

Dynamiques symboliques sur $\mathbb{Z}^d$

Samuel Petite

Table des matières

1	Notions de base et exemples	1
1.1	Définitions	1
1.2	Sous-shift de type fini	2
1.2.1	Exemple de Ledrappier : SFT <i>algébrique</i>	3
1.2.2	Pavage de Wang en dimension $d = 2$	3
1.3	Substitution	5
2	Systèmes dynamiques	7
2.1	Définitions et propriétés	7
2.2	Propriétés des sous-shifts substitutifs	8
2.3	Application des systèmes dynamiques	9
2.4	Équivalence de systèmes dynamiques	10
2.5	Relation entre SFT et substitutions	10

Il s'agit d'une introduction à la dynamique symbolique en dimension $d \geq 2$, où nous présentons comment l'étude des systèmes dynamiques donne des propriétés combinatoires de ces systèmes, et inversement comment la combinatoire produit des exemples intéressants en dynamique.

Plus précisément, nous expliciterons les propriétés de base de sous-shifts de type fini et des substitutions symboliques. Nous regarderons principalement les structures et les fréquences des répétitions de motifs finis dans une suite fixée. Puis nous verrons que chaque système substitutif est un facteur d'un sous shift de type fini par une application presque injective. Il en résulte que ces systèmes sont mesurablement conjugués : ils possèdent les mêmes fréquences d'appartitions de motifs. C'est un comportement radicalement différent des systèmes symboliques sur $\mathbb{Z}$.

1 Notions de base et exemples

1.1 Définitions

Soient Σ un alphabet fini et $d \geq 1$ un entier, notons

$$\Sigma^{\mathbb{Z}^d} := \{(x_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}; x_m \in \Sigma \quad \forall m \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Par exemple pour la dimension $d = 2$, nous avons

```

0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1
0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1
0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1
0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1
0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0
0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0

```

L'ensemble Σ est muni de la topologie discrète. Ainsi $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la topologie produit est un espace métrique compact. Pour cette topologie, deux suites $(x_m)_m, (y_m)_m \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ sont proches si elles coïncident sur un grand motif autour de l'origine : *i.e*

$$x_m = y_m \quad \forall \|m\| \leq R.$$

Cette topologie reflète les propriétés combinatoires des suites. On espère alors utiliser les outils de la topologie pour donner des informations sur la combinatoire des suites.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, on définit un homéomorphisme

$$\begin{aligned} \sigma^n : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} &\rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \\ x = (x_m)_m &\mapsto \sigma^n(x) = (x_{n+m})_m \end{aligned}$$

Ceci donne une action continue du *décalage* (ou *shift*) sur $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$. Un ensemble $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ est dit *shift-invariant* si

$$\sigma^n(X) = X \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^d.$$

Par exemple, pour $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$, l'ensemble

$$X = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$$

est appelé *sous shift engendré par x*. Il est simple de remarquer que tout motif de $y \in X$ est alors un motif de x .

1.2 Sous-shift de type fini

Pour tout ensemble non vide $F \subset \mathbb{Z}^d$, on définit l'application

$$\pi_F : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \Sigma^F$$

comme la projection qui restreint chaque $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ à la fenêtre F .

Définition 1. Un ensemble $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ fermé et shift-invariant est appelé sous-shift de type fini (*subshift of finite type, SFT*) s'il existe un ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}^d$ et un ensemble de motifs $P \subset \Sigma^F$ tels que

$$X = X(F, P) = \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}; \pi_F \circ \sigma^n(x) \in P \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^d\}.$$

P est alors l'ensemble des motifs autorisés.

Exemple. Soit $\Sigma = \{1, \dots, r\}$ vu comme un ensemble de couleurs, et prenons $d = 2$. Soit X le SFT dont les éléments sont les suites t.q. deux termes adjacents ont une couleur différente, *i.e*

$$X = \{x_{(n,m)} \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}; x_{(n+1,m)} \neq x_{(n,m)} \text{ et } x_{(n,m+1)} \neq x_{(n,m)} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

- Pour $r = 2$, X a deux éléments (échiquier).
- Pour $r \geq 3$, X est non dénombrable.

Soit l'ensemble $\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $d = 2$. Définissons alors le sous-shift

[illegible]

1.2.2 Pavage de Wang en dimension $d = 2$

- $\mathbf{g}(m)$ désigne la couleur du côté gauche,
- $\mathbf{d}(m)$ désigne la couleur du côté droit,
- $\mathbf{h}(m)$ désigne la couleur du côté haut,
- $\mathbf{b}(m)$ désigne la couleur du côté bas.

Deux carrés $m, m' \in T$ peuvent s'intersecter le long d'un côté de même couleur : *i.e.*

L'ensemble des colorations admissibles $W_T \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ est un SFT appelé *sous-shift de Wang*. Par exemple, considérons les pavés de Wang donnés par la figure 1. Un pavage associé est un pavage par dominos comme dans la figure 2.



Problème du pavage. Étant donnée une famille T de pavés de Wang.

Pour répondre à cette question, Wang émet la conjecture suivante.

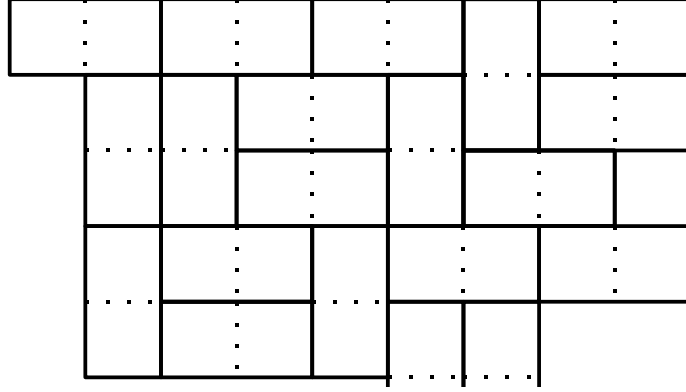


FIG. 2 – Pavage par dominos

Conjecture de Wang. Si $W_T \neq \emptyset$, alors il existe $x \in W_T$ périodique.

Une suite x est dite *périodique* s'il existe $n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ t.q. $\sigma^n(x) = x$.

En dimension 1, cette conjecture est vraie. En effet, si W_T est non vide, alors il existe un pavage de la droite $\mathbb{R}$ avec des pavés de T . En considérant $\text{card } T + 1$ pavés contigus dans ce pavage, il existe une répétition d'un type de pavé. Considérons alors le motif P délimité par les deux répétitions de ce pavé. La concaténation du motif P *ad infinitum* appartient bien à W_T et définit un pavage périodique de la droite $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1 (Wang, 1961). *Conjecture de Wang $\Rightarrow$ le problème du pavage est décidable.*

Ici, décidable signifie qu'il existe un algorithme qui, pour une famille finie T de pavés de Wang, teste si ces pavés peuvent paver le plan.

Idée de la preuve. Il suffit de réaliser un algorithme qui vérifie si les pavés T peuvent paver un parallélogramme de taille $n \times n$. Si cela est impossible ces pavés ne peuvent paver le plan. Sinon, on recherche un tel parallélogramme de sorte que le pavage périodique du plan obtenu en translatant ce parallélogramme par les vecteurs définissant son bord, vérifie bien les règles de Wang. Si un tel parallélogramme existe, l'algorithme s'arrête et W_T est non vide. Sinon, on effectue le même processus pour la taille supérieure de parallélogramme.

Si la conjecture de Wang est vraie, cet algorithme s'arrête.

Berger, un étudiant de Wang, démontra, dans sa thèse, que la conjecture de Wang est fausse pour $d \geq 2$ par le résultat suivant.

Théorème 1.1 (Berger, 1966). *Le problème du pavage est indécidable pour $d \geq 2$.*

Remarquons que ceci est radicalement différent de la dimension 1.

Berger donna ensuite un exemple explicite de pavés de Wang (avec environ 50 000 pavés) sans pavage périodique. Cet exemple a été par la suite simplifié. Le record actuel est détenu par Kari et Culik avec 13 pavés (voir figure 3), sans qu'on sache pour autant si ce nombre de pavés est optimal.

Les sous-shifts de Wang sont les exemples caractéristiques de SFT.

Théorème 1.2. *Tout sous-shift de type fini peut être représenté par un sous-shift de Wang.*

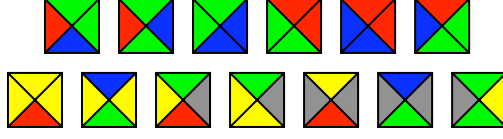


FIG. 3 – Pavés de de Culik

Preuve. Soit $X(F, P) \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ avec $F \subset \mathbb{Z}^2$ fini.

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $F \subset \{-r+1, \dots, r\}^2 = F'$. Soit alors $P' = \pi_{F'}(X(F, P))$.

$$\text{On a : } X(F, P) = X(F', P').$$

Chaque carré

$$\tau = \begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix} \in P', \quad A, B, C, D \text{ de taille } r \times r,$$

est vu comme un carré coloré de couleur $\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}$ le long des côtés horizontaux et $\begin{smallmatrix} A \\ C \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} B \\ D \end{smallmatrix}$ le long des côtés verticaux. $\square$

1.3 Substitution

Notons Σ^* l'ensemble des motifs finis sur l'alphabet Σ .

Définition 2 (Substitution). *C'est la donnée d'une application $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ t.q. pour $a \in \Sigma$*

$$\varphi(a) = \begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

où $n \geq 2$ indépendant de a , et $a_{i,j} \in \Sigma$.

On étend ensuite φ en une application $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.

L'ensemble

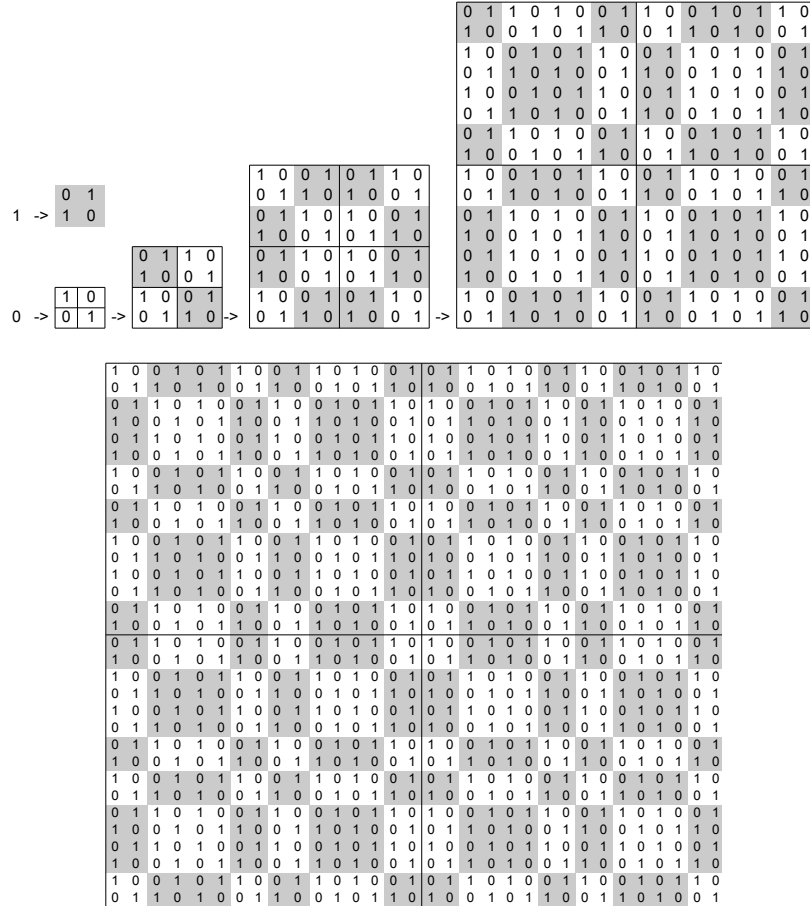
$$X_\varphi = \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^2}; \text{ tout motif de } x \text{ est un sous motif de } \varphi^n(a), n \geq 1, a \in \Sigma\}$$

est un sous-shift.

Proposition 1.2.

$$X_\varphi \neq \emptyset.$$

Preuve. Il suffit pour cela de construire un élément de X_φ . Nous allons le faire par un processus limite appelé *substitution* (voir dessin ci-dessous). Comme l'alphabet $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$ est fini, quitte à considérer un itéré de l'application φ et à ré-indicer les éléments de Σ , on peut supposer que $\varphi(a_1)$ a a_1 comme lettre centrale. On considère l'image par φ de la lettre a_1 . Puis on fait une homothétie de chaque carré d'un rapport n . On substitue ensuite chaque carré dilaté par son image par φ . En itérant ce processus de dilatation, on obtient des motifs $\varphi^k(a_1)$ de plus en plus grands. L'hypothèse faite sur φ implique que ces motifs coïncident sur des boules de plus en plus grandes. Ainsi ce processus converge vers un pavage de l'espace. $\square$



Définition 3. Pour $\Sigma = \{1, \dots, r\}$. La matrice de structure A de la substitution φ est la matrice $r \times r$ dont le terme

$$A_{i,j} = \text{nombre de couleur } i \text{ dans } \varphi(j).$$

Une substitution est dite *primitive* s'il existe $k > 0$ t.q. $A^k > 0$.

Comme nous avons vu, φ s'étend à une application sur $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$. De façon évidente, nous avons $\varphi(X_\varphi) \subset X_\varphi$.

On remarque sur la figure 4 qui représente un pavage obtenu par limite de substitution, qu'il se décompose en motifs qui sont des images des itérés de la substitution φ .

Proposition 1.3. Soient φ une substitution primitive et une suite $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$. Alors $x \in X_\varphi$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset X_\varphi$ t. q.

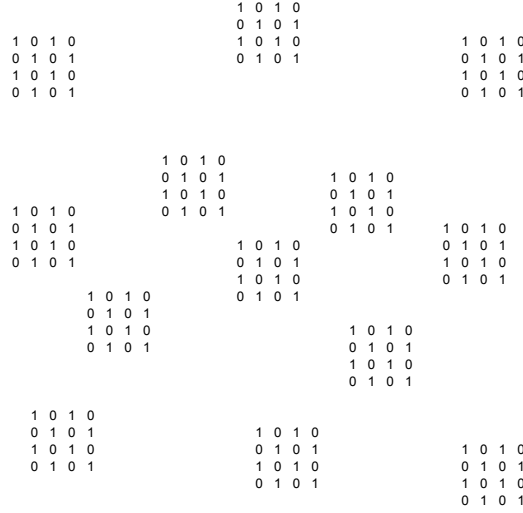
$$\varphi^n(x_n) = x, \quad \forall n \geq 1.$$

(i.e. x a une infinité de pré-images par φ .)

Preuve. Si $x \in X_\varphi$, $n \geq 1$. Pour tout motif fini P de x , par primitivité, il existe $k \geq 1$ t.q.

$$P \text{ est un sous motif de } \varphi^n(\varphi^k(1)).$$

Soit $y = \lim_k \varphi^k(1) \in X_\varphi$. On a $x = \varphi^n(y)$. □



Une suite $\mathbb{Z}^2$ -périodique est répétitive.

Le théorème suivant donne une caractérisation combinatoire de la minimalité.

Théorème 2.2 (Gottschalk, 1944). *Le sous shift $\overline{O(x)}$ est minimal si et seulement si la suite x est répétitive.*

Preuve. On suppose la suite x répétitive. Soient $y \in \overline{O(x)}$ et P le motif de x centré en l'origine et contenant une boule de rayon $n \geq 1$. Comme tout motif de y est un motif de x , tout motif de y suffisamment gros contient un translaté du motif de P . Donc un translaté de y coïncide avec x sur une boule de rayon n . Comme le rayon n est arbitraire, on en déduit que l'orbite de y est dense dans $\overline{O(x)}$.

Réciproquement, on suppose la minimalité. Si x n'est pas répétitif, alors il existe un motif P tel que pour tout rayon $R > 0$ il existe une boule de rayon R centrée en $m_R \in \mathbb{Z}^d$ de sorte que x restreint à cette boule ne contient pas le motif P . Par compacité, quitte à extraire une sous suite, la suite $(\sigma^{m_R}(x))_R$ converge (quand $R \rightarrow \infty$) vers un pavage $y \in \overline{O(x)}$ qui ne contient pas le motif P . Son orbite ne peut donc pas s'accumuler sur x . $\square$

2.2 Propriétés des sous-shifts substitutifs

Proposition 2.1. *Si φ est une substitution primitive, alors toute suite de X_φ est répétitive.*

Preuve. Quitte à considérer φ^k , on suppose $A > 0$. Soit P un motif de $x \in X$. Par primitivité, il existe un entier $k \geq 1$ t.q. P est un sous motif de $\varphi^k(a)$, $\forall a \in \Sigma$. Soit alors

$$R = \sup_{a \in \Sigma} 2 \operatorname{diam} (\operatorname{supp} \varphi^k(a)).$$

Par la proposition 1.3, il existe $x^{(k)} \in X_\varphi$ tel que $\varphi^k(x^{(k)}) = x$. Pour toute coordonnée $m \in \mathbb{Z}^d$, le motif x_m appartient à un motif de la forme $\varphi^k(x_n^{(k)})$ pour une certaine coordonnée $n \in \mathbb{Z}^d$. Il existe donc une occurrence de P dans x à une distance inférieure à R de m . $\square$

En fait, il est possible de prouver un peu mieux :

Proposition 2.2. *Si la substitution φ est primitive, alors le sous-shift X_φ est minimal.*

Pour être plus complet sur les propriétés des substitutions, citons les résultats suivants.

Théorème 2.3. *Pour une substitution φ .*

Le nombre de motifs de taille $n \times m$ est polynomial en n, m .

Si φ est primitive, alors pour chaque suite $x \in X_\varphi$, chaque motif F apparaît avec une fréquence uniforme en x i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'occurrences de } F \text{ dans } \pi_{[-n,n]^2}(x)}{(2n+1)^2} \text{ converge.}$$

La dernière propriété est appelée *unique ergodicité*. Elle montre que l'espace X_φ est statistiquement homogène. On ne peut pas distinguer les éléments de X_φ d'un point de vue statistique. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il s'agit d'une propriété topologique. Le cours de Fabien Durand donne une preuve et une version plus précise de ce théorème.

2.3 Application des systèmes dynamiques

Citons le fameux théorème de multirécurrence dû à Furstenberg.

Théorème 2.4 (Multirécurrence, Furstenberg). *Si X est un espace métrique compact et $T_i : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, n$, sont n homéomorphismes t.q.*

$$T_i \circ T_j = T_j \circ T_i, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Alors, il existe $x \in X$ et une suite d'entiers $n_p \rightarrow_{p \rightarrow \infty} +\infty$ t.q.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_i^{n_p}(x) = x, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Le principal tour de force de ce théorème réside dans l'uniformité de la suite $(n_p)_p$ par rapport à l'indice $1 \leq i \leq n$.

Nous allons chercher à l'appliquer. Pour cela, soient $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ et $X = \overline{\{\sigma^n(x); n \in \mathbb{Z}^d\}} \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$. Soit $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ et définissons

$$T_i = \sigma^{u_i}.$$

Alors par le théorème de multirécurrence de Furstenberg, il existe $y \in X$, t.q. pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $k \geq 1$ t.q.

$$\sigma^{k \cdot u_i}(y) \simeq y \text{ à } \epsilon \text{ près, pour tout } i.$$

Autrement dit y et $\sigma^{k \cdot u_i}(y)$ coïncident sur un grand motif de support $1/\epsilon$. Comme x a les mêmes motifs que y , nous venons donc de prouver le théorème combinatoire suivant.

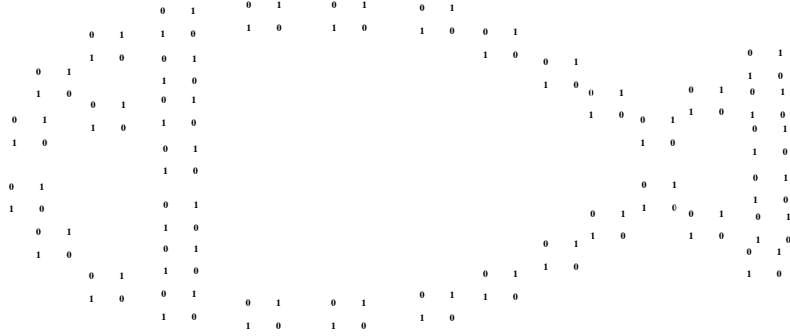
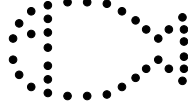
Théorème 2.5. *Soit $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$.*

Pour tout ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}^d$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ et un motif P de x t.q.

- *le support de P contient une boule de rayon $1/\epsilon$,*
- *pour tout $\vec{u} \in F$,*

$$P + n\vec{u} \text{ est un motif de } x.$$

Une illustration de ce théorème est donnée par le dessin ci-après, où pour un ensemble de points F donné, il existe un motif qui se répète selon une homothétie de l'ensemble F .



2.4 Équivalence de systèmes dynamiques

Définition 6. Une application continue $G: X \rightarrow Y$ entre deux sous-shifts, surjective et commutant avec le shift, i.e.

$$G \circ \sigma^n = \sigma^n \circ G \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d,$$

est appelée application facteur.

On dit alors que le sous-shift Y est *facteur* de X .

Définition 7. Si de plus G est bijective, alors G est une conjugaison et les sous-shifts sont dits topologiquement conjugués.

Les systèmes dynamiques considèrent les systèmes modulo conjugaison.

Soient $F \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini et une application locale $g: \Sigma^F \rightarrow \Sigma'$ sur un alphabet Σ' .

Cette application induit une application globale continue $G: \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \Sigma'^{\mathbb{Z}^d}$, par

$$G(x)_m = g(\pi_F(\sigma^m x)) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^d.$$

G est appelée fonction de bloc glissant (*sliding bloc codes*). Une fonction de bloc glissant G commute avec l'action. Il se trouve que la réciproque est vraie.

Théorème 2.6 (Hedlund). Une application facteur entre deux sous-shifts est une fonction de bloc glissant.

On remarquera que, de ce fait, la classe des SFT est invariante par conjugaison.

2.5 Relation entre SFT et substitutions

Théorème 2.7 (Mozes, 1989). Soit φ une substitution en dimension 2, alors le sous-shift X_φ est un facteur d'un sous-shift de type fini $X(F, P)$.

De plus l'application facteur G est presque injective, mesurablement et topologiquement.

L'ensemble des points ayant une seule pré-image $\{y \in X_\varphi; \#G^{-1}(y) = 1\}$ est générique d'un point de vue topologique et mesurable, i.e. c'est une intersection dénombrable d'ouverts denses de mesures totales. Pour ces deux sous-shifts, les fréquences des motifs correspondants sont identiques.

Ce théorème se généralise en toute dimension supérieure.

On constate qu'un tel SFT est très différent d'un full shift $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ qui lui n'est pas uniquement ergodique. Mentionnons également le théorème ci-après qui montre que pour un SFT uniquement ergodique, son nombre de motifs ne croît pas comme celui d'un full shift.

Théorème 2.8 (Miękisz, Radin, 1991). *Soit X un sous-shift de type fini de $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$. Si X est uniquement ergodique, alors il existe $K > 0$ t.q.*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(X)}{(\text{card } \Sigma)^{Kn^{d-1}}} < +\infty,$$

où $N_n(X)$ désigne le nombre de motif de taille $n \times \dots \times n$ dans X .

Ce résultat implique en particulier qu'un SFT uniquement ergodique est d'entropie topologique nulle (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(N_n(X))/n^d = 0$).

Dans le cas de la dimension 1, comme un sous-shift de type fini contient des orbites périodiques, s'il est uniquement ergodique alors il est réduit à une seule orbite périodique et sa complexité est bornée.

Preuve. Nous allons le faire en dimension 2, mais la preuve se généralise aisément aux dimensions supérieures. De plus, par la propriété 1.2 il suffit de se restreindre au cas des pavages de Wang.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(x)}{(\#\Sigma)^{n^2 - (n-2)^2}} = +\infty.$$

Cela signifie qu'il existe un entier n_1 tel que $N_{n_1} > (\#\Sigma)^{n_1^2 - (n_1-1)^2}$; ainsi il existe deux motifs C_{1,n_1} et C_{2,n_1} dont le support est un carré $[1, n_1] \times [1, n_1]$ de taille $n_1 \times n_1$ qui coïncident sur le bord de ce carré $[1, n_1] \times [1, n_1] \setminus [2, n_1 - 1] \times [2, n_1 - 1]$.

Comme le sous-shift X est uniquement ergodique, pour tout $x \in X$ la limite suivante existe et est indépendante de x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'occurrences de } C_{1,n_1} \text{ dans } \pi_{[-n,n]^2}(x)}{(2n+1)^2} = \mu(C_{1,n_1}).$$

Construisons alors la suite y à partir de x en remplaçant chaque motif disjoint de la forme C_{1,n_1} de x par le motif C_{2,n_1} . La suite $y \in X$ car les motifs C_{1,n_1} et C_{2,n_1} coïncident sur leur bord et vérifie donc les règles du pavage de Wang.

Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'occurrences de } C_{1,n_1} \text{ dans } \pi_{[-n,n]^2}(y)}{(2n+1)^2} < \mu(C_{1,n_1}),$$

ce qui est une contradiction avec l'unique ergodicité. □

Références

- [LS] D. LIND, K. SCHMIDT. *Symbolic and algebraic dynamical systems..* In Handbook of Dynamical Systems, ed. B. Hasselblatt and A. Katok, vol. 1A, 2002, 765-812
- [Q] M. QUEFFÉLEC. *Substitution, dynamical systems-spectral analysis*, LNM, vol. 1294, 1987
- [R] E. ARTHUR ROBINSON. *Symbolic Dynamics and Tilings of $\mathbb{R}^d$* . 81–119, Proc. Sympos. Appl. Math., 60, AMS