

Définition

Un **graphe non-orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble et A est un ensemble de parties de S ayant 1 ou 2 éléments :

$$A \subset \{B \in \mathcal{P}(S) \mid \text{Card}(B) = 1 \text{ ou } 2\}.$$

Définition

Un **graphe non-orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble et A est un ensemble de parties de S ayant 1 ou 2 éléments :

$$A \subset \{B \in \mathcal{P}(S) \mid \text{Card}(B) = 1 \text{ ou } 2\}.$$

Ex:

Définition

Un **graphe non-orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble et A est un ensemble de parties de S ayant 1 ou 2 éléments :

$$A \subset \{B \in \mathcal{P}(S) \mid \text{Card}(B) = 1 \text{ ou } 2\}.$$

Ex:

► $S = \{1; 2; 3; 4\}$

Définition

Un **graphe non-orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble et A est un ensemble de parties de S ayant 1 ou 2 éléments :

$$A \subset \{B \in \mathcal{P}(S) \mid \text{Card}(B) = 1 \text{ ou } 2\}.$$

Ex:

- ▶ $S = \{1; 2; 3; 4\}$
- ▶ $A = \{\{2, 1\}; \{2\}; \{3, 1\}; \{3, 2\}; \{3\}; \{4, 1\}; \{4, 2\}; \{4, 3\}\}.$

Encore des définitions

On appellera :

- ▶ S l'ensemble des **sommets** de G ;

Encore des définitions

On appellera :

- ▶ S l'ensemble des **sommets** de G ;
- ▶ A l'ensemble des **arêtes** de G .

Encore des définitions

On appellera :

- ▶ S l'ensemble des **sommets** de G ;
- ▶ A l'ensemble des **arêtes** de G .
- ▶ Les **extrémités** de l'arête $\{x\}$ sont x et x .

Encore des définitions

On appellera :

- ▶ S l'ensemble des **sommets** de G ;
- ▶ A l'ensemble des **arêtes** de G .
- ▶ Les **extrémités** de l'arête $\{x\}$ sont x et x .
- ▶ Les **extrémités** de l'arête $\{x, y\}$ sont x et y .

Encore des définitions

On appellera :

- ▶ S l'ensemble des **sommets** de G ;
- ▶ A l'ensemble des **arêtes** de G .
- ▶ Les **extrémités** de l'arête $\{x\}$ sont x et x .
- ▶ Les **extrémités** de l'arête $\{x, y\}$ sont x et y .
- ▶ Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant pour extrémités x , les boucles $\{x\}$ étant comptées deux fois.

Encore des définitions

On appellera :

- ▶ S l'ensemble des **sommets** de G ;
- ▶ A l'ensemble des **arêtes** de G .
- ▶ Les **extrémités** de l'arête $\{x\}$ sont x et x .
- ▶ Les **extrémités** de l'arête $\{x, y\}$ sont x et y .
- ▶ Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant pour extrémités x , les boucles $\{x\}$ étant comptées deux fois.

Une remarque : Dans un graphe non orienté les notions de successeurs et de prédécesseurs, ou de degrés entrant et sortant, n'ont plus de signification.

Représentation sagittale

La **représentation sagittale** d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est la représentation graphique où les sommets sont représentés par des points et les arêtes, $\{x\}$ ou $\{x, y\}$, par des segments joignant x à x (**boucle**) ou x à y , respectivement.

Représentation sagittale. Exemple

$$S = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$A = \{\{2, 1\}; \{2\}; \{3, 1\}; \{3, 2\}; \{3\}; \{4, 1\}; \{4, 2\}; \{4, 3\}\}.$$

Représentation sagittale. Exemple

$$S = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$A = \{\{2, 1\}; \{2\}; \{3, 1\}; \{3, 2\}; \{3\}; \{4, 1\}; \{4, 2\}; \{4, 3\}\}.$$

2

4

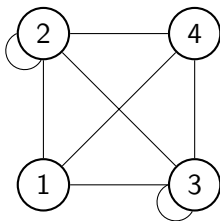
1

3

Représentation sagittale. Exemple

$$S = \{1; 2; 3; 4\}$$

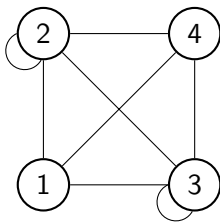
$$A = \{\{2, 1\}; \{2\}; \{3, 1\}; \{3, 2\}; \{3\}; \{4, 1\}; \{4, 2\}; \{4, 3\}\}.$$



Représentation sagittale. Exemple

$$S = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$A = \{\{2, 1\}; \{2\}; \{3, 1\}; \{3, 2\}; \{3\}; \{4, 1\}; \{4, 2\}; \{4, 3\}\}.$$



$$d(1) = 3$$

$$d(2) = 5$$

Matrice d'adjacence d'un graphe

On appelle **matrice d'adjacence d'un graphe** (non orienté) d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n , la matrice $M = (M_{x,y})$ d'ordre n dont le coefficient $M_{x,y}$ situé à la x -ème ligne et la y -ème colonne est égal au nombre d'arêtes d'extrémités x et y .

Lemme des poignées dans le cas non-orienté

Théorème (Lemme des poignées de mains:cas des graphes non-orientés)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté de taille m . Alors, nous avons

$$\sum_{x \in S} d(x) = 2m = 2 \text{nombre d'arêtes.}$$

Toujours du vocabulaire

Un graphe **simple** est un graphe orienté ou non sans boucle.

Toujours du vocabulaire

Un graphe **simple** est un graphe orienté ou non sans boucle.

Une remarque : Lorsque les arêtes ou les flèches représentent un coût (en argent, en temps, ...) il est intéressant de pouvoir leur attribuer un nombre. Ceci justifie la définition suivante.

Toujours du vocabulaire

Un graphe **simple** est un graphe orienté ou non sans boucle.

Une remarque : Lorsque les arêtes ou les flèches représentent un coût (en argent, en temps, ...) il est intéressant de pouvoir leur attribuer un nombre. Ceci justifie la définition suivante.

Un **graphe valué** est un triplet $G = (S, A, f)$ où (S, A) est un graphe, orienté ou non, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Encore des matrices

Ce graphe peut-être représenté par la **matrice des valuations** V d'ordre l'ordre de G définie par:

$$V_{x,y} = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in A, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la **représentation sagittale** de G on ajoutera les valeurs des valuations sur les arcs ou arêtes correspondantes.

Définition

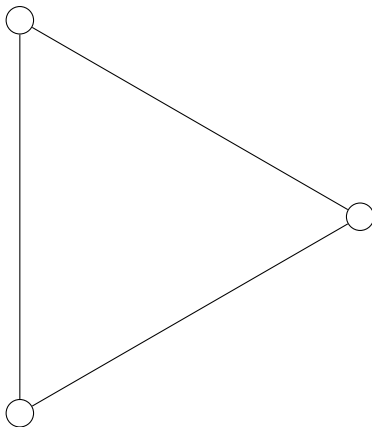
On appelle **graphe complet à n sommets**, orienté ou non, le graphe simple d'ordre n ayant le plus d'arcs ou d'arêtes.

Définition

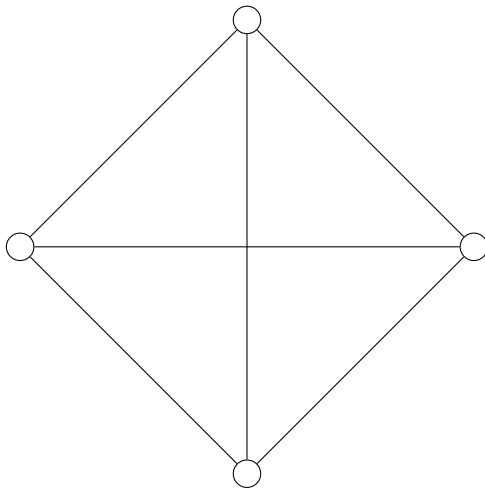
On appelle **graphe complet à n sommets**, orienté ou non, le graphe simple d'ordre n ayant le plus d'arcs ou d'arêtes.

Ce graphe est noté K_n .

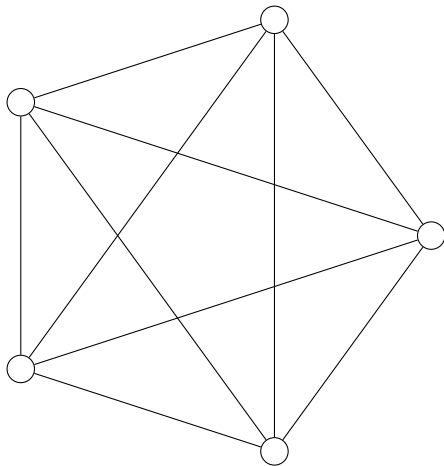
Le graphe complet K_3



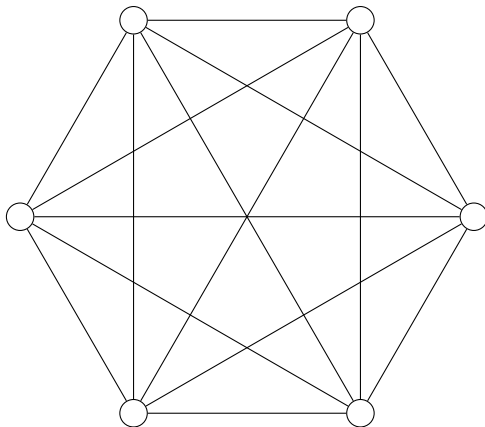
Le graphe complet K_4



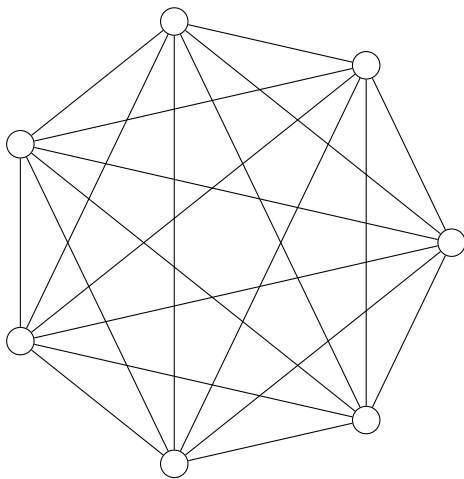
Le graphe complet K_5



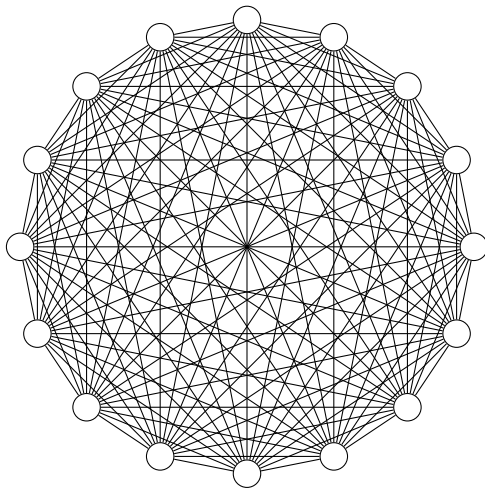
Le graphe complet K_6



Le graphe complet K_7



Le graphe complet K_{16}

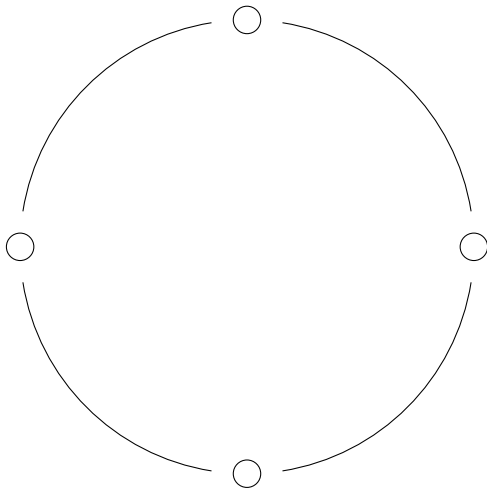


le graphe cyclique

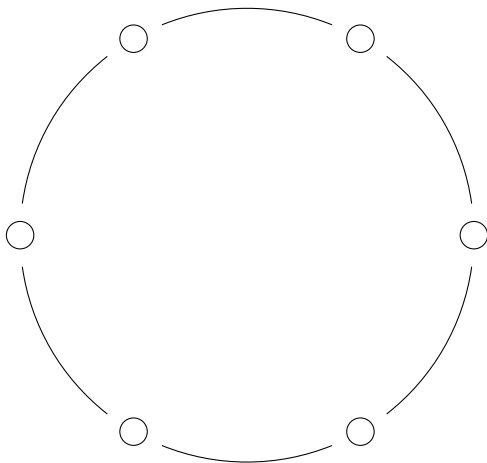
Le **graphe cyclique** C_n est le graphe à $n \geq 1$ sommets $\{1, \dots, n\}$ avec les arêtes

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}.$$

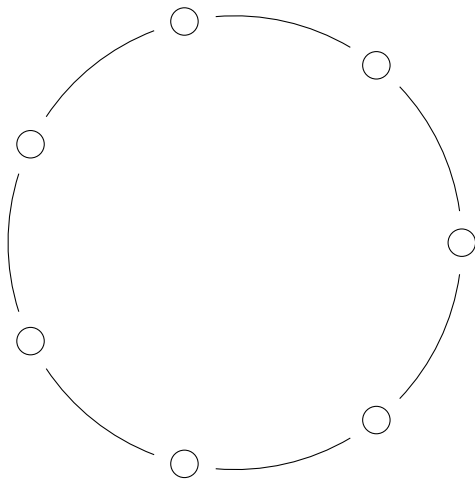
le graphe cyclique C_4



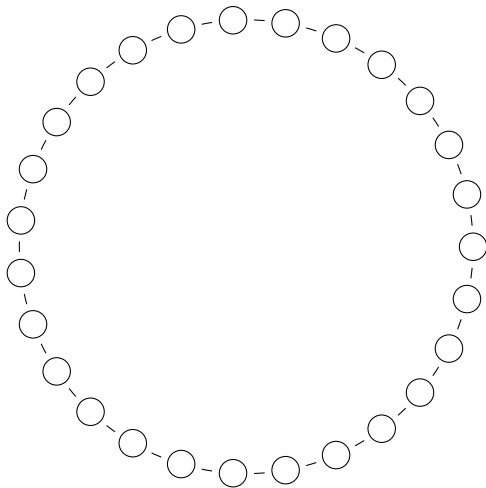
le graphe cyclique C_6



le graphe cyclique C_7



le graphe cyclique C_{27}

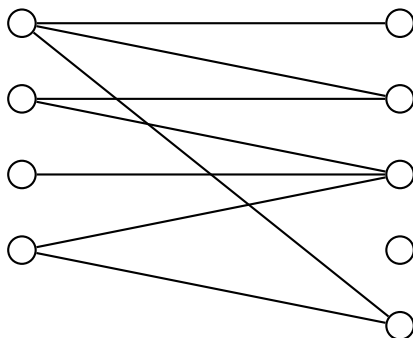


Graphe biparti

Un graphe $g = (S, A)$ est **biparti** s'il existe une partition de ces sommets $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ telle que chaque arête ait une extrémité dans S_1 et l'autre dans S_2 .

Graphe biparti

Un graphe $g = (S, A)$ est **biparti** s'il existe une partition de ces sommets $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ telle que chaque arête ait une extrémité dans S_1 et l'autre dans S_2 .



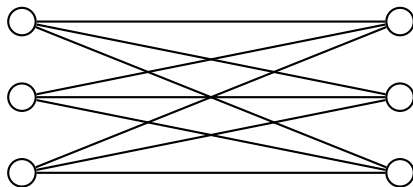
Graphe biparti complet

Le graphe **biparti complet** entre un ensemble de n sommets et un ensemble à m sommets est le graphe simple tel que chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet du deuxième ensemble. On le note $K_{n,m}$.

Graphe biparti complet

Le graphe **biparti complet** entre un ensemble de n sommets et un ensemble à m sommets est le graphe simple tel que chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet du deuxième ensemble. On le note $K_{n,m}$.

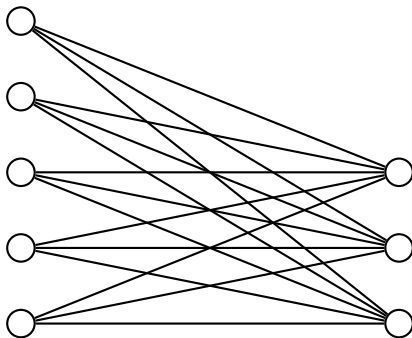
Le graphe biparti $K_{3,3}$



Graphe biparti complet

Le graphe **biparti complet** entre un ensemble de n sommets et un ensemble à m sommets est le graphe simple tel que chaque sommet du premier ensemble est relié à chaque sommet du deuxième ensemble. On le note $K_{n,m}$.

Le graphe biparti $K_{3,5}$



Définition

Parfois il est intéressant de ne considérer qu'une partie d'un graphe. Il y a deux manières à envisager, soit on élimine des sommets, ou, des arcs ou arêtes.

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

- Un **graphe partiel** de G est un graphe $G' = (S, A')$ où A' est un sous-ensemble de A .

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

- ▶ Un **graphe partiel** de G est un graphe $G' = (S, A')$ où A' est un sous-ensemble de A .
- ▶ Un **sous-graphe** de G est un graphe $G' = (S', A')$ où S' est un sous-ensemble de S et A' contenant uniquement les arcs ou arêtes joignant les sommets de S' ; c'est-à-dire:

$$G = (S', A') \text{ avec } S' \subset S \text{ et}$$

$$A' = \{(x, y) \in A \mid x \in S' \text{ et } y \in S'\}.$$

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

- ▶ Un **graphe partiel** de G est un graphe $G' = (S, A')$ où A' est un sous-ensemble de A .
- ▶ Un **sous-graphe** de G est un graphe $G' = (S', A')$ où S' est un sous-ensemble de S et A' contenant uniquement les arcs ou arêtes joignant les sommets de S' ; c'est-à-dire:

$$G = (S', A') \text{ avec } S' \subset S \text{ et}$$

$$A' = \{(x, y) \in A \mid x \in S' \text{ et } y \in S'\}.$$

Observation : Un graphe partiel de G a donc les mêmes sommets que G .

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

Définitions

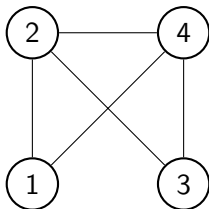
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

Une **clique** est un sous-graphe complet de G .

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

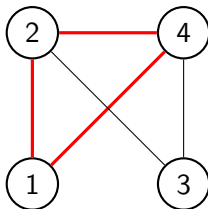
Une **clique** est un sous-graphe complet de G .



Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

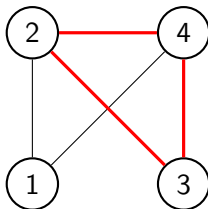
Une **clique** est un sous-graphe complet de G .



Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

Une **clique** est un sous-graphe complet de G .



Coloration

Les définitions introduites ci-dessous prennent un intérêt, pour des problèmes d'incompatibilité. Par exemple :

- ▶ Organiser un examen suivant différentes matières.
- ▶ Optimiser l'utilisation de machines en parallèles.
- ▶ Faire cohabiter des animaux ou des humains suivant leurs incompatibilités.
- ▶ Résolution de Sudoku.
- ▶ ...

Coloration d'un graphe

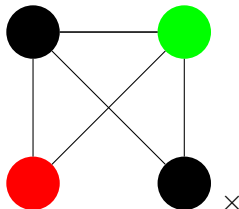
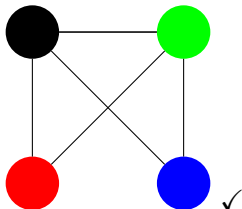
Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non-orienté.

Colorer le graphe G consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets reliés par un arc ou une arête aient des couleurs différentes.

Coloration d'un graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non-orienté.

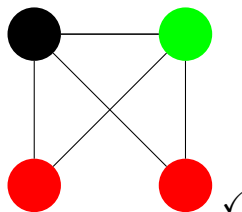
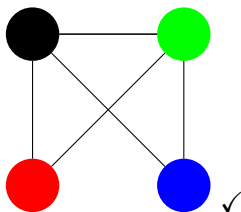
Colorer le graphe G consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets reliés par un arc ou une arête aient des couleurs différentes.



Coloration d'un graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non-orienté.

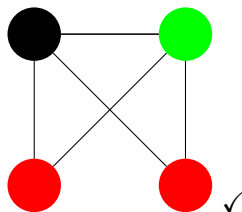
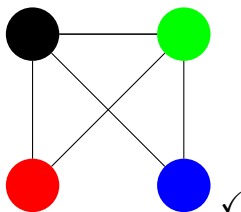
Colorer le graphe G consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets reliés par un arc ou une arête aient des couleurs différentes.



Coloration d'un graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non-orienté.

Colorer le graphe G consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets reliés par un arc ou une arête aient des couleurs différentes.



Le nombre minimal de couleur est appelé le **nombre chromatique** et est noté $\chi(G)$.

Ici $\chi(G) = 3$.

Remarques

- ▶ Les graphes avec des boucles ne sont pas coloriables.

Remarques

- ▶ Les graphes avec des boucles ne sont pas coloriables.
- ▶ Il est toujours possible de colorer un graphe **simple** puisqu'il suffit de prendre autant de couleurs que de sommets. Le nombre chromatique est donc plus petit que l'ordre de G et est par conséquent bien défini.

Remarques

- ▶ Les graphes avec des boucles ne sont pas coloriables.
- ▶ Il est toujours possible de colorer un graphe **simple** puisqu'il suffit de prendre autant de couleurs que de sommets. Le nombre chromatique est donc plus petit que l'ordre de G et est par conséquent bien défini.
- ▶ Les sommets d'une clique doivent être coloriés d'une couleur différente.
Le nombre chromatique d'une clique est donc égal à l'ordre de la clique.
Si l'on a trouvé une clique d'ordre k dans le graphe G , alors

$$\chi(G) \geq k.$$

Coloration d'un graphe

De même, **colorer les arêtes du graphe G** consiste à

- ▶ attribuer une couleur (ou un nombre) à chacune des arêtes.
- ▶ deux arêtes reliées au même sommet ont des couleurs différentes.

Coloration d'un graphe

De même, **colorer les arêtes du graphe** G consiste à

- ▶ attribuer une couleur (ou un nombre) à chacune des arêtes.
- ▶ deux arêtes reliées au même sommet ont des couleurs différentes.

Le nombre minimal de couleur est appelé l'**indice chromatique** du graphe G et est noté $\chi'(G)$.

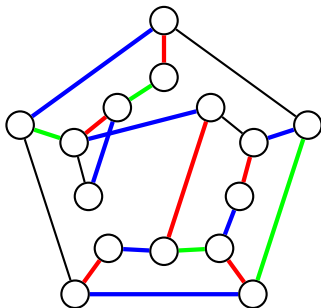
Coloration d'un graphe

De même, **colorer les arêtes du graphe** G consiste à

- ▶ attribuer une couleur (ou un nombre) à chacune des arêtes.
- ▶ deux arêtes reliées au même sommet ont des couleurs différentes.

Le nombre minimal de couleur est appelé l'**indice chromatique** du graphe G et est noté $\chi'(G)$.

Exemple:



ici $\chi'(G) = 4$ (Pourquoi ?)

Théorème (Vizing)

Si G est un graphe simple, alors

$$\max_{s \text{ sommet de } G} d(s) \leq \chi'(G) \leq 1 + \max_{s \text{ sommet de } G} d(s).$$