'un full shift.

Système dynamique

Théorème (Miękisz, Radin, 1991)

Soit X un sous-shift de type fini de $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$.

Si X est uniquement ergodique, alors il existe $K > 0$ t.q.

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(X)}{(\text{card } \Sigma)^{Kn^{d-1}}} < +\infty,$$

où $N_n(X)$ désigne le nombre de motifs de taille $n \times \dots \times n$ dans X .

SFT uniquement ergodique $\Rightarrow$ entropie topologique nulle, i.e. :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(N_n(X))/n^d = 0.$$

En dimension 1, SFT uniquement ergodique alors il est réduit à une seule orbite périodique et sa complexité est bornée.

Preuve

En dimension 2, il suffit de se restreindre au cas des pavages de Wang.

Preuve

En dimension 2, il suffit de se restreindre au cas des pavages de Wang.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(x)}{(\#\Sigma)^{n^2 - (n-2)^2}} = +\infty,$$

i.e. il existe un entier n_1 tel que

$$N_{n_1} > (\#\Sigma)^{n_1^2 - (n_1-1)^2}.$$

Ainsi il existe 2 motifs C_{1,n_1} et C_{2,n_1} dont le support est un carré $[1, n_1] \times [1, n_1]$ de taille $n_1 \times n_1$ qui coïncident sur le bord de ce carré

$$[1, n_1] \times [1, n_1] \setminus [2, n_1 - 1] \times [2, n_1 - 1].$$

Preuve

Comme X est uniquement ergodique, pour tout $x \in X$ la limite suivante existe et est indépendante de x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'occurrences de } C_{1,n_1} \text{ dans } \pi_{[-n,n]^2}(x)}{(2n+1)^2} = \mu(C_{1,n_1}).$$

Preuve

Comme X est uniquement ergodique, pour tout $x \in X$ la limite suivante existe et est indépendante de x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'occurrences de } C_{1,n_1} \text{ dans } \pi_{[-n,n]^2}(x)}{(2n+1)^2} = \mu(C_{1,n_1}).$$

Soit y obtenu en remplaçant chaque motif disjoint de la forme C_{1,n_1} de x par le motif C_{2,n_1} .

La suite $y \in X$ car les motifs C_{1,n_1} et C_{2,n_2} coïncident sur leur bord
Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'occurrences de } C_{1,n_1} \text{ dans } \pi_{[-n,n]^2}(y)}{(2n+1)^2} < \mu(C_{1,n_1}),$$

ce qui est une contradiction avec l'unique ergodicité.



Extension du théorème de Mozes

Pour $F \subset \mathbb{Z}^d$ et $a \in \Sigma^F$, le *cylindre* $[a]$ est l'ensemble

$$[a] := \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}; \pi_F(x) = a\}.$$

Définition

Un suite de cylindres $([a_n])_n$ est dite récursive s'il existe un algorithme qui pour n renvoie le mot a_n .

Extension du théorème de Mozes

Pour $F \subset \mathbb{Z}^d$ et $a \in \Sigma^F$, le *cylindre* $[a]$ est l'ensemble

$$[a] := \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}; \pi_F(x) = a\}.$$

Définition

Une suite de cylindres $([a_n])_n$ est dite récursive s'il existe un algorithme qui pour n renvoie le mot a_n .

Définition

Un sous-shift $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ est effectif s'il est le complémentaire d'une union d'une suite récursive de cylindres.

Extension du théorème de Mozes

La restriction d'une $\mathbb{Z}^d$ -action à l'action d'un sous-groupe $H < \mathbb{Z}^d$ est appelée *sous-action*.

Extension du théorème de Mozes

La restriction d'une $\mathbb{Z}^d$ -action à l'action d'un sous-groupe $H < \mathbb{Z}^d$ est appelée *sous-action*.

Théorème (Hochman, 08)

Un sous-shift X est effectif $\Leftrightarrow$ il est conjugué à une sous-action d'un sous-shift sofic.

En fait Hochman réalise chaque $\mathbb{Z}^d$ -sous-shift effectif par une $\mathbb{Z}^d$ -sous-action d'un $\mathbb{Z}^{d+2}$ -shift sofic.

Linéaire répétitivité

Définition

Une suite x est dite linéairement répétitive s'il existe une constante $L > 0$: pour tout motif P de x de diamètre $\leq R$

$$\forall m \in \mathbb{Z}^d, \quad \pi_{B_{LR}(m)}(x) \text{ contient le motif } P$$

Linéaire répétitivité

Définition

Une suite x est dite linéairement répétitive s'il existe une constante $L > 0$: pour tout motif P de x de diamètre $\leq R$

$$\forall m \in \mathbb{Z}^d, \quad \pi_{B_{LR}(m)}(x) \text{ contient le motif } P$$

Ex : suite substitutive

Linéaire répétitivité

Théorème (Cortez, Durand, P)

Si $x \in (\Sigma)^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-shift linéairement répétitif, alors il n'existe, à conjugaison près, qu'un nombre fini de sous-shifts apériodiques facteurs de $(\overline{O(x)}, \mathbb{Z}^d)$.

De plus chaque application facteur a un nombre uniformément borné (dépendant de L) de pré-images.