

Théorie des graphes

Samuel Petite¹

¹Université de Picardie Jules Verne

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches.

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique.

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique. Ils permettent de résoudre algorithmiquement des problèmes pour de nombreuses applications :

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique. Ils permettent de résoudre algorithmiquement des problèmes pour de nombreuses applications :

1. Les réseaux: routiers, ferroviaires, téléphoniques, informatique, web, sociaux, etc ...

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique. Ils permettent de résoudre algorithmiquement des problèmes pour de nombreuses applications :

1. Les réseaux: routiers, ferroviaires, téléphoniques, informatique, web, sociaux, etc ...
2. Circuits électroniques;

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique. Ils permettent de résoudre algorithmiquement des problèmes pour de nombreuses applications :

1. Les réseaux: routiers, ferroviaires, téléphoniques, informatique, web, sociaux, etc ...
2. Circuits électroniques;
3. Problèmes de coloration de cartes;

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique. Ils permettent de résoudre algorithmiquement des problèmes pour de nombreuses applications :

1. Les réseaux: routiers, ferroviaires, téléphoniques, informatique, web, sociaux, etc ...
2. Circuits électroniques;
3. Problèmes de coloration de cartes;
4. Construction d'emploi du temps.

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique. Ils permettent de résoudre algorithmiquement des problèmes pour de nombreuses applications :

1. Les réseaux: routiers, ferroviaires, téléphoniques, informatique, web, sociaux, etc ...
2. Circuits électroniques;
3. Problèmes de coloration de cartes;
4. Construction d'emploi du temps.
5. Problèmes d'ordonnancement de tâches (constructions de ponts, ...)

Modélisation

La **modélisation mathématique** consiste à représenter des situations diverses par d'objets mathématiques simples mais riches. Les **graphes** sont des objets standards de la modélisation mathématique. Ils permettent de résoudre algorithmiquement des problèmes pour de nombreuses applications :

1. Les réseaux: routiers, ferroviaires, téléphoniques, informatique, web, sociaux, etc ...
2. Circuits électroniques;
3. Problèmes de coloration de cartes;
4. Construction d'emploi du temps.
5. Problèmes d'ordonnancement de tâches (constructions de ponts, ...)
6. ...

Coefficients

Graphes et Langages : coef 2,5

Répartition:

Coefficients

Graphes et Langages : coef 2,5

Répartition:

- ▶ 2 partiels : $1 = 2 \times 0,5$

Coefficients

Graphes et Langages : coef 2,5

Répartition:

- ▶ 2 partiels : $1 = 2 \times 0,5$
- ▶ 1 examen final : 1,2

Coefficients

Graphes et Langages : coef 2,5

Répartition:

- ▶ 2 partiels : $1 = 2 \times 0,5$
- ▶ 1 examen final : 1,2
- ▶ 3 Interrogations WIMS en ligne : $0,3 = 3 \times 0,1$

Plateforme WIMS

Classe : IUT-graphes2019

Mot de passe : GIUT2019

Plateforme WIMS

Classe : IUT-graphes2019

Mot de passe : GIUT2019

- ▶ aller sur wims.math.cnrs.fr

Plateforme WIMS

Classe : IUT-graphes2019

Mot de passe : GIUT2019

- ▶ aller sur wims.math.cnrs.fr
- ▶ chercher la classe : IUT-graphes2019

Plateforme WIMS

Classe : IUT-graphes2019

Mot de passe : GIUT2019

- ▶ aller sur wims.math.cnrs.fr
- ▶ chercher la classe : IUT-graphes2019
- ▶ Entrer

Plateforme WIMS

Classe : IUT-graphes2019

Mot de passe : GIUT2019

- ▶ aller sur wims.math.cnrs.fr
- ▶ chercher la classe : IUT-graphes2019
- ▶ Entrer
- ▶ Creez vous comme nouveau participant

Plateforme WIMS

Classe : IUT-graphes2019

Mot de passe : GIUT2019

- ▶ aller sur wims.math.cnrs.fr
- ▶ chercher la classe : IUT-graphes2019
- ▶ Entrer
- ▶ Creez vous comme nouveau participant
- ▶ Il vous faut le mot de passe de la classe : GIUT2019

Plateforme WIMS

Classe : IUT-graphes2019

Mot de passe : GIUT2019

- ▶ aller sur wims.math.cnrs.fr
- ▶ chercher la classe : IUT-graphes2019
- ▶ Entrer
- ▶ Creez vous comme nouveau participant
- ▶ Il vous faut le mot de passe de la classe : GIUT2019
- ▶ ensuite c'est simple.

Plateforme WIMS

Date limite pour réaliser les interrogations WIMS :

Interrogation 1 WIMS : 24 février 2019

Interrogation 2 WIMS : 21 avril 2019

Interrogation 2 WIMS : 26 mai 2019

Définitions

Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

- ▶ S est un ensemble dont les éléments $x \in S$ sont appelés **sommets** du graphe G ;

Définitions

Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

- ▶ S est un ensemble dont les éléments $x \in S$ sont appelés **sommets** du graphe G ;
- ▶ A est un sous-ensemble de $S \times S$ dont les éléments (x, y) sont appelés les **arcs** du graphe G .

Définitions

Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

- ▶ S est un ensemble dont les éléments $x \in S$ sont appelés **sommets** du graphe G ;
- ▶ A est un sous-ensemble de $S \times S$ dont les éléments (x, y) sont appelés les **arcs** du graphe G .

Ex:

- ▶ $S = \{1; 2; 3; 4\}$

Définitions

Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

- ▶ S est un ensemble dont les éléments $x \in S$ sont appelés **sommets** du graphe G ;
- ▶ A est un sous-ensemble de $S \times S$ dont les éléments (x, y) sont appelés les **arcs** du graphe G .

Ex:

- ▶ $S = \{1; 2; 3; 4\}$
- ▶ $A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}.$

Représentation sagittale

La **représentation sagittale** d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est la représentation graphique où les sommets sont représentés par des points et les arcs (x, y) par des flèches allant de x vers y .

Représentation sagittale. Exemple

$$S = \{1; 2; 3; 4\},$$

$$A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}.$$

Représentation sagittale. Exemple

③

②

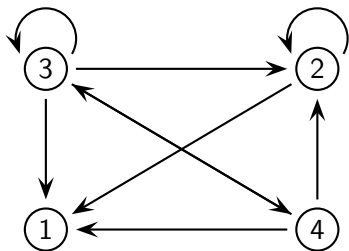
①

④

$$S = \{1; 2; 3; 4\},$$

$$A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}.$$

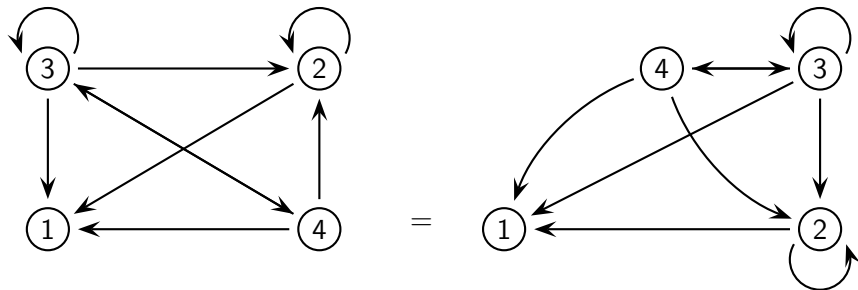
Représentation sagittale. Exemple



$$S = \{1; 2; 3; 4\},$$

$$A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}.$$

Représentation sagittale. Exemple



$$S = \{1; 2; 3; 4\},$$

$$A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}.$$

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .
- ▶ $G(x)$ est l'ensemble des successeurs de x .

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .
- ▶ $G(x)$ est l'ensemble des successeurs de x .
- ▶ $G_{-1}(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x .

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .
- ▶ $G(x)$ est l'ensemble des successeurs de x .
- ▶ $G_{-1}(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x .
- ▶ $d^+(x) = \text{Card}G(x)$, c'est-à-dire que $d^+(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour origine x . C'est le **degré sortant** de x .

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .
- ▶ $G(x)$ est l'ensemble des successeurs de x .
- ▶ $G_{-1}(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x .
- ▶ $d^+(x) = \text{Card}G(x)$, c'est-à-dire que $d^+(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour origine x . C'est le **degré sortant de** x .
- ▶ $d^-(x) = \text{Card}G_{-1}(x)$, c'est-à-dire que $d^-(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour fin x . C'est le **degré entrant de** x .

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .
- ▶ $G(x)$ est l'ensemble des successeurs de x .
- ▶ $G_{-1}(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x .
- ▶ $d^+(x) = \text{Card}G(x)$, c'est-à-dire que $d^+(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour origine x . C'est le **degré sortant de** x .
- ▶ $d^-(x) = \text{Card}G_{-1}(x)$, c'est-à-dire que $d^-(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour fin x . C'est le **degré entrant de** x .
- ▶ $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$, c'est le **degré** de x .

Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .
- ▶ $G(x)$ est l'ensemble des successeurs de x .
- ▶ $G_{-1}(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x .
- ▶ $d^+(x) = \text{Card}G(x)$, c'est-à-dire que $d^+(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour origine x . C'est le **degré sortant de** x .
- ▶ $d^-(x) = \text{Card}G_{-1}(x)$, c'est-à-dire que $d^-(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour fin x . C'est le **degré entrant de** x .
- ▶ $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$, c'est le **degré** de x .
- ▶ l'**ordre** de G est $\text{Card}(S)$, c'est-à-dire le nombre de sommets.

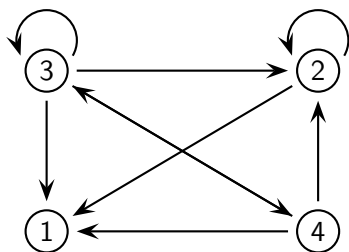
Vocabulaire

- ▶ Pour $a = (x, y)$ dans A on dira que
 - ▶ x et y sont les **extrémités** de a ;
 - ▶ x est l'**origine** (ou le **début**) de a ;
 - ▶ y est la **fin** de a ;
 - ▶ y est un **successeur** de x ;
 - ▶ x est un **prédécesseur** de y .
 - ▶ Si $x = y$, a est appelé **boucle** de G .
- ▶ $G(x)$ est l'ensemble des successeurs de x .
- ▶ $G_{-1}(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x .
- ▶ $d^+(x) = \text{Card}G(x)$, c'est-à-dire que $d^+(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour origine x . C'est le **degré sortant de** x .
- ▶ $d^-(x) = \text{Card}G_{-1}(x)$, c'est-à-dire que $d^-(x)$ est le nombre d'arcs ayant pour fin x . C'est le **degré entrant de** x .
- ▶ $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$, c'est le **degré** de x .
- ▶ l'**ordre** de G est $\text{Card}(S)$, c'est-à-dire le nombre de sommets.
- ▶ la **taille** de G est $\text{Card}(A)$, c'est-à-dire le nombre d'arcs.

Vocabulaire

$$S = \{1; 2; 3; 4\},$$

$$A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}.$$



$$d^+(1) = 0, \quad d^-(1) = 3, \quad d(1) = 3$$

$$d^+(2) = 2, \quad d^-(2) = 3, \quad d(2) = 5$$

Représentation matricielle

On appelle **matrice d'adjacence d'un graphe orienté**

$(\{1, \dots, n\}, A)$, la matrice $M = (m_{x,y}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ d'ordre n telle que

$m_{x,y}$ = nombre de flèches d'origine x et de fin y .

Représentation matricielle

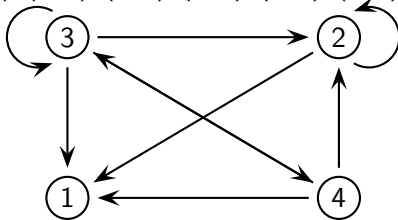
On appelle **matrice d'adjacence d'un graphe orienté**

$(\{1, \dots, n\}, A)$, la matrice $M = (m_{x,y}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ d'ordre n telle que

$m_{x,y}$ = nombre de flèches d'origine x et de fin y .

$S = \{1; 2; 3; 4\}$,

$A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}$.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Premier résultat

Théorème (Lemme des poignées de mains)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de taille m . Alors, nous avons:

$$\sum_{x \in S} d^+(x) = \sum_{x \in S} d^-(x) = \text{nombre d'arcs} = m \text{ et}$$

$$\sum_{x \in S} d(x) = 2m = 2 \text{ nombre d'arcs.}$$

Encore du vocabulaire

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que G est :

- ▶ **Réflexif** si pour tout $x \in S$, (x, x) est dans A ;

Encore du vocabulaire

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que G est :

- ▶ **Réflexif** si pour tout $x \in S$, (x, x) est dans A ;
- ▶ **Symétrique** si pour tout $x, y \in S$, (x, y) est dans A si et seulement si (y, x) est dans A ;

Encore du vocabulaire

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que G est :

- ▶ **Réflexif** si pour tout $x \in S$, (x, x) est dans A ;
- ▶ **Symétrique** si pour tout $x, y \in S$, (x, y) est dans A si et seulement si (y, x) est dans A ;
- ▶ **Anti-symétrique**, si, pour tout $x, y \in S$, lorsque (x, y) et (y, x) appartiennent à A alors $x = y$;

Encore du vocabulaire

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que G est :

- ▶ **Réflexif** si pour tout $x \in S$, (x, x) est dans A ;
- ▶ **Symétrique** si pour tout $x, y \in S$, (x, y) est dans A si et seulement si (y, x) est dans A ;
- ▶ **Anti-symétrique**, si, pour tout $x, y \in S$, lorsque (x, y) et (y, x) appartiennent à A alors $x = y$;
- ▶ **Transitif**, si, pour tout $x, y \in S$, lorsque (x, y) et (y, z) appartiennent alors (x, z) appartiennent à A .

Proposition

(Caractérisation par le diagramme sagittal)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Alors, G est :

- ▶ réflexif si tout élément de S possède une boucle;

Proposition

(Caractérisation par le diagramme sagittal)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Alors, G est :

- ▶ réflexif si tout élément de S possède une boucle;
- ▶ symétrique si tous les arcs sont à “double sens”;

Proposition

(Caractérisation par le diagramme sagittal)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Alors, G est :

- ▶ réflexif si tout élément de S possède une boucle;
- ▶ symétrique si tous les arcs sont à “double sens”;
- ▶ anti-symétrique si aucun arc n’est à double sens;

Proposition

(Caractérisation par le diagramme sagittal)

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Alors, G est :

- ▶ réflexif si tout élément de S possède une boucle;
- ▶ symétrique si tous les arcs sont à “double sens”;
- ▶ anti-symétrique si aucun arc n’est à double sens;
- ▶ transitif si pour chaque couple d’arcs adjacents le “raccourci” est aussi un arc du graphe.

Caractérisation par la matrice d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de matrice d'adjacence $M = (m_{x,y})$, alors G est :

Caractérisation par la matrice d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de matrice d'adjacence $M = (m_{x,y})$, alors G est :

- ▶ réflexif si et seulement si pour tout $x \in S$, $m_{x,x}$ est non nul;

Caractérisation par la matrice d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de matrice d'adjacence $M = (m_{x,y})$, alors G est :

- ▶ réflexif si et seulement si pour tout $x \in S$, $m_{x,x}$ est non nul;
- ▶ symétrique si et seulement si $M = {}^tM$ où tM est la matrice transposée de M ;

Caractérisation par la matrice d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de matrice d'adjacence $M = (m_{x,y})$, alors G est :

- ▶ réflexif si et seulement si pour tout $x \in S$, $m_{x,x}$ est non nul;
- ▶ symétrique si et seulement si $M = {}^tM$ où tM est la matrice transposée de M ;
- ▶ anti-symétrique si et seulement si $m_{x,y}m_{y,x} = 0$ si $x \neq y$ et 1 sinon.

Caractérisation par la matrice d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de matrice d'adjacence $M = (m_{x,y})$, alors G est :

- ▶ réflexif si et seulement si pour tout $x \in S$, $m_{x,x}$ est non nul;
- ▶ symétrique si et seulement si $M = {}^tM$ où tM est la matrice transposée de M ;
- ▶ anti-symétrique si et seulement si $m_{x,y}m_{y,x} = 0$ si $x \neq y$ et 1 sinon.
- ▶ transitif si et seulement si $m_{x,y}m_{y,z} = m_{x,z}$ pour tout $x, y, z \in S$.