AUTOMORPHISMES DE SOUS-SHIFTS MINIMAUX

SAMUEL PETITE

Résumé. Une question classique est de comprendre les automorphismes d'un sous-shift, i.e. les automates cellulaires inversibles préservant un sous-shift. Le groupe formé de ces transformations est dénombrable et en général difficile à décrire. Dans ce survol nous nous restreignons aux sous-shifts minimaux. Nous décrivons des exemples de tels groupes et nous donnons leurs propriétés pour les sous-shifts substitutifs et Toeplitz. Nous présentons également comment la minimalité et la complexité du sous-shift contraignent ces automorphismes.

Table des matières

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 54H20; Secondary: 37B10.

Key words and phrases. sous décalage minimaux, groupe d'automorphisme, complexité.

This research was supported through the cooperation project MathAmSud DCS.

1. Introduction

Un *automorphisme* d'un système dynamique topologique (X, T) où $T\colon X \to X$ est un homéomorphisme d'un espace métrique compact X, est un homéomorphisme de X qui commute avec T. Bien évidemment chaque puissance de la transformation T donne un automorphisme. Un problème classique de système dynamique est de caractériser les automorphismes d'un système donné, de décrire les propriétés algébriques du groupe $\mathrm{Aut}(X, T)$ de tous les automorphismes ainsi que ses relations avec le système dynamique. Cette problématique reste largement ouverte dans un contexte général, aussi nous nous restreindrons au cas des sous-shifts minimaux. Cette classe de systèmes a l'avantage de couvrir une riche famille d'exemples ainsi que de présenter des phénomènes de rigidité. Elle est également l'occasion d'aborder différent concepts clefs de combinatoire, dynamique symbolique et de dynamique topologique.

Les travaux pionniers de G.A. Hedlund [47] montrent que chaque automorphisme d'un sous-shift est une *fonction de bloc glissant*, appelée également *automate cellulaire*. Ainsi le groupe des automorphismes est toujours dénombrable. Ce groupe a été initialement étudié pour les sous-shifts de type fini mélangeant comme le full-shift. Il en ressort qu'il a une strucure compliquée, difficile à décrire. Par l'utilisation astucieuse de *marqueurs* G. A. Hedlund montre qu'il est infiniment engendré et contient de nombreux sous-groupes : n'importe quel groupe fini [47], le groupe libre à 2 générateurs, les groupes fondamentaux de surfaces compactes, la somme directe d'un nombre dénombrable de copies de $\mathbb{Z}$ et des copies de n'importe quelle collection dénombrable de groupes finis [9, 55].

Cependant il n'existe encore aucune description précise de ces groupes d'automorphismes ni de leurs générateurs de sorte que la plupart des problèmes de base restent ouverts. Par exemple, une des questions les plus fameuses est de savoir si les groupes d'automorphismes des full-shifts sur 3 et 2 lettres sont (abstraitement) algébriquement isomorphes. De même il n'est pas connu s'ils admettent un automorphisme ayant des racines pour tous les ordres. Il existe déjà de bons et nombreux survols sur les automorphismes de sous-shifts de type fini. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [9, 57] et leurs nombreuses références.

L'étude des automorphismes est également un sujet classique, très étudié en théorie ergodique où les sous-shifts minimaux ont fourni de précieux exemples. Dans le contexte mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ où $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de probabilité standard et T est une transformation mesurable préservant la mesure μ, les automorphismes considérés sont des bijections bi-mesurables, commutant avec T et préservant la mesure μ. Le groupe de ces automorphismes est appelé le *centralisateur* de T et est noté $C(T)$. Rappelons certains résultats marquant et nous renvoyons le lecteur à [40] pour un survol dans cette thématique. Le centralisateur $C(T)$ a été principalement étudié pour les systèmes mélangeant de rang fini. D. Ornstein [73] a montré que ce groupe se réduisait aux puissance de la transformation T pour les systèmes mélangeant de rang un. Plus tard, A. del Junco [28] montre que le sous-shift de Chacon qui est faiblement mélangeant mais non mélangeant, vérifie la même propriété. Finalement, J. King et J.-P. Thouvenot [56] ont montré que le groupe $C(T)$ quotienté par le groupe $\langle T\rangle$ (engendré par T) est fini pour les systèmes mélangeant de rang fini.

Dans le cas non faiblement mélangeant, B. Host et F. Parreau [52] montrent des résultats de rigidité pour une famille de sous-shift uniquement ergodique issues de substitutions de longueur constante. Dans ces exemples, le groupe $C(T)$ coïncide avec $\mathrm{Aut}(X, T)$ et le quotient $C(T)/\langle T\rangle$ est fini. En parallèle, M. Lemańczyk et M. Mentzen [60] réalisent n'importe quel groupe fini comme quotient $C(T)/\langle T\rangle$ en utilisant les substitutions vérifiant les conditions de B. Host et F. Parreau.

L'étude du groupe d'automorphisme de sous-shift minimaux est également motivée par des raisons algébriques. Il est possible d'associer un groupe simple à chaque système dynamique minimal (X, T) où X est un ensemble de Cantor [64]. Plus précisément, ce groupe est le groupe dérivé, *i.e.* engendré par les commutateurs, du groupe $[[T]]$ des homéomorphismes de X qui sont localement des puissances de T, appelé groupe *(topologique) plein*. Il possède des propriétés remarquables : si le système (X, T) est un sous-shift, il est finiment engendré [64], de plus il est moyennable [54]. Lorsque le sous-shift associé est linéairement répétitif et possède des mots palindromiques arbitrairement long, il a une croissance intermédiaire [71]. Ce sont, à ce jour, les seuls exemples connus de tels groupes simples. Le groupe plein est très riche et est intimement lié à la topologie de X. En fait, tout isomorphisme algébrique (abstrait) entre des groupe pleins est induit par un homéomorphisme entre les espaces qui vérifie des propriétés de commutation avec les actions. Les travaux de Giordano-Putnam-Skau et de Medynets [42, 65], montrent que le groupe plein est un invariant complet de *flip-conjugaison* : deux systèmes minimaux (X, σ) et (Y, S) ont des groupes pleins algébriquement isomorphes si et seulement si le système (X, T) est conjugué à (Y, S) ou (Y, S^{-1}). Il en ressort que les groupes des automorphismes $\mathrm{Aut}(X, T)$ est un sous-groupe d'indice fini de celui des isomorphismes de $[[T]]$. De façon générale, ceci n'impose pas de contrainte algébrique sur $\mathrm{Aut}(X, T)$ car tout groupe dénombrable est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X, T)$ d'un système minimal (X, T)

sur un Cantor [13, 87]. En revanche rien de tel n'est connu pour les systèmes qui sont des sous-shifts minimaux. Les isomorphismes d'un groupe finiment engendré formant typiquement un ensemble petit, on peut s'attendre que, dans le contexte des sous-shifts minimaux, les groupes d'automorphismes soient également petits ou du moins très contraints.

Nous présentons ici un survol de résultats récents et des techniques utilisées, sur les automorphismes de sous-shifts minimaux ainsi que quelques questions ouvertes. C'est un sujet actuellement [1] très actif et il n'est pas possible d'être exhaustif sur le sujet tant différents groupes de chercheurs obtiennent des résultats variés dans cette problématique. Nous nous intéresserons aux sous-groupes possibles d'automorphisme, à la description de tous les automorphismes (de façon algorithmique ou autre) et au problème d'existence de racine d'automorphisme et de torsion.

Après avoir rappelé les notions de bases de dynamiques topologique et symbolique dans la première section, nous donnons des descriptions des automorphismes pour différentes classes de sous-shift par ordre croissant de complexité. La section 3 concerne les sous-shifts minimaux classiques (substitutif, Sturmien, ...). Elle débute par les sous-shifts de complexité non super-linéaire. Leur groupe d'automorphisme y est décrit ainsi que les propriétés de décidabilité de facteurs des sous-shifts substitutifs. La section se poursuit avec la famille des sous-shifts Toeplitz qui présente une riche variété de complexité, très utilisée pour fabriquer des exemples en dynamique symbolique. Des restrictions et des exemples de leurs groupes d'automorphisme sont présentés. Nous montrons ensuite dans la section 4 comment la complexité du sous-shift contraint les propriétés géométriques des groupes d'automorphisme, et tout particulièrement leur croissance. La dernière section sera consacrée à l'extension de ces études, notamment au cadre multidimensionnel de sous-shifts comme les sous-shifts de type fini minimaux et les systèmes de pavages. Nous présentons également la notion de direction de non-expansivité. Pour le confort du lecteur, toutes les notions utilisées de théorie des groupes sont rappelées dans l'annexe A.

Remerciement. Je remercie F. Durand et P. Guillon pour leur relecture et leurs commentaires pertinents.

2. Concepts et notations de base

2.1. Dynamique topologique.

Un *système dynamique topologique* est la donnée d'un couple (X,T) où X est un espace métrique compact munit d'une distance dist et $T\colon X \to X$ est un homéomorphisme. Nous noterons par $\mathrm{Orb}_T(x)$ l'*orbite* $\{T^n x; n \in \mathbb{Z}\}$ de $x \in X$. Le système (X,T) est *minimal* si tout sous ensemble fermé F invariant par T ($T(F) = F$) est soit vide soit l'ensemble X tout entier. Dans un tel système, chaque orbite est dense. Le théorème de Birkhoff assure que tout système dynamique topologique sur

1. Août 2019

un espace métrique compact admet un sous-ensemble minimal. Le système (X, T) est *transitif* si au moins une orbite est dense.

L'*ensemble ω-limite* $\omega(x)$ d'un point $x \in X$ est l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite positive de x, ou plus formellement $\omega(x) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{T^k x; k \geq n\}}$. Il en resort qu'un ensemble ω-limite est toujours fermé et invariant par la dynamique.

Les systèmes que nous considérerons seront principalement des systèmes dynamiques *expansifs i.e.* il existe $\delta > 0$ tel que toute paire de points distincts $x, y \in X$ $x \neq y$ vérifie $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{dist}(T^n x, T^n y) \geq \delta$. Les systèmes expansifs sur un ensemble totalement discontinu sont exactement ceux conjugués à un sous-shift [47].

Pour un système dynamique topologique, des points $x, y \in X$ sont dits *proximaux* si $\liminf_n \mathrm{dist}(T^n x, T^n y) = 0$. Une condition plus forte que la proximalité est l'asymptoticité. Des points $x, y \in X$ sont dits *asymptotiques* si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{dist}(T^n x, T^n y) = 0$. Il n'existe pas forcément des paires de points proximales ou asymptotiques pour un système dynamique topologique (par exemple pour une rotation). Cependant, il est bien connu qu'un sous-shift apériodique non trivial admet au moins une paire de points asymptotiques (voir [3, Chapter 1] et section 2.3), même si cela peut paraître en contradiction avec l'expansivité.

Un système dynamique topologique (Y, S) est dit un *facteur* de (X, T) s'il existe une application continue surjective $\pi \colon X \to Y$, appelée application *facteur*, telle que $\pi \circ T = S \circ \pi$. Le système (X, T) est alors dit une *extension* de (Y, S). Si, de plus, π est bijective, les systèmes (Y, S) et (X, T) sont dits *conjugués*. Remarquons qu'un facteur d'un système minimal est nécessairement minimal.

Un *endomorphisme* d'un système dynamique topologique (X, T) est une application continue [2] $\phi \colon X \to X$ commutant avec T :$\phi \circ T = T \circ \phi$. Un endomorphisme ϕ inversible est appelé un *automorphisme*. Dans ce cas ϕ et ϕ^{-1} sont des endomorphismes. La collection des endomorphismes (resp. automorphismes) de (X, T) est noté $\mathrm{End}(X, T)$ (resp. $\mathrm{Aut}(X, T)$). Il forme un semi-groupe (resp. groupe) pour la composition. Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X, T)$ engendré par T est noté $\langle T \rangle$, c'est un sous groupe qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{Aut}(X, T)$, il s'agit donc d'un sous groupe normal et le quotient $\mathrm{Aut}(X, T)/\langle T \rangle$ est un groupe. D'un point de vue algébrique, le groupe $\mathrm{Aut}(X, T)$ est le *centralisateur* de T dans le groupe des homéomorphismes de X. C'est pourquoi certains auteurs parlent de centralisateur et non de groupe d'automorphisme. Comme nous nous restreignons au cas des sous-shifts, nous gardons la dénomination originale d'automorphisme dûe à Hedlund. Un autre groupe classique est le *normalisateur*

$$N(\langle T \rangle) := \{\phi \text{ homéomorphismes de } X : \phi \langle T \rangle \phi^{-1} = \langle T \rangle\}.$$

2. les systèmes dynamiques considérés seront minimaux, ainsi leurs endomorphismes sont surjectifs

Ici encore, ce groupe a une interprétation dynamique. Comme chaque élément ϕ de $N(\langle T\rangle)$ agit par conjugaison comme un isomorphisme de $\langle T\rangle \simeq \mathbb{Z}$, l'application ϕ commute soit avec T, soit avec T^{-1}. Ainsi, $\mathrm{Aut}(X,T)$ est un sous groupe normal de $N(\langle T\rangle)$ dont le quotient est d'ordre 2. Ces deux groupes sont très proches et il est simple de déduire des résultats sur le normalisateur à partir de ceux sur $\mathrm{Aut}(X,T)$.

Le lemme suivant est fondamental pour notre étude des automorphismes.

Lemme 2.1. *Soit (X,T) un système dynamique minimal. Alors, des endomorphismes ϕ_1 et ϕ_2 sont identiques si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $\phi_1(x) = \phi_2(x)$.*

En particulier, l'action de $\mathrm{Aut}(X,T)$ sur X est libre, c'est-à-dire aucun élément de $\mathrm{Aut}(X,T) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ n'a de point fixe.

Démonstration. Pour $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{End}(X,T)$, considérons l'ensemble où ils coïncident $\{x \in X : \phi_1(x) = \phi_2(x)\}$. C'est un ensemble fermé, invariant par T. Par la minimalité de l'action, s'il n'est pas vide, c'est tout l'ensemble X.

Pour le second point, il suffit de remarquer que l'ensemble des points où un automorphisme ϕ coïncide avec l'identité est l'ensemble des points fixes de ϕ. □

Nous utiliserons le résultat suivant pour identifier des automorphismes.

Lemme 2.2. *Soit (X,T) un système dynamique topologique. Pour $x \in X$ et $\phi \in \mathrm{End}(X,T)$ nous avons :*

- *si x et $\phi(x)$ sont asymptotiques alors la restriction de ϕ à $\omega(x)$ est l'identité ;*
- *si (X,T) est minimal alors x et $\phi(x)$ sont proximaux si et seulement si ϕ est l'identité.*

Démonstration. Pour le premier point, supposons que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{dist}(T^n x, T^n\phi(x)) = 0$. Pour tout $y \in \omega(x)$ considérons une suite d'entiers positifs $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $T^{n_i}x$ converge vers y. La continuité de ϕ implique que $\phi(y) = y$, ce qui prouve le résultat.

Pour le second point, la preuve de la direction non triviale est similaire. Par définition, il existe une suite d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{i\to+\infty} \mathrm{dist}(T^{n_i}x, T^{n_i}\phi(x)) = 0$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $T^{n_i}x$ converge vers un point $y \in X$. De même, nous obtenons $\phi(y) = y$ et par le lemme 2.1 ϕ est l'identité. □

Les facteurs de systèmes donnent également des informations sur les automorphisme d'un système. Ceci a été utilisé dans [19, 29] où le lemme suivant a été extrait. Une application facteur $\pi\colon (X,T) \to (Y,S)$ est dite *compatible* si tout endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(X,T)$ vérifie si $\pi(x) = \pi(y)$ alors $\pi(\phi(x)) = \pi(\phi(y))$.

Lemme 2.3. *Soit (X,T) un système minimal. Si $\pi\colon (X,T) \to (Y,S)$ est compatible, alors il existe un morphisme $\hat\pi\colon \mathrm{End}(X,T) \to \mathrm{End}(Y,S)$ tel que :*

— $\hat{\pi}(\phi)(\pi(x)) = \pi(\phi(x))$ *pour tout* $\phi \in \mathrm{End}(X,T)$, $x \in X$;
— $\hat{\pi}(\mathrm{Aut}(X,T)) < \mathrm{Aut}(Y,S)$;
— *pour tout* $\psi \in \mathrm{End}(Y,S)$, $|\hat{\pi}^{-1}(\{\psi\})| \leq \min_{y\in Y} |\pi^{-1}(y)|$.

Démonstration. Par définition, l'application $\hat{\pi}(\phi)\colon Y \to Y$ donnée par $\hat{\pi}(\phi)(\pi(x)) = \pi(\phi(x))$ est bien définie et est un endomorphisme du système (Y,S). Par minimalité, l'application $\hat{\pi}(\phi)$ est surjective. Elle est en fait inversible si ϕ est un automorphisme. En effet, par la relation $\hat{\pi}(\phi)\circ\hat{\pi}(\phi^{-1})\circ\pi = \pi\circ\phi\circ\phi^{-1} = \pi$, on déduit du lemme 2.1 que $\hat{\pi}(\phi)\circ\hat{\pi}(\phi^{-1}) = \mathrm{Id}$ de sorte que $\hat{\pi}(\phi)$ est injective et donc inversible. La preuve que l'application $\phi \mapsto \hat{\pi}(\phi)$ est un morphisme est standard.

Pour éviter toute trivialité, supposons que $\min_{y\in Y} |\pi^{-1}(y)| = c$ est fini et soit $y_0 \in Y$ un point réalisant ce minimum. Soient un endomorphisme $\psi \in \mathrm{End}(Y,S)$ et $x_0 \in X$ tel que $y_0 = \psi(\pi(x_0))$. Si $\phi_0, \phi_2, \ldots, \phi_c$ sont $c+1$ différents endomorphismes de $\hat{\pi}^{-1}(\{\psi\})$, on a $y_0 = \psi(\pi(x_0)) = \pi(\phi_0(x_0)) = \cdots = \pi(\phi_c(x_0))$. Ainsi il existe deux indices i,j tels que $\phi_i(x_0) = \phi_j(x_0)$. Par le lemme 2.1, $\phi_i = \phi_j$, ce qui fini la preuve. □

Le facteur équicontinu maximal (cf section 2.2) est un exemple de facteur compatible. Pour les extensions presque injectives où il existe un point d'injectivité, le morphisme de groupe donné par le lemme 2.3 est donc injectif. Ces observations seront notamment utiles pour l'études des sous-shifts Toeplitz (cf Section 3.4).

Signalons une autre condition assurant l'injectivité du morphisme du lemme 2.3 : les extensions proximales. Une application facteur dont les points dans une même fibre sont proximaux est dite *extension proximale*. Le lemme suivant se trouve dans [29].

Lemme 2.4. *Soit* (X,T) *un système minimal et* $\pi\colon (X,T) \to (Y,S)$ *une application compatible. Si* $\pi\colon (X,T) \to (Y,S)$ *est une extension proximale, alors* $\hat{\pi}\colon \mathrm{End}(X,T) \to \mathrm{End}(Y,S)$ *est injective.*

Démonstration. Soient ϕ_1, ϕ_2 des endomorphismes de (X,T) tels que $\hat{\pi}(\phi_1) = \hat{\pi}(\phi_2)$. Ceci signifie que pour tout $x \in X$, $\pi(\phi_1(x)) = \pi(\phi_2(x))$. Comme l'extension est proximale, $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ sont proximaux et par le lemme 2.2, $\phi_1 = \phi_2$. □

2.2. **Système équicontinu.** Un système dynamique topologique (Y,S) est dit *équicontinu* si l'ensemble des transformations $\{S^n, n \in \mathbb{Z}\}$ forme une famille équicontinue d'homéomorphismes. Les systèmes où S est une isométrie de l'espace X, comme une rotation sur le cercle, sont les exemples typiques de systèmes équicontinus. L'odomètre est un autre exemple classique (voir section 3.4.1).

Les automorphismes des systèmes équicontinus sont assez simple à décrire

Lemme 2.5. *Soit* (Y,S) *un système dynamique équicontinu minimal. Alors* $\mathrm{End}(Y,S) = \mathrm{Aut}(Y,S)$ *est un groupe abélien, topologiquement homéomorphe à* Y.

Démonstration. Soit G l'adhérence de groupe $\langle S \rangle$ dans l'ensemble des homéomorphismes de Y pour la topologie de la convergence uniforme. Par le théorème d'Ascoli, G est un groupe abélien compact et $G < \mathrm{Aut}(Y, S)$. Comme le système (Y, S) est minimal, le groupe G agit transitivement sur Y. Pour un endomorphisme ϕ et un point $y \in Y$, il existe $g \in G$ tel que $g(y) = \phi(y)$. Par le lemme 2.1, $g = \phi$ ce qui montre que $\phi \in G$.

Pour finir la preuve, observons que l'application $g \in G \mapsto g(y) \in Y$ est continue et bijective par le lemme 2.1. □

Les systèmes équicontinus sont les systèmes minimaux les plus simples à étudier et fournissent des approximations des systèmes dynamiques. Tout système dynamique se factorise sur un système équicontinu : par exemple sur le système où Y est un singleton. En dehors de ce cas trivial, un système dynamique topologique (X, T) admet un *facteur équicontinu maximal* $\pi \colon (X, T) \to (Y, S)$ dans le sens où pour tout facteur $\psi \colon (X, T) \to (Z, R)$ sur un système équicontinu (Z, R), il existe un facteur $\varphi \colon (Y, S) \colon (Z, R)$ tel que $\varphi \circ \pi = \psi$ [58]. Ce facteur équicontinu maximal, plus simple à étudier, est une d'approximation du système et donne des informations sur sa dynamique et tout particulièrement sur le groupe des automorphismes. Néanmoins dans le cas des systèmes mélangeants, ce facteur équicontinu maximal est réduit à un point.

Le résultat suivant a été observé dans [16] et [72].

Lemme 2.6. *Soit* (X, T) *un système minimal et* $\pi \colon (X, T) \to (Y, S)$ *son facteur équicontinu maximal. Alors l'application facteur* π *est compatible. En particulier,* $\mathrm{End}(X, T)$ *admet un morphisme sur le groupe abélien* $\mathrm{Aut}(Y, S)$.

Démonstration. Pour $\phi \in \mathrm{Aut}(X, T)$, l'application $\pi \circ \phi : X \to Y$ est une application facteur sur un système équicontinu. Par maximalité, il existe un endomorphisme $\hat{\phi}$ de Y tel que $\pi \circ \phi = \hat{\phi} \circ \pi$. On en déduit la propriété de compatibilité et l'on conclut par le lemme 2.3. □

Il ressort de ce résultat que pour n'importe quels automorphismes $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(X, T)$, l'image par l'application facteur équicontiue maximale du commutateur $[\phi, \psi] = \phi \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ est triviale. Ainsi les point $x \in X$ et $[\phi, \psi](x)$ sont toujours dans la même fibre par π. Il est alors bien connu que ces deux éléments sont *régionalement proximaux* (cf [3]). Plus généralement il est montré dans [29], que pour un automorphisme ψ de la forme $\psi = [[\cdots[[\phi_1, \phi_2], \phi_3], \cdots, \phi_d]\cdots]$ où $\phi_i \in \mathrm{Aut}(X, T)$, les points $\psi(x)$ et $x \in X$ sont *d-régionalement proximaux.* Il suit qu'un système étant une extension proximale d'une limite inverse de nilsystème minimaux d'ordre d a un groupe d'automorphisme nilpotent d'ordre au plus d [29].

Le lemme 2.6 s'étend aux actions de groupes dénombrable G. Comme ces actions admettent aussi un facteur équicontinu maximal, il est également possible d'utiliser ce morphisme pour étudier les automorphismes de ces systèmes. Plus généralement, une version similaire de ce lemme permet d'étudier le normalisateur de ces systèmes, *i.e* aux homéomorphismes de l'espace qui par conjugaison préserve la famille des transformations définies par l'action du groupe G. Ceci a été effectué sur différents exemples de $\mathbb{Z}^d$-sous-shifts multidimensionnels dans [4].

2.3. **Dynamique symbolique.** Dans tout ce qui suit $\mathcal{A}$ désigne un ensemble fini de cardinal au moins 2, que nous appellerons *alphabet*. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *lettres* ou *symboles*. Un mot $w = w_1 \cdots w_\ell \in \mathcal{A}^\ell$ de *longueur* $\ell \in \mathbb{N}$ est une suite finie de ℓ lettres. Sa longueur est également notée $|w| = \ell$. Un tel mot est un élément du monoïde libre $\mathcal{A}^*$ muni de l'opération de concaténation. Deux mots u et v sont respectivement un *préfixe* et un *suffixe* du mot concaténé uv. L'ensemble des suites infinies (monolatère) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à lettres dans $\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ et l'ensemble des suites bi-infinies $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est noté $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$.

L'application *shift* ou *décalage* est notée $\sigma\colon \mathcal{A}^\mathbb{Z} \to \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ et est définie par $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Sa notation est indépendante de l'alphabet qui sera claire selon le contexte. Pour la topologie produit $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ est un ensemble de Cantor et σ est un homéomorphisme. Une base de voisinage est donnée par les *cylindres*, *i.e.* par un ensemble de la forme

$$[w]_i := \{(x_n)_n \in \mathcal{A}^\mathbb{Z} : x_i \cdots x_{i+\ell-1} = w\},$$

où $w \in A^\ell$ est un mot et $i \in \mathbb{Z}$ un entier. Un *clopen* est un sous-ensemble à la fois fermé et ouvert. Chaque cylindre est un clopen pour la topologie produit. Ils forment une base de la topologie. Afin de simplifier les notations le cylindre $[w]_0$ sera simplement noté $[w]$.

Un *sous-shift* est un système dynamique topologique (X, σ) où X est un ensemble fermé σ-invariant de $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$. Pour les résultats généraux sur la dynamique topologique nous utiliserons la notation (X, T) et pour ceux spécifiques de la dynamique symbolique nous utiliserons (X, σ). Le sous-shift *engendré par un ensemble* $F \subset \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ est le plus petit sous-shift contenant F. Ainsi le sous-shift engendré par une suite $x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que la fermeture de l'orbite de x par le shift.

Le *langage* d'un sous-shift (X, σ) est l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ de tous les mots $w \in \mathcal{A}^*$ tels que $w = x|_{[m,m+|w|-1]} = x_m \cdots x_{m+|w|-1}$ pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ et $m \in \mathbb{Z}$. Nous disons que le mot w *apparaît* dans la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ et que l'entier m est une *occurence* de w. Nous notons par $\mathcal{L}_\ell(X)$ l'ensemble des mots de longueur ℓ dans $\mathcal{L}(X)$. Une suite x est dite *apériodique* si elle aucune puissance du shift ne la préserve : $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\sigma^k(x) \neq x$. Par extension, nous dirons qu'un sous-shift X est *apériodique* si tous ses éléments sont apériodiques. Par exemple, les sous-shifts minimaux contenant une suite apériodiques sont apériodiques.

Il est également possible de définir un sous-shift de la façon suivante : étant donné un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^*$ de mots interdits, l'ensemble $X_\mathcal{F} := \{x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z} :$ aucun mot de $\mathcal{F}$ n'apparaît dans $x\}$ est un ensemble fermé et invariant par le shift. Tous les sous-shifts peuvent être définis de cette manière. Lorsque l'ensemble des mots interdits $\mathcal{F}$ est fini, le sous-shift $X_\mathcal{F}$ est appelé *sous-shift* *de type fini* (SFT). Un sous-shift (Y, σ) qui est un facteur (topologique) d'un SFT (X, σ) est appelé sous-shift *sofique*.

Pour un sous-shift général (X, σ), l'application $p_X \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $p_X(\ell) = \sharp\mathcal{L}_\ell(X)$ est la *fonction de complexité* de (X, σ). C'est une fonction croissante et sous-multiplicative : *i.e.* $p_X(n+m) \leq p_X(n)p_X(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Ainsi par le lemme de Fekete, la suite de terme $\log(p_X(n)/n$ converge vers $\inf_n \log(p_X(n))/n =: h \in [0, +\infty)$ qui est appelé *entropie* du sous-shift X.

Nous rappelons ici quelques notations de comparaison asymptotique. Pour deux fonctions $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nous écrivons $f(\ell) = \mathrm{O}(g(\ell))$ s'il existe une constante K telle que $f(\ell) \leq Kg(\ell)$ pour tout entier ℓ suffisamment grand. Nous notons également $f(\ell) = \Theta(g(\ell))$ si $f(\ell) = \mathrm{O}(g(\ell))$ et $g(\ell) = \mathrm{O}(f(\ell))$. Pour finir, nous notons $f(\ell) = \Omega_+(g(\ell))$ si $\limsup_{\ell\to+\infty} f(\ell)/g(\ell) > 0$. Avec la terminologie suivante, nous disons qu'une fonction $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a une croissance :

- *polynomiale* s'il existe un entier $d \geq 1$ tel que $f(\ell) = \Theta(\ell^d)$. Lorsque $d = 1$ sa croissance est dite *linéaire* et lorsque $d = 2$, elle est dite *quadratique* ;
- *au plus polynomiale* s'il existe un entier $d \geq 1$ tel que $f(\ell) = \mathrm{O}(\ell^d)$;
- *super-logarithmique* si $\lim\limits_{\ell\to+\infty} f(\ell)/\log \ell = +\infty$;
- *super-linéaire* si $\lim\limits_{\ell\to+\infty} f(\ell)/\ell = +\infty$;
- *non super-linéaire* ou *sous-affine le long d'une sous-suite* si $\liminf\limits_{\ell\to+\infty} f(\ell)/\ell < +\infty$;
- *sous-linéaire* (resp. *sous-quadratique*) si $\liminf\limits_{\ell\to+\infty} f(\ell)/\ell^d = 0$ pour $d = 1$ (resp. $d = 2$) ;
- *super-polynomiale le long d'une sous-suite* si $\limsup\limits_{\ell\to+\infty} f(\ell)/q(\ell) = \pm\infty$ pour tout polynôme q ;
- *sous-exponentielle* si $\lim\limits_{\ell\to+\infty} f(\ell)/\alpha^\ell = 0$ pour tout $\alpha > 1$.

Par extension, nous dirons qu'un sous-shift a une complexité *polynomiale* (*au plus polynomiale, super-linéaire*, ...) si sa fonction complexité p_X a une croissance polynomiale (au plus polynomiale, super-linéaire, ...).

Il existe une caractérisation combinatoire des sous-shifts minimaux. Le sous-shift engendré par une suite x est minimal si et seulement si x est *uniformément récurrent* : pour tout mot w de x, l'ensemble des occurrences de w forme un ensemble S *syndétique* de $\mathbb{Z}$ *i.e.* il existe un ensemble fini $K \subset \mathbb{Z}$ tel que $K + S = \mathbb{Z}$ [2]. Ainsi une suite *n-périodique* x, *i.e.* $\sigma^n(x) = x$ pour l'entier $n \geq 0$ est une suite uniformément récurrente. Il existe cependant des suites non périodiques (ou dite *apériodiques*) uniformément récurrentes, comme les suites substitutives (cf section suivante 2.4).

La notion de mots spéciaux s'est révélée être fondamentale pour l'étude des sous-shifts, notamment pour étudier la complexité des sous-shifts. Nous verrons qu'elle est également importante pour l'étude des automorphismes. Un mot $w \in \mathcal{L}(X)$ est dit *spécial droit* s'il existe au moins deux lettres distinctes a et b telles que wa et wb appartiennent au langage $\mathcal{L}(X)$. Un mot *spécial gauche* est définit de façon similaire.

La notion de mots spéciaux est apparue dès le début de la dynamique symbolique [67, 68], et est au coeur de la preuve du fameux théorème de Morse-Hedlund sur la complexité. Nous présentons ici un énoncé légèrement différent.

Théorème 2.7 (Morse-Hedlund [68])**.** *Soit X un sous-shift infini, alors pour tout entier ℓ, il existe un mot spécial droit (resp. gauche) de longueur ℓ.*

Il est à noter que Schwartzman a donné dans sa thèse, indépendamment de Morse et Hedlund, une version de ce théorème pour la dynamique topologique [10].

Démonstration. Par contradiction, on supposera que pour une certaine longueur ℓ, tout mot de longueur ℓ admet une unique prolongation à droite. L'existence de mot spécial gauche se démontre de façon similaire. Dans ce contexte, pour tout élément $x \in X$, la suite $x|_{\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par le mot $x|_{[0,\ell-1]}$. Soient $x^{(1)}, \dots, x^{(p_X(\ell)+1)}$ différents éléments de X. Pour tout entier $n \leq 0$, le lemme des tiroirs assure l'existence de deux indices $i_n \neq j_n \in \{1, \dots, p_X(\ell)+1\}$ tels que $x^{(i_n)}$ et $x^{(j_n)}$ coïncident sur $[n, n+\ell-1]$ et donc également sur $[n, +\infty)$. De nouveau, le lemme des tiroirs assure l'existence d'une paire d'indice $\{i_n, j_n\}$ est identique pour une infinité d'entiers n. Ainsi les suites $x^{(i_n)}$ et $x^{(j_n)}$ sont égales. Contradiction. $\square$

Un corollaire directe est l'existence de paire de points asymptotiques pour tout sous-shift infini [3, Chapter 1].

Remarque 2.8. On retrouve facilement la version originelle, mais plus faible, du théorème de Morse-Hedlund : le sous-shift X engendré par une suite non périodique x vérifie $p_X(\ell) > \ell$ pour tout entier ℓ. Sinon, pour un certain entier ℓ, on a $2 \leq p_X(1) \leq \cdots \leq p_X(\ell) \leq \ell$, et par le lemme des tiroirs, il existe un indice n tel que $p_X(n) = p_X(n+1)$. Ainsi il n'y a pas de mot spéciaux de longueur n et X est fini. Ceci est impossible si x n'est pas périodique.

Remarque 2.9. Un autre corollaire du théorème 2.7 est qu'il n'existe pas de sous-shift infini composé uniquement de suite périodiques. Si tel était le cas, l'existence de mots spéciaux gauches pour toute longueur donne l'existence de deux éléments du sous-shift $x \neq y$ tels que $x|_{\mathbb{N}} = y|_{\mathbb{N}}$. Ces suites étant périodiques, elles doivent être identiques : contradiction.

Un autre résultat fondamental en dynamique symbolique est le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon qui caractérise les applications facteurs entre les sous-shifts [47].

Théorème 2.10 (Curtis-Hedlund-Lyndon)**.** *Soient X et Y deux sous-shifts. Une application $\phi\colon X \to Y$ est un facteur ssi elle est déterminée par une fonction de bloc $\hat{\phi}\colon \mathcal{L}_{2\mathbf{r}+1}(X) \to \mathcal{L}_1(Y)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{N}$, telle que $\phi(x)_n = \hat{\phi}(x|_{[n-\mathbf{r};n+\mathbf{r}]})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in X$*

La constante $\mathbf{r} \in \mathbb{N}$ est appelée un *rayon* de $\hat{\phi}$. L'application locale s'étend naturellement à tous les mots du langage de X de longueur supérieure à $2\mathbf{r}+1$ et cette application sera également désignée par $\hat{\phi}$. Ainsi un automorphisme est dit une *fonction de bloc glissant* (ou *automate cellulaire*) *inversible*. Réciproquement, il est simple de vérifier qu'une fonction de bloc glissant est continue et commute avec l'application shift.

Comme il n'existe qu'un nombre dénombrable de fonction de bloc, le groupe $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$ d'un sous-shift est dénombrable. Plus précisément, $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$ est un sous groupe discret des homéomorphismes de X.

2.4. **Sous-shift substitutif.** Nous rappelons ici les définitions de bases des sous-shifts substitutifs qui fournissent une riche famille d'exemples de sous-shifts minimaux. Nous renvoyons le lecteur à [75] pour une exposition détaillée de leurs propriétés.

Une *substitution* est une application $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ qui associe à chaque lettre $a \in \mathcal{A}$ un mot $\tau(a)$ dans $\mathcal{A}^*$. La substitution τ peut être appliqée à n'importe quel mot dans $\mathcal{A}^*$ et aux suites infinie monolatère ou bilatère de façon évidente par concaténation (dans le cas des suites bilatères, on applique τ aux coordonnées positives et négatives séparément puis l'on concatène les résultats). Ainsi des substitutions peuvent être composées ou itérées n fois. Cette composition est notée τ^n. Pour éviter les cas triviaux nous supposerons toujours dans la définition de substitution, que la longueur du mot $\tau^n(a)$ tend vers l'infini avec n, pour chaque lettre $a \in \mathcal{A}$.

La substitution $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ est dite *primitive* si pour un certain entier $p \geq 1$ et pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$, le mot $\tau^p(a)$ contient toutes les lettres de l'alphabet.

La substitution $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ est dite de *longueur constante* $\ell > 0$ si $|\tau(a)| = \ell$ pour chaque lettre $a \in \mathcal{A}$. La longueur de la substitution sera notée $|\tau|$. Une substitution de longueur constante τ est *bijective* si $\tau(a)_i \neq \tau(b)_i$ pour toutes lettres distinctes $a, b \in \mathcal{A}$ et toute coordonnée $1 \leq i \leq |\tau|$.

Le sous-shift induit par la substitution $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ est notée par (X_τ, σ), où X_τ est l'ensemble

$$\{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \text{ chaque mot fini de } x \text{ est un sous-mot de } \tau^n(a) \text{ pour } n \geq 1, a \in \mathcal{A}\}.$$

Le système (X_τ, σ) est aussi appelé *sous-shift substitutif.* Il est bien connu que le système (X_τ, σ) est minimal si la substitution τ est *primitive.* La substitution τ est dite *apériodique* si X_τ est un ensemble infini. La complexité d'un sous-shift substitutif apériodique est linéaire [75].

L'exemple typique de sous-shift subsitutif de longueur constante que nous considérerons est celui de Prouhet-Thue-Morse. [3]

Exemple 2.11. Le sous-shift de Thue-Morse est donné par la substitution $\tau_{TM}\colon 0 \mapsto 01$ et $1 \mapsto 10$. Il s'agit d'une substitution primitive et apériodique. La fonction de bloc $\hat{\phi}$ qui échange les lettres 0 et 1 vérifie $\tau_{TM} \circ \hat{\phi} = \hat{\phi} \circ \tau_{TM}$. Ainsi $\hat{\phi}$ préserve le langage de $X_{\tau_{TM}}$ et définit un automorphisme d'ordre 2 de $X_{\tau_{TM}}$. Pour une suite x, la limite suivante $\lim_{n\to\infty} \tau_{TM}^n(x)$ existe. C'est un élement de $X_{\tau_{TM}}$ qui ne dépend que du mot $x_{-1}x_0$. Nous la noterons $L(x_{-1}x_0)$. Les éléments de $L(00)$ et $L(11)$ sont asymptotiques respectivement aux suites $L(10)$ et $L(01)$. Tout autre élément asymptotique à un autre est dans l'orbite d'une de ces suites.

2.5. **Sous-shift multidimensionnel.** Nous utiliserons également les sous-shifts multidimensionnels. La plupart des notions des sous-shifts unidimensionnels s'étendent à ce contexte sous réserve de petites modifications. Nous essayerons de garder les mêmes notations.

Pour un entier $d \geq 1$ et un alphabet fini $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ désigne l'ensemble des configurations multi-dimensionnelles de la forme $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ avec $x_i \in \mathcal{A}$. Munit de la topologie produit cet ensemble est topologiquement un ensemble de Cantor. Un vecteur entier $z \in \mathbb{Z}^d$ agit sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ par décalage avec la transformation $\sigma^z\colon \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ définie par $\sigma^z((x_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}) := (x_{i+z})_{i\in\mathbb{Z}^d}$. Ces transformations vérifient $\sigma^{z_1} \circ \sigma^{z_2} = \sigma^{z_1+z_2}$ pour $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^d$. Ce sont des homéomorphismes qui donnent une action continue appelée *shift* de $\mathbb{Z}^d$ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Un $\mathbb{Z}^d$-*sous-shift* $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est alors un sous-ensemble fermé, invariant par toutes les transformations σ^z, $z \in \mathbb{Z}^d$. Le sous-shift *engendré* par une suite $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est l'adhérence de l'orbite de x par le shift. La suite x est dite *périodique*, s'il existe $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tel que $\sigma^z(x) = x$.

La notion de langage et de complexité s'étend également dans ce contexte multidimensionnel si l'on précise la forme des blocs que l'on regarde. Pour un ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}^d$, nous dirons qu'un motif $P \in \mathcal{A}^F$ *apparaît* dans une suite $x \in X$ s'il existe $z \in \mathbb{Z}^d$ tel que $x|_{F+z} = P$. La *complexité* du sous-shift X est la fonction $p_X(F) = |\{x|_F \in \mathcal{A}^F : x \in X\}|$. Grâce à l'invariance de X par décalage, ce nombre est invariant si l'on translate F : $p_X(F + z) = p_X(F)$ pour tout $z \in \mathbb{Z}^d$. L'*entropie* du sous-shift est alors la limite $\lim_{n\to\infty} \log p_X(F_n)/|F_n|$ pour une suite de Følner $(F_n)_n \subset \mathbb{Z}^d$ (voir annexe A.5). Il se trouve que cette limite existe et est indépendante de la suite de Følner choisie.

Dans le cas bidimensionnel ($d = 2$), si $R_{m,n}$ désigne un rectangle $m \times n$ de $\mathbb{Z}^2$ pour m, $n \in \mathbb{N}$, nous noterons plus simplement $p_X(R_{m,n})$ par $p_X(m, n)$.

Même si dans ce contexte les notions s'étendent sans difficulté, ce n'est pas toujours le cas pour les propriétés de base des sous-shifts multidimensionnels. Notamment une extension du théorème 2.7 de Morse-Hedlund est

3. découvert successivement et indépendemment par chacune des personnes. La convention usuelle oublie généralement le premier auteur français Prouhet.

plus délicate. En relation avec la conjecture de Nivat, encore ouverte, voici un résultat lié à la complexité qui a été successivement amélioré.

Théorème 2.12. *Soit $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ tel qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ vérifiant*

$$p_X(n,m) \leq nm/\lambda,$$

où X est le sous-shift engendré par x et $\lambda = 144$ [38], $\lambda = 16$ [74], $\lambda = 2$ [21] ou $\lambda = 2nm/(nm + 2(|\mathcal{A}| - 1))$ [12]. Alors x est périodique.

3. Automorphismes de sous-shifts minimaux classiques

Les exemples les plus simples de sous-shifts minimaux ont une complexité linéaire. Leurs groupes d'automorphismes sont les mieux connus. Nous commencerons par les décrire grâce aux orbites remarquables que forment les points asymptotiques. Nous présentons ensuite pour les sous-shifts substitutifs des résultats récents donnant des algorithmes pour décrire leurs automorphismes et leurs applications facteurs. Nous nous intéresserons enfin à la riche classe des sous-shifts Toeplitz et à leurs automorphismes.

3.1. Cas de la complexité non super-linéaire.

De nombreux sous-shifts minimaux classiques ont une complexité linéaire et donc non super-linéaire. Citons par exemple les sous-shifts substitutifs minimaux et plus généralement les sous-shifts linéairement récurrents [36], ainsi que les sous-shifts donnés par des codages d'échange d'intervalles minimaux (Sturmiens, ...). Comme l'entropie vaut $\inf_n \log p_X(n)/n$, les sous-shifts (X, σ) de complexité non super-linéaires ont toujours une entropie nulle. Il s'agit en fait de la seule restriction concernant l'asymptotique de la fonction complexité. Par exemple, dans [29] pour toute fonction à croissance sous-exponentielle g, les auteurs donnent un exemple de sous-shift (X, σ) minimal de complexité non super-linéaire et vérifiant $\limsup_n p_X(n)/g(n) > 0$.

Pour étudier les automorphismes de sous-shift de complexité linéaire (et même non super-linéaire) nous étudierons tout d'abord une relation d'équivalence asymptotiques sur les orbites appelées *composante asymptotique*. Cette notion est issue directement du théorème 2.7 et est reliée à la notion éponyme, pour les flots, de M. Barge et B. Diamond introduite dans [5] pour les pavages. Le résultat principal est que les sous-shifts de complexité non super-linéaire n'ont qu'un nombre fini de composantes asymptotiques. Dans le cas substitutif, il est même possible de donner une description combinatoire de ces composantes [5].

Des orbites $\mathrm{Orb}_T(x)$ et $\mathrm{Orb}_T(y)$ sont dites *asymptotiques* s'il existe des points $x' \in \mathrm{Orb}_T(x)$ et $y' \in \mathrm{Orb}_T(y)$ qui sont asymptotiques. Cette condition est équivalente à dire que y est asymptotique à un certain $T^n x$ ou vice versa. Tout point de l'orbite de x est alors asymptotique à un élément de l'orbite de y. Cette relation, notée $\mathrm{Orb}_T(x)\ \mathcal{A}_s\ \mathrm{Orb}_T(y)$, est une relation d'équivalence sur la collection des orbites. Une $\mathcal{A}_s$-classe d'équivalence non réduite à un singleton est appelée *composante asymptotique*. La classe d'équivalence pour $\mathcal{A}_s$ de l'orbite de $x \in X$ est notée $\mathcal{AS}_{[x]}$ et $\mathcal{AS}$ désigne l'ensemble des composantes asymptotiques. Par une application directe du théorème 2.7, l'ensemble $\mathcal{AS}$ n'est pas vide pour un sous-shift infini.

Il est clair d'après la définition que la relation asymptotique est préservée par automorphisme : si les points $x, y \in X$ sont asymptotiques alors les points $\phi(x), \phi(y)$ sont asymptotiques pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(X, T)$. Il n'est pas difficile de vérifier également que les orbites $\mathrm{Orb}_T(\phi(x))$ et $\mathrm{Orb}_T(\phi(y))$ sont asymptotiques lorsque $\mathrm{Orb}_T(x)$ and $\mathrm{Orb}_T(y)$ sont asymptotiques. Ainsi, l'image d'une composante asymptotique par $\phi \in \mathrm{Aut}(X, T)$ est également une composante asymptotique. Ces propriétés montrent que chaque automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(X, T)$ induit une permutation $j(\phi)$ sur l'ensemble des composantes asymptotiques $\mathcal{AS}$. Par conséquent, le morphisme de groupe suivant est bien défini :

$$(\diamondsuit) \qquad \begin{aligned} j\colon \mathrm{Aut}(X, T) &\to \mathrm{Per}\mathcal{AS} \\ \phi &\mapsto \left(\mathcal{AS}_{[x]} \mapsto \mathcal{AS}_{[\phi(x)]}\right), \end{aligned}$$

où $\mathrm{Per}\mathcal{AS}$ désigne l'ensemble des permutations de $\mathcal{AS}$.

Nous pouvons à présent énoncer les principaux résultats de cette section.

Théorème 3.1. *Soit (X, σ) un sous-shift avec un nombre fini de composante asymptotique. Supposons qu'il existe un point x_0 tel que $\omega(x_0) = X$ et qui est asymptotique à un point différent. Alors :*

- *le quotient $\mathrm{Aut}(X, \sigma)/\langle\sigma\rangle$ est fini ;*
- *si de plus (X, σ) est minimal, le cardinal de $\mathrm{Aut}(X, \sigma)/\langle\sigma\rangle$ divise le nombre de composantes asymptotiques de (X, σ).*

La condition sur le point x_0 est automatiquement satisfaite lorsque le système dynamique (X, σ) est minimal.

La complexité non super-linéaire permet de majorer le nombre de composantes asymptotiques.

Lemme 3.2. *Soit (X, σ) un sous-shift. On a*

(1) $\liminf_{n\to+\infty} p_X(n + 1) - p_X(n) \leq \liminf_{n\to+\infty} p_X(n)/n$.

(2) Le nombre de composantes asymptotiques est majoré par $\liminf_{n\to+\infty} p_X(n+1) - p_X(n)$.

Il n'est cependant pas nécessaire que la complexité vérifie la condition (2) pour avoir un nombre fini de composante asymptotique. Il existe des sous-shifts minimaux avec une seule composante asymptotique et d'entropie strictement positive [30]. La combinaison du théorème 3.1 et du lemme 3.2 donne le corollaire suivant obtenu par différents auteurs au même moment [25, 19, 29].

Corollaire 3.3. *Si (X, σ) est un sous-shift minimal de complexité non super-linéaire, alors le cardinal du groupe quotient $\mathrm{Aut}(X, \sigma)/\langle\sigma\rangle$ est fini et divise le nombre de composantes asymptotiques de (X, σ).*

Nous verrons également dans la suite que les endomorphimes de sous-shifts de complexité non-superlinéaire sont tous inversibles (Théorème 4.1).

Illustrons ce résultat avec des systèmes classiques. Pour les sous-shifts Sturmiens (voir [58] pour un exposé détaillé de ces systèmes), il est bien connu que $p_X(n) = n+1$ pour tout entier n. Un tel système n'a donc qu'une composante asymptotique. Ainsi chaque automorphisme est une puissance du shift [72]. Le corollaire 3.3 s'applique tout particulièrement pour les sous-shifts substitutifs car ils ont une complexité linéaire. Des résultats dans ce sens avaient été obtenus par E. Coven [16] et V. Salo, I. Törmä [80] pour des substitutions particulières. Pour le sous-shift de Thue-Morse (cf exemple 2.11), il n'existe que deux composantes asymptotiques. Ainsi le groupe $\mathrm{Aut}(X, \sigma)/\langle\sigma\rangle$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit le groupe trivial, soit le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tout entier. Comme il existe un automorphisme échangeant les deux lettres de ces suites, il s'agit du dernier cas. Ce raisonnement se généralise aux systèmes dont le nombre de composantes asymptotiques est premier. Signalons également que les codages d'échange d'intervalles minimaux sont aussi connus pour avoir une complexité linéaire et sont par conséquent concernés par les résultats du corollaire 3.3.

Comme nous le verrons dans la preuve du théorème 3.1, la structure des composantes asymptotiques nous donne des informations cruciales sur le groupe d'automorphisme.

Ajoutons que l'item (2) du corollaire 3.3 est optimal pour divers points de vue. Tout d'abord sur la cardinalité de $\mathrm{Aut}(X, \sigma)/\langle\sigma\rangle$. Des travaux concomitant de B. Host et F. Parreau [52] et de M. Lemańczyk et M. Mentzen [60] montrent que pour tout groupe fini G, il existe un sous-shift minimal substitutif tel que $\mathrm{Aut}(X, \sigma)/\langle\sigma\rangle$ est isomorphe à G. De plus, le nombre de composantes asymptotiques de ce système est égal au cardinal de G [29].

Il n'est pas non plus possible d'affaiblir trivialement l'hypothèse sur la complexité. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-shift minimal de complexité $\mathrm{O}(n^{1+\epsilon})$ dont le groupe d'automorphisme a une infinité de générateurs [79, 30] (voir Section 3.4). Pour des complexités plus faibles, par exemple en en $\mathrm{O}(n \log n)$, il est possible que les conclusions du corollaire 3.3 ne soient plus valides, même s'il n'existe actuellement aucun résultat le démontrant explicitement.

3.2. **Preuves du lemme 3.2 et du théorème 3.1.**

Une version du lemme 3.2 pour le cas de la complexité linéaire apparaît dans [75, Lemme V.22]. Les mêmes idées s'étendent au cas de la complexité non super-linéaire.

Démonstration du lemme 3.2. Soit $\kappa_2 := \liminf_{n\to+\infty} p_X(n)/n < +\infty$. Nous affirmons qu'il existe une sous-suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que $p_X(n_i+1) - p_X(n_i) \leq \kappa_2$. Sinon, il existe un entier $A > \kappa_2$ tel que pour tout entier n suffisamment grand, nous avons $p_X(n+1) - p_X(n) \geq A$. Ainsi pour toute paire d'entiers $m < n$ suffisamment grands, $p_X(n) - p_X(m) = \sum_{i=m}^{n-1} p_X(i +$

$1) - p_X(i) \geq (n-m)A$. De cela nous en déduisons que $\liminf_{n\to+\infty} \frac{p_X(n)}{n} \geq A > \kappa_2$, une contradiction. Ceci prouve l'item (1).

Soit $\kappa := \liminf_n p_X(n+1) - p_X(n)$, supposé fini. Par conséquent, pour une certaine suite $(n_i)_i$ le nombre de mots spéciaux (gauche) de longueur n_i du sous-shift est majoré par κ.

Soient $\{x_0, y_0\}, \ldots, \{x_\kappa, y_\kappa\}$ des paires de points asymptotiques non triviales. Naturellement chaque paire induit une paire d'orbites asymptotiques. Puisque X est un sous-shift, pour chaque entier $0 \leq j \leq \kappa$ il existe un entier $\ell_j \in \mathbb{Z}$ tel que toutes les coordonnées de x_j et y_j plus grandes que ℓ_j coïncident alors que les $\ell_j - 1$ premières coordonnées sont différentes. Ainsi, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le mot de longueur n_i commençant à la coordonnée ℓ_j dans x_j et y_j est un mot spécial gauche.

Puisque le nombre de mots spéciaux de longueur n_i est borné par κ, le lemme des tiroirs implique que deux mots spéciaux associés à des paires différentes doivent coïncider. Ce fait étant vrai pour tout i et comme il n'y a qu'un nombre fini de paires d'indice, le lemme des tiroirs nous donne également qu'une même paire d'indice est commune pour une infinité de i. Ainsi les paires asymptotiques associées sont équivalentes. Ceci prouve l'item (2). $\square$

Pour prouver le théorème 3.1, nous aurons besoin du résultat suivant qui est un corollaire du lemme 2.2.

Corollaire 3.4. *Soit (X, T) un système dynamique topologique avec un point $x_0 \in X$ asymptotique à un autre point et tel que $\omega(x_0) = X$. Alors nous avons la suite exacte suivante :*

$$\{1\} \longrightarrow \langle T\rangle \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathrm{Aut}(X,T) \xrightarrow{j} \mathrm{Per}\mathcal{AS},$$

où j a été définie dans $(\diamondsuit)$.

Plus précisément, La permutation $j(\phi)$, pour $\phi \in \mathrm{Aut}(X,T)$, fixe une composante asymptotique $\mathcal{A}S_{[x_0]}$ si et seulement si ϕ est une puissance de T.

Démonstration. Soit ϕ un automorphisme dans $\mathrm{Aut}(X, T)$ et supposons $\mathcal{A}S_{[\phi(x_0)]} = \mathcal{A}S_{[x_0]}$. Cela signifie qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que x_0 et $T^n \circ \phi(x_0)$ sont asymptotiques. Par le lemme 2.2, $T^n \circ \phi$ est l'identité et ϕ appartient à $\langle T\rangle$. $\square$

Ce résultat montre qu'un automorphisme qui n'est pas une puissance de T ne peut fixer une composante asymptotique dans un système minimal.

Démonstration du théorème 3.1. Le premier point est un corollaire immédiat du lemme 3.2 et du corollaire 3.4.

Pour le second point, par le corollaire 3.4, aucune composante asymptotique n'est fixée par une automorphisme de classe non trivial dans $\mathrm{Aut}(X, \sigma)/\langle\sigma\rangle$. Ainsi ce groupe agit de façon libre sur l'ensemble fini $\mathcal{AS}$ des composantes asymptotiques. L'ensemble $\mathcal{AS}$ se décompose en une union disjointe d'orbites sous l'action du groupe $\mathrm{Aut}(X,\sigma)/\langle\sigma\rangle$ et chaque orbite a la même cardinalité que $\mathrm{Aut}(X,\sigma)/\langle\sigma\rangle$. □

3.3. **Facteurs et automorphismes de sous-shifts substitutifs.** Dans le cas des sous-shifts substitutifs, il est possible d'être plus précis et de décrire les automomorphismes et leurs fonctions de bloc. En effet, en conséquence du corollaire 3.3, pour un système subsitutif fixé (X,σ), il existe un ensemble fini $F \subset \mathrm{Aut}(X,\sigma)$ tel que n'importe quel automorphisme du système est la composition déléments de F et d'une puissance du shift. Il en ressort que la description des éléments de la famille F permet la description complète des automorphismes. En parallèle un résultat de F. Durand [36] stipule qu'un sous-shift substitutif minimal (et plus généralement un sous-shift linéairement répétitif) ne possède qu'un nombre fini de facteurs sous-shifts apériodiques, à conjugaison près. Il est alors naturel à partir d'une substitution, d'essayer d'énumérer ces familles finies d'automorphismes et de facteurs qui engendrent toute la famille des transformations. Les applications facteurs sur des sous-shifts ne sont pas très éloignées des automorphismes car elles sont, elles aussi, données par des fonctions de bloc glissant.

Une stratégie pour déterminer les fonctions de bloc associées aux facteurs (resp. automorphismes) qui engendrent toute la famille, consiste à donner une borne R sur les rayons de ces fonctions de bloc. Il "suffira" ensuite de tester toutes les fonctions de bloc de rayon inférieur à R (en nombre fini) qui définissent un facteur (resp. un automorphisme) du sous-shift. Cette stratégie a été initiallement élaborée par V. Salo et I. Törmä [80] pour les substitutions de type Pisot. Elle a été également appliquée pour les substitutions de longueurs constantes dans [19] et [20, 18] pour les facteurs entre systèmes substitutifs. Le cas général a été traité récemment par F. Durand et J. Leroy [37]. Plus précisément ils obtiennent les résultats suivants.

Théorème 3.5 ([37])**.** *Soient (X,σ) et (Y,σ) des sous-shifts minimaux substitutifs où (Y,σ) est apériodique, alors il existe une constante R (calculable à partir des substitutions) telle que toute application facteur de (X,σ) vers (Y,σ) est la composition d'une puissance du shift σ et d'une fonction de bloc glissant de rayon inférieur à R.*

Théorème 3.6 ([37])**.** *Soient (X,σ) et (Y,σ) des sous-shifts minimaux substitutifs et $\hat{\phi}$ une fonction de bloc. Il est décidable de savoir si $\hat{\phi}$ défini une application facteur de (X,σ) vers (Y,σ).*

En particulier, de ces résultats on en déduit le résultat suivant pour les automorphismes.

Corollaire 3.7 ([37])**.** *Soit (X,σ) un sous-shift minimal substitutif. Il existe un algorithme pour déterminer toutes les fonctions de* $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$*.*

De façon similaire, dans le cas du problème de factorisation, ils obtiennent.

Corollaire 3.8 ([37])**.** *Soient (X, σ) et (Y, σ) des sous-shifts minimaux substitutifs. Il est décidable s'il existe ou pas une application facteur $\phi\colon (X, \sigma) \to (Y, \sigma)$.*

Même si les problèmes de facteurs et d'automorphismes sont proches, l'étude des facteurs de système diffère de celle des automorphismes car les applications facteurs ne peuvent pas se composer. Les arguments utilisant la structure de groupe des automorphismes ne peuvent donc plus être utilisés dans ce cas.

Chronologiquement, le théorème 3.5 dans le cas des substitutions de longueurs constantes spécifiques est une conséqunece des résultats de B. Host et F. Parreau dans [52]. Le théorème 3.6, toujours dans le cas des substitutions de longueur constante est un résultat dû à I. Fagnot [39] en utilisant les propriétés de décidabilité de la logique du premier ordre de l'arithmétique de Presburger. Le théorème 3.5 pour le cas général des substitutions de longueur constante a été obtenu peu de temps avant [37] par par E. Coven, A. Quas et R. Yassawi dans [19] et E. Coven, A. Dykstra, M. Keane et M. LeMasurier [18]. Leur stratégie se base sur l'étude du facteur équicontinu maximal (un odomètre cf section 3.4.1) d'un tel système. En particulier ce facteur π admet une fibre finie. Des résultats similaires aux lemmes 2.3 et 2.6 permettent alors d'associer une empreinte de chaque facteur/automorphisme en une application $\hat{\pi}(\phi)$ sur les odomètres respectifs. Le rayon de la fonction de bloc glissant ϕ en fonction de $\hat{\pi}(\phi)$ est obtenu grâce une étude combinatoire, tout particulièrement pour les éléments du noyau de $\hat{\pi}$. De ceci, les auteurs de [19, 18] en déduisent une version du théorème 3.5.

Le cas des substitutions de longueur non constante est plus délicat et se base sur une stratégie différente initiée dans [80] utilisant une famille de transformations appelées *DILL* qui inclut les fonctions de bloc glissant et les substitutions. Ces transformations DILL sont également données par des mots du langage d'une longueur fixée appelée rayon. En utilisant un processus de renormalisation, il est alors possible d'associer à une transformation DILL une autre transformation DILL de rayon plus petit. Partant d'un facteur et en itérant le processus, les auteurs de [37] montrent qu'ils obtiennent au final de nouveau une application facteur avec un rayon petit et borné *a priori* par un constante calculable. Il se trouve également que l'application facteur initiale n'est autre qu'une composée de ce nouveau facteur avec une puissance du shift. Techniquement, la constante calculable majorant le rayon final dépend notamment de la constante de linéaire répétitivité et des constantes de reconnaissabilité du théorème fondamental de B. Mossé [69], dont les auteurs de [37] ont montré la calculabilité à partir des substitutions. Ils obtiennent grâce à cela le théorème 3.5.

La preuve du théorème 3.6 est également plus compliquée et diffère pour les substitutions de longueur non constante. Elle se base sur les notions de mots de retours sur des clopens et le fait que les sous-shifts substitutifs minimaux n'ont, à conjugaison près, qu'un nombre fini de système induit sur les cylindres [35, 51].

Malgré la puissances de ces résultats, il reste tout de même encore un problème ouvert concernant les facteurs de systèmes substitutifs.

Question 3.9. *Existe-t-il un algorithme pour donner la liste de tous les sous-shifts apériodiques, à conjugaison près, facteurs d'un sous-shift substitutif donné ?*

On sait que cette liste est finie et que ces sous-shifts sont nécessairement substitutifs [36]. L'hypothèse d'apériodicité est importante comme le montre l'exemple d'une substitution engendrant un sous-shift Toeplitz (cf section 3.4), comme $0 \mapsto 01$, $1 \mapsto 00$. Ce sous-shift se factorise sur l'odomètre et donc admet une infinité de facteurs périodiques (facteurs de l'odomètre).

Les résultats de [37] ne donnent pas une réponse à ce problème. Notamment la constante calculable apparaissant dans le théorème 3.5 dépend du sous-shift facteur potentiel qui est inconnu dans ce problème. Dans le cas des substitutions de longueur constante, une avancée récente a été effectuée. Il est démontré dans [70] qu'un sous-shift facteur d'un tel système est également substitutif pour une substitution de longueur constante. Par conséquent, l'algorithme de [17] énumérant tous les facteurs substitutifs de longueur constante donnée, itéré suffisamment de fois, donne la liste de tous les facteurs. Cependant le nombre d'itérations nécessaires en fonction de la substitution reste encore inconnu.

3.4. **Sous-shifts Toeplitz.** Les sous-shifts Toeplitz, dont le nom a été introduit par K. Jacob et M. Keane dans [53], ont depuis, été beaucoup étudiés. Grâce à leurs propriétés arithmético-combinatoires, ces sous-shifts réalisent de nombreux exemples ou contre-exemples de systèmes minimaux pour des problèmes de théorie ergodique ou de dynamique topologique. Le lecteur intéressé trouvera dans [32] et ses références un survol de leurs différentes propriétés. Citons quelques résultats en relation avec le thème de cet article. S. Williams propose dans [85] le premier exemple de système minimal non uniquement ergodique par un sous-shift Toeplitz. Différents types de comportement asymptotique de complexité (en $\Theta(n^{1+\alpha_0}\ (\log n)^{\alpha_1}$ $(\log\log n)^{\alpha_2} \cdots (\log_{(k)})^{\alpha_k})$ avec $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ arbitraires) sont obtenus avec de tels sous-shifts par J. Goyon et J. Cassaigne [41]. Pour des complexités à croissances exponentielles, mentionnons également que tout nombre positif est l'entropie d'un sous-shift Toeplitz (cf [32]). Malgré toute cette diversité, ces systèmes sont très proches de systèmes équicontinus appelés odomètres dans le sens où ces sous-shifts sont les extensions symboliques presque injectives des odomètres [32]. Plus en relation avec les automorphismes, T. Downarowicz, construit dans [31] un tel sous-shit non coalescent, *i.e.* qui admet une endomorphisme non inversible.

Nous étudions dans cette section le groupe des automorphismes des sous-shifts Toeplitz. Nous verrons qu'ils fournissent également des exemples de différents groupes avec diverses propriétés (infiniment engendré, trivial, avec ou sans torsion, ...). Cependant nous montrerons que ces groupes sont toujours abéliens. Pour cela nous commencerons par rappeler les propriétés de l'odomètre. Puis nous en déduirons des propriétés des automorphismes de systèmes Toeplitz. Finalement nous présenterons quelques exemples avec de gros groupes d'automorphisme.

3.4.1. *Odomètres.* Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels telle que pour chaque n, p_n divise p_{n+1}. L'*odomètre* d'échelle $(p_n)_{n\geq 1}$ est défini comme

$$\mathbb{Z}_{(p_n)} = \{(x_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_n}; x_{n+1} = x_n \mod p_n \ \forall n \geq 1\},$$

où $\mathbb{Z}_p$ désigne le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Dans ce contexte, ce groupe associé à l'échelle $(p^n)_{n\geq 1}$ sera noté $\mathbb{Z}_{(p^n)}$. L'ensemble $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ est une limite projective $\lim\limits_{\leftarrow} \mathbb{Z}_{p_n}$ des morphismes canoniques $\mathbb{Z}_{p_{n+1}} \to \mathbb{Z}_{p_n}$. Il est munit de la topologie induite par la topologie produit de $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_n}$. Ainsi une suite de points $\{(x_n^{(k)})_n\}_k$ converge vers $(x_n^{(\infty)})_n$ quand k tend vers l'infini si pour chaque entier n, $x_n^{(k)} = x_n^{(\infty)} \mod p_n$ pour tout entier k assez grand.

Le groupe $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ est abélien pour l'addition par coordonnées. Lorsqu'il est fini, il est cyclique. Dans tous les cas, les projections canoniques $(x_n)_n \mapsto x_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$ pour un entier k séparent les points de l'odomètre de sorte que ce groupe est résiduellement fini (cf Annexe A.3). L'odomètre $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ où $p_n = n!$ pour tout $n \geq 1$ est appelé l'*odomètre universel*.

Les éléments $(0, 0, \ldots)$ et $(1, 1, \ldots)$ d'un odomètre sont notés $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$. La dynamique naturelle de l'odomètre $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ est donné par l'addition de $\mathbf{1}$: $(x_n)_n \mapsto (x_n + 1 \mod p_n)_n$. Ce système noté $(\mathbb{Z}_{(p_n)}, +\mathbf{1})$ est également appelé *odomètre*. Il n'est pas difficile de voir que c'est un système équicontinu (cf section 2.2). De plus, comme pour tout entier n, l'action est transitive modulo p_n, l'action est globalement minimale sur $\mathbb{Z}_{(p_n)}$. En particulier, le sous-groupe $\langle \mathbf{1} \rangle$ engendré par $\mathbf{1}$ est dense dans $\mathbb{Z}_{(p_n)}$. Ce sous-groupe est identifié avec les entiers.

Le groupe des automorphismes de l'odomètre est alors simple à décrire.

Lemme 3.10. *Le groupe des automorphismes d'un odomètre $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ est isomorphe à l'odomètre en tant que groupe :* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{(p_n)}, +\mathbf{1}) \simeq \mathbb{Z}_{(p_n)}$.
En particulier ce groupe est abélien, résiduellement fini.

Démonstration. Comme le groupe $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ est abélien, chaque élément $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_{(p_n)}$ définit une automorphisme $R_{\mathbf{z}} \colon \cdot \mapsto \cdot + \mathbf{z}$ commutant avec $+\mathbf{1}$. Réciproquement, un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{(p_n)}, +\mathbf{1})$ vérifie $\phi(\mathbf{0}) = R_{\phi(\mathbf{0})}(\mathbf{0})$. Par le lemme 2.1, on a $\phi = R_{\phi(\mathbf{0})}$. □

Le lemme suivant permet de caractériser la classe des odomètres à conjugaison près.

Lemme 3.11. *Soient* $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ *et* $\mathbb{Z}_{(q_n)}$ *des odomètres.*
L'odomètre $(\mathbb{Z}_{(p_n)}, +\mathbf{1})$ *est un facteur de* $(\mathbb{Z}_{(q_n)}, +\mathbf{1})$ *ssi* $\forall n \geq 1$, $\exists k$ *tel que* $p_n | q_k$.
En particulier, les odomètres $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ *et* $\mathbb{Z}_{(q_n)}$ *sont conjugués ssi*

$$\{\frac{j}{p_n} : j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\} = \{\frac{j}{q_k} : j \in \mathbb{Z}, k \geq 1\}.$$

Il ressort de ce lemme que les odomètres $\mathbb{Z}_{(p^n)}$ et $\mathbb{Z}_{(q^n)}$ où p et q sont premiers entre eux, ne sont pas facteur l'un de l'autre et n'ont pas de d'odomètre facteur commun. À l'opposé, l'odomètre universel est une extension de tous les autres odomètres.

Démonstration. On utilise les notations de la preuve du lemme 3.10. Si $\forall n$, $\exists k_n$ tel que $p_n | q_{k_n}$, alors l'application $\pi_n : x \in \mathbb{Z}/q_{k_n}\mathbb{Z} \mapsto x \mod p_n \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ est bien définie et est surjective. Il est alors simple de vérifier que l'application $\pi : (x_n)_n \in \mathbb{Z}_{(q_n)} \mapsto (\pi_n(x_{k_n}))_n \in \mathbb{Z}_{(p_n)}$ est bien définie, surjective et commute avec l'homéomorphisme $+\mathbf{1} = R_{\mathbf{1}}$.

Réciproquement, soit $\pi : \mathbb{Z}_{(q_n)} \to \mathbb{Z}_{(p_n)}$ une application facteur. Quitte à composer π avec l'application $R_{-\pi(\mathbf{0})}$, on peut supposer que $\pi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pour un odomètre $\mathbb{Z}_{(r_i)}$ d'échelle $(r_i)_{i\geq 1}$, les ensembles $U_n(\mathbb{Z}_{(r_i)}) := \{(x_i)_i \in \mathbb{Z}_{(r_i)} : x_n = 0 \mod r_n\}$ pour un entier n fixé, sont des clopens et forment une base de voisinage de $\mathbf{0}$. Ainsi par continuité de π, pour tout entier n, il existe un entier k tel que $U_k(\mathbb{Z}_{(q_i)}) \subset \pi^{-1}(U_n(\mathbb{Z}_{(p_i)}))$. Puisque $R_{\mathbf{1}}^{q_k}(\mathbf{0}) \in U_k(\mathbb{Z}_{(q_i)})$, on en déduit que $R_{\mathbf{1}}^{q_k}(\pi(\mathbf{0})) \in U_n(\mathbb{Z}_{(p_i)})$ et donc $q_k = 0 \mod p_n$.

Le cas de la conjugaison provient de la propriété de coalescence de l'odomètre. □

Pour comprendre les éléments de torsion dans le groupe d'automorphisme, nous aurons également besoin de déterminer le groupe de torsion de l'odomètre. Pour cela nous introduisons des notations supplémentaires. Pour chaque nombre premier p, notons par $v_p(n)$ la *valuation p-adique* de l'entier n, c'est-à-dire, $v_p(n) = \max\{k \geq 0; p^k \text{ divise } n\}$. Pour un odomètre $\mathbb{Z}_{(p_n)}$, la suite $(v_p(p_n))_{n\geq 1}$ est une suite croissante. Suivant [32], il est possible de définir la *fonction de multiplicité* par

$$\mathbf{v}((p_n)) = \left(\lim_{n\to\infty} v_p(p_n); p \text{ premier}\right).$$

Pour un groupe abélien G, son groupe de torsion est noté $T(G)$, c'est-à-dire, le sous-groupe engendré par les éléments d'ordre fini (ou de torsion) de G. Plus précisément, pour un entier p, $T(G)_p$ est l'ensemble des éléments de G d'ordre une puissance de p.

Lemme 3.12. *Soit* $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ *un odomètre. Alors son groupe de torsion est*

$$T(\mathbb{Z}_{(p_n)}) = \bigoplus_p T(\mathbb{Z}_{(p_n)})_p,$$

où la somme est considérée sur tous les nombres premiers p tels que la limite $\lim_{n\to\infty} v_p(p_n)$ est finie et strictement positive.

De plus, chaque groupe $T(\mathbb{Z}_{(p_n)})_p$ est un groupe cyclique fini de cardinalité $p^{\lim_n v_p(p_n)}$. En particulier, si pour tout nombre premier p la limite vérifie $\lim_{n\to\infty} v_p(p_n) \in \{0, \infty\}$, le groupe $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ est sans torsion.

On retiendra plusieurs remarques de ce lemme. Pour un sous-groupe finiment engendré de l'odomètre, son groupe de torsion est une somme directe de groupes cycliques, et par le lemme Chinois, ce groupe de torsion est cyclique.

Une autre remarque est que le groupe des entiers p-adic $\mathbb{Z}_{(p^n)}$ et l'odomètre universel sont sans torsion. À l'opposé, l'odomètre $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ où p_n est le produit des n nombres premiers *i.e.*, $\lim_{n\to\infty} v_p(p_n) = 1$ pour tout premier p, a un groupe de torsion infiniment engendré.

Démonstration. Le lemme chinois implique que $T(\mathbb{Z}_{(p_n)}) = \bigoplus_p T(\mathbb{Z}_{(p_n)})_p$, où la somme est prise sur tous les nombres premiers. Ainsi, il suffit d'étudier chaque groupe $T(\mathbb{Z}_{(p_n)})_p$.

Soit p un premier tel qu'il existe $(x_n)_{n\geq 1} \in T(\mathbb{Z}_{(p_n)})_p$ différent de $\mathbf{0}$ et d'ordre p^k pour un certain $k \geq 1$. Cela signifie que $p^k x_n = 0 \mod p_n$ pour chaque $n \geq 1$ et qu'il existe n tel que pour tout entier m suffisamment grand $m \geq n$, l'ordre de x_m dans $\mathbb{Z}_{p_m}$ est p^k. En particulier, p^k divise p_m. Ainsi, dès que $T(\mathbb{Z}_{(p_n)})_p$ n'est pas trivial, la limite $\lim_{n\to\infty} v_p(p_n)$ est strictement positive. Montrons qu'elle est finie. Sinon, il y aurait un certain m tel que $p_m = p_n p^k q$ pour un entier q et nous aurions $x_m = a p_n q$ pour un entier a. Comme $x_n = x_m \mod p_n = 0 \mod p_n$, cela contredit le fait que x_n est d'ordre p^k.

Par conséquent, la limite $\lim_{n\to\infty} v_p(p_n) = k_p$ est finie et l'ordre de $(x_n)_{n\geq 1}$ est au plus p^{k_p}. Pour tout entier n suffisamment grand (de sorte que $v_p(p_n) = k_p$), le lemme chinois nous donne également que l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}_{p_n}$ d'ordre divisant p^{k_p}, forme un groupe cyclique de cardinalité p^{k_p}. On en conclut facilement que le groupe $T(\mathbb{Z}_{(p_n)})_p$ est cyclique de cardinalité p^{k_p}. $\square$

3.4.2. *Suites Toeplitz.* Une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, sur un alphabet $\mathcal{A}$ est dite *Toeplitz* si chaque mot de x apparaît périodiquement dans x, ou plus précisément si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x_{n+kp} = x_n, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Une telle suite est nécessairement uniformément récurrente. L'ordre des quantificateurs est important car si l'on inverse les premiers quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans la définition, on obtient la définition d'une suite périodique.

Pour un entier $p \geq 1$, la *partie* p-périodique de x est l'ensemble des indices où x est p-périodique $Per_p(x) = \{n \in \mathbb{Z}; x_n = x_{n+kp} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}$. Il est simple de vérifier que $Per_p(x) \subset Per_q(x)$ dès que p divise q.

Le p-*squelette* $S_p(x) \in (\mathcal{A} \cup \{?\})^{\mathbb{Z}}$ est obtenu à partir de x en remplaçant x_i par ? (une lettre n'appartenant pas à $\mathcal{A}$, appelé *trou*) pour tous les indices $i \notin Per_p(x)$:

$$S_p(x) = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in Per_p(x) \\ ? & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce p-squelette est p-périodique et coïncide avec le q-squelette $S_q(x)$ en dehors des trous pour tout multiple q de p. L'entier p est une *période essentielle* lorsque p est la plus petite période de la suite $S_p(x)$: $\sigma^q(S_p(x)) \neq S_p(x)$, pour $0 < q < p$. Une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est dite *structure périodique* de x si elle est strictement croissante, p_n divise p_{n+1}, chaque p_n est une période essentielle de x et $\mathbb{Z} = \bigcup_{n\geq 1} Per_{p_n}(x)$. Il est simple de vérifier qu'une sous suite d'une structure périodique est encore une structure périodique de x. En fait, chaque suite Toeplitz apériodique admet une structure périodique et $x = \lim_n S_{p_n}(x)$ [32].

Le premier exemple de suite Toeplitz a été donné par Garcia et Hedlund [43] sur l'alphabet $\{0, 1\}$ où la structure de période est $(2^n)_n$ et les trous de $S_{2^{2n-1}}(x)$ indicés par un entier pair sont remplis par un 1 dans $S_{2^{2n}}(x)$ et ceux de $S_{2^{2n}}(x)$ le sont par un 0 dans $S_{2^{2n+1}}(x)$.

$S_2(x) =$	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0
$S_4(x) =$	0	1	0	?	0	1	0	?	0	1	0	?	0	1	0	?	0	1	0	?	0	1	0
$S_8(x) =$	0	1	0	0	0	1	0	?	0	1	0	0	0	1	0	?	0	1	0	0	0	1	0
$S_{16}(x) =$	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	?	0	1	0	0	0	1	0
$S_{32}(x) =$	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0

Comme chaque squelette contient un trou, la suite limite $\lim_n S_{2^n}(x)$ est apériodique.

Un sous-shift (X, σ) est alors dit *Toeplitz* s'il est la fermeture de l'orbite d'une suite Toeplitz x. Tous les points y de X ne sont pas forcément des suites Toeplitz, en revanche ils ont tous la même *structure squelettique* $(S_{p_n}(y))_{n\geq 1}$ modulo le shift. Plus précisément, si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une structure périodique de la suite Toeplitz x et $y \in X$, alors pour tout entier $n \geq 1$ il existe $j_n \in \{0, \ldots, p_n - 1\}$ tel que $Per_{p_n}(y) = Per_{p_n}(x) - j_n$ et les suites x and y coïncident sur ces coordonnées *i.e.*, $S_{p_n}(y) = \sigma^{j_n} S_{p_n}(x)$ (cf [32], Section 8).

Les propriétés arithmétiques d'une suite Toeplitz ont des conséquences dynamiques. En particulier, il existe un clopen U de X de diamètre arbitrairement petit tel que les temps de retour de x dans U contient un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Cette propriété est très proche de celle des odomètres et donne lieu au théorème suivant. Rappelons qu'une application facteur $\pi \colon X \to Y$ est dite *presque injective* si l'ensemble des points où elle est injective $\{y \in Y : |\pi^{-1}(y)| = 1\}$ est non vide et dense dans Y. Dans le cas minimal, la condition de densité est nécessairement satisfaite.

Théorème 3.13 (Williams [85])**.** *Soit* (X, σ) *un sous-shift de structure périodique* $(p_n)_n$*. Alors l'odomètre* $(\mathbb{Z}_{(p_n)}, +\mathbf{1})$ *est un facteur de* (X, σ) *dont* *l'application facteur* $\pi\colon X \to \mathbb{Z}_{(p_n)}$ *est presque injective. De plus elle vérifie* $\pi(x) = \pi(y)$ *ssi* x *et* y *ont les mêmes* p_n*-squelettes pour tout* n*. En particulier,* $x \in X$ *est une suite Toeplitz ssi* $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$*.*

Remarquons tout d'abord que l'application π ne peut être bijective que lorsque X est fini. Dans ce cas, comme l'action de l'odomètre est équicontinu, la famille $\{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ doit être équicontinue. Il ne peut donc pas exister de points asymptotiques. Par le théorème 2.7, le sous-shift X est fini.

Une conséquence dynamique de ce théorème est que l'odomètre $\mathbb{Z}_{(p_n)}$ est le facteur équicontinu maximal du sous-shift Toeplitz X [32].

Le lemme suivant est bien connu. Rappelons que les notions de points proximaux et d'extension proximale sont définies dans les sections 2.1 et 2.2.

Lemme 3.14. *Soit une application facteur* $\pi\colon (X,T) \to (Y,S)$ *entre systèmes minimaux presque injective. Si* $\pi(x) = \pi(y)$*, alors* x *et* y *sont proximaux,*

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ un point d'injectivité de π, *i.e.* $\pi^{-1}(\pi(x_0)) = \{x_0\}$ et soit $(n_i)_i$ une suite croissante d'entiers tels que $T^{n_i}(x)$ converge vers x_0. Alors n'importe quel point $z \in X$ d'accumulation de $\{T^{n_i}(y)\}_i$ vérifie $\pi(z) = \pi(x_0)$ et donc $z = x_0$ et $\liminf_n \operatorname{dist}(T^n(x), T^n(y)) = 0$. □

Ansi, par ce lemme, une extension presque injective est un cas particulier d'extension proximale. Des lemmes 2.4, 3.10 et du théorème 3.13 de Williams, nous en déduisons le résultat général suivant sur les automorphismes de sous-shifts Toeplitz.

Corollaire 3.15. *Si* (X,σ) *est un sous-shift Toeplitz de structure périodique* (p_n)*, alors l'extension presque injective* $\pi\colon X \to \mathbb{Z}_{(p_n)}$ *induit un morphisme injectif* $\hat{\pi}\colon \operatorname{End}(X,\sigma) \to \mathbb{Z}_{(p_n)}$*.*
En particulier, $\operatorname{End}(X,\sigma)$ *est un semi-groupe abélien résiduellement fini.*

Historiquement, il avait été déjà remarqué ques les automorphismes de sous-shifts Toeplitz commutaient entre eux par J. Auslander [2] en utilisant la notion de semi-groupe enveloppant. Le résultat du corollaire 3.15 restreint les groupes d'automorphismes, nécessairement abélien, des sous-shits Toeplitz. Rappelons par exemple, que le groupe des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas résiduellement fini (cf Annexe A).

Les racines de l'unité (ou élément de torsion) d'un groupe d'automorphisme d'un sous-shift Toeplitz sont également contraintes par le facteur équicontinu maximal et donc par la structure périodique. Par exemple, par le lemme 3.12, si la structure périodique d'un sous-shift Toeplitz X est la suite $(n!)_n$ ou $(p^n)_n$ pour un entier p, le groupe $\operatorname{Aut}(X,\sigma)$ n'a pas d'élément de torsion. De façon général, le même lemme 3.12 avec le lemme Chinois impliquent que pour un sous-shift Toeplitz, un nombre fini d'automorphisme, racine de l'unité, ne peuvent engendrer qu'un groupe fini cyclique. On en déduit le résultat suivant (voir [30, 19]).

Corollaire 3.16. *Soit* (X,σ) *un sous-shift Toeplitz et soit* $T = T(\mathrm{Aut}(X,\sigma))$ *le groupe de torsion de* $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$*. Si le quotient* $\mathrm{Aut}(X,\sigma)/\langle\sigma\rangle$ *est fini, alors* $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}\oplus T$ *où* T *est soit trivial soit isomorphe à un certain* $\mathbb{Z}_N$*.*

Ce résultat s'applique particulièrement pour tout sous-shift Toeplitz de complexité non super-linéaire, en particulier ceux substitutifs, par le corollaire 3.3.

En dehors de ces restrictions, mentionnons quelques résultats de réalisation de groupe d'automorphisme de sous-shift Toeplitz.

Présentons d'abord une propriété utile pour créer des sous-shifts avec de gros groupes d'automorphismes. Rappelons que deux systèmes dynamiques minimaux (X,T) et (Y,S) sont *disjoints* si le système produit $(X\times Y, T\times S)$ est également minimal. Il existe une caractérisation des sous-shifts Toeplitz disjoints. Deux sous-shifts Toeplitz de structure périodique $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ sont disjoints lorsqu'aucun entier (≥ 2) ne divise un p_n et un q_k :

Proposition 3.17. *Soient* (X,σ) *et* (Y,σ) *deux sous-shifts Toeplitz de structure périodique respective* (p_n) *et* (q_n)*. Alors le système produit* $(X\times Y, \sigma\times\sigma)$ *est minimal si et seulement si*

$$\{p \geq 2 : p \text{ divise un } p_n\} \cap \{p \geq 2 : p \text{ divise un } q_k\} = \emptyset.$$

Dans ce cas, le système produit est un sous-shift Toeplitz.

Démonstration. On suppose tout d'abord que les structures périodiques (p_n) et (q_k) n'ont pas de diviseurs communs. Soient x et y deux suites Toeplitz de respectivement X et Y. Considérons des mots u et v des langages de X et de Y. Les mots u et v sont de la forme $x_i \cdots x_{i+|u|-1}$ et $y_j \cdots y_{j+|v|-1}$ pour des entiers i et j. Par définition, il existe des périodes p_n et q_k telles que $\{i,\ldots,i+|u|-1\} \subset Per_{p_n}(x)$ et $\{j,\ldots,j+|v|-1\} \subset Per_{q_k}(y)$, *i.e.* les occurrences des mots u et v dans x et y contiennent les ensembles $i+p_n\mathbb{Z}$ et $j+q_k\mathbb{Z}$. Comme q_k et p_n n'ont pas de diviseurs communs, il existe des entiers q et q' tels que $i+p_nq = j+q_kq'$. Ainsi les suites $\sigma^{i+p_nq}x$ et $\sigma^{i+p_nq}y$ appartiennent aux cylindres $[u]$ et $[v]$. La $\sigma\times\sigma$-orbite de (x,y) est donc dense dans $X\times Y$. En outre il est simple de vérifier que la suite (x,y) est une suite Toeplitz pour l'alphabet produit, de structure périodique (p_nq_n). Ainsi le système $(X\times Y, \sigma\times\sigma)$ est un sous-shift Toeplitz et donc est minimal.

Réciproquement, si l'on suppose que q divise des périodes p_n et q_k. Alors les projections $x \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z} \mapsto x \mod q \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}/q_k\mathbb{Z} \mapsto x \mod q \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ induisent, via les facteurs équicontinus maximaux, des projections $\pi\colon X \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $\pi'\colon Y \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ échangeant l'action et l'addition par 1, *i.e.* telles que $\pi\circ\sigma(x) = \pi(x)+1 \mod q$ et $\pi'\circ\sigma(y) = \pi'(y)+1 \mod q$ pour tout $x\in X$, $y \in Y$. Ainsi l'ensemble $\{(x,y)\in X\times Y; \pi(x)=\pi'(y)\}$ est un fermé invariant par $\sigma\times\sigma$ et $X\times Y$ n'est pas minimal. $\square$

Grâce au critère précédent nous pouvons construire une infinité non dénombrable de systèmes Toeplitz disjoints. Avec ceux-ci nous pouvons obtenir de gros groupes d'automorphismes.

Proposition 3.18. *Soient* (X_1, σ) *et* (X_2, σ) *deux sous-shifts Toeplitz disjoints. Alors* $\mathrm{End}(X_1 \times X_2, \sigma \times \sigma) \simeq \mathrm{End}(X_1, \sigma) \oplus \mathrm{End}(X_2, \sigma)$ *et* $\mathrm{Aut}(X_1 \times X_2, \sigma \times \sigma) \simeq \mathrm{Aut}(X_1, \sigma) \oplus \mathrm{Aut}(X_2, \sigma)$*. En particulier, si* (X_1, σ) *et* (X_2, σ) *sont coalescents alors* $(X_1 \times X_2, \sigma \times \sigma)$ *l'est également.*

Démonstration. Il est immédiat que $\mathrm{End}(X_1, \sigma) \oplus \mathrm{End}(X_2, \sigma) \subset \mathrm{End}(X_1 \times X_2, \sigma \times \sigma)$. Soit $\phi(x_1, x_2) = (\phi_1(x_1, x_2), \phi_2(x_1, x_2))$ un endomorphisme du système produit. Comme le système produit est également un sous-shift Toeplitz, par le corollaire 3.15, ϕ commute avec $\mathrm{Id} \times \sigma$ et $\sigma \times \mathrm{Id}$. On obtient $\phi_1(x_1, x_2) = \phi_1(x_1, \sigma(x_2))$ et $\phi_2(x_1, x_2) = \phi_2(\sigma(x_1), x_2)$. Par minimalité de (X_1, σ) et de (X_2, σ), ϕ_i ne dépend que que x_i pour $i = 1, 2$, ce qui signifie que $\phi \in \mathrm{End}(X_1, \sigma) \oplus \mathrm{End}(X_2, \sigma)$. La preuve est similaire pour les automorphismes. □

De façon plus sophistiquée, il est possible de créer des groupes d'automorphismes infiniment engendrés.

Théorème 3.19. *Pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un sous-shift Toeplitz de complexité* $\mathrm{O}(n^{1+\epsilon})$ *dont le groupe d'automorphisme est sans torsion mais infiniment engendré.*

Typiquement un tel groupe d'automorphisme est isomorphe à $\mathbb{Z}[1/2]$ en tant que groupe abélien additif. En particulier, pour $0 < \epsilon < 1$, ils sont toujours de rang un (cf [30] ou théorème 4.2). Un premier exemple d'un tel sous-shift a été réalisé par V. Salo dans [79] pour $\epsilon = 0,757$, puis généralisé à tout ϵ dans [30]. Ces exemples montrent, pour $\epsilon > 0$ que le résultat du corollaire 3.3 n'est plus vrai dès que l'on autorise une complexité en $\mathrm{O}(n^{1+\epsilon})$. Ils fonctionnent également pour ϵ grand (≥ 1) de sorte qu'ils fournissent des sous-shifts Toeplitz de complexité polynomiale avec un groupe d'automorphisme infiniment engendré.

L'étude historique des automorphismes de sous-shifts de type fini avait tendance à faire croire que l'entropie strictement positive était suffisante pour garantir l'existence de gros groupes d'automorphisme. En fait il n'en est rien pour les sous-shifts minimaux. De même, la propriété de coalescence ou la trivialité du groupe des automorphismes n'impose pas de restriction sur la fonction de complexité.

Théorème 3.20. *Il existe des sous-shifts Toeplitz* (X, σ) *d'entropie arbitrairement grande*

(1) dont le groupe d'automorphisme est de la forme $\mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ *pour* d *et* N *arbitraire.*

(2) dont le groupe d'automorphisme est trivial ($\mathrm{Aut}(X, \sigma) = \langle \sigma \rangle$*) et sont coalescents.*

Un premier exemple, non explicite, vérifiant l'item (2) se trouve dans [11]. Plus tard dans [33], les auteurs donnent un autre exemple vérifiant l'item (2), explicite avec en plus, une entropie arbitraire mais avec un facteur équicontinu maximal spécifique. Dans [30] un troisième exemple explicite de l'item (2) est proposé où l'odomètre facteur équicontinu du système peut être choisi de façon arbitraire. Grâce à cette construction et à la proposition 3.18 ces mêmes auteurs réalisent, à partir de sous-shifts Toeplitz disjoints, des exemples vérifiant l'item (1). Ces exemples peuvent être étendus aux sous-shifts Toeplitz multidimensionels [66] et même à des sous-shifts sur des groupes résiduellement finis [14].

Au-delà des sous-shifts Toeplitz, ajoutons que M. Boyle, D. Lind et D. Rudolph construisent un exemple de sous-shift minimal (non Toeplitz) dont le groupe d'automorphisme contient un sous-groupe isomorphe aux rationnels $\mathbb{Q}$ et où 1 est identifié au shift σ [9, Example 3.9]. Ainsi dans tous les exemples précédents, les groupes engendrés par un nombre fini d'automorphismes de sous-shifts minimaux sont toujours virtuellement abéliens. Cette remarque motive la question suivante.

Question 3.21. *Existe-t-il un sous-shift minimal* (X, σ) *où* $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ *n'est pas localement virtuellement abélien ?*

Sans l'hypothèse "virtuelle", l'exemple de [52, 60] répond par l'affirmative à cette question. À l'opposé, un résultat assurant que tout groupe d'automorphisme de sous-shift minimaux est localement virtuellement abélien serait un résultat fort de rigidité. Il impliquerait, en particulier, que pour ces sous-shifts, tout commutateur d'automorphisme est d'ordre fini, ce qui serait une propriété combinatoire surprenante pour les fonctions de bloc.

Loin d'avoir un tel résultat, des personnes se sont intéressées à la géométrie de ces groupes afin d'obtenir des restrictions en fonction des propriétés combinatoires des sous-shifts minimaux. Précisons, qu'une réponse négative à la question 3.21 diminuerait l'importance de la plupart des résultats de la section 4.

4. Propriétés géométriques des groupes d'automorphisme de sous-shift

Les sous-shifts de type fini possèdent une riche famille d'automorphisme du fait des faibles contraintes sur les éléments de ces sous-shifts. À titre d'exemple, rappelons qu'un sous-shift de type fini mélangeant contient : la somme directe de n'importe quelle collection dénombrable de groupe fini, le groupe libre [47, 9], n'importe quel groupe résiduellement et localement fini [55]. En particulier, ces groupes ne sont ni finiment engendrés ni moyennables. Illustrant la richesse de leur structure, K. Kim et F. Roush montrent que les groupes d'automorphisme de ces sous-shifts contiennent celui de n'importe quel full-shift avec un nombre arbitraire de lettres [55]. Ainsi pour tout réel $h > 0$, il existe une sous-shift (mélangeant de type fini) d'entropie inférieure à h possédant un groupe d'automorphisme isomorphe à $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Il est alors naturel de se demander, si, à l'opposé, les groupes d'automorphisme de sous-shifts d'entropie nulle subissent de fortes contraintes. Dans ce sens, nous avons vu dans les sections précédentes que les groupes d'automorphismes de sous-shifts de complexité non super-linéaire sont nécessairement très petits. Nous verrons dans cette section comment la complexité combinatoire du sous-shift contraint les propriétés géométriques du groupe des automorphismes.

La première partie de cette section sera consacrée aux résultats de V. Cyr et B. Kra [25, 26] qui montrent comment la croissance polynomiale, et en particulier la croissance sous-quadratique, de la complexité majore la croissance du groupe des automorphismes d'un sous-shift minimal. Au-delà de la croissance polynomiale, mais toujours en croissance sous-exponentielle, V. Cyr et B. Kra donnent également des conditions assurant que la moyennabilité du groupe des automorphismes [26]. Enfin dans une dernière partie, nous verrons l'influence de la complexité sur une autre propriété géométrique des groupes : la distorsion. Grâce à cela, il est possible d'obtenir des raffinements des résultats de [26] et de montrer l'impossibilité de réalisation de certains groupes comme automorphismes de sous-shift d'entropie nulle.

Dans tous ces types de résultats, l'argument clef consiste à majorer le rayon des automorphismes. Rappelons que par le théorème de Curtis-Lyndon-Hedlund (théorème 2.10), que tout automorphisme ϕ d'un sous-shift X est donné par une fonction de bloc $\hat{\phi}\colon \mathcal{L}_{2\mathbf{r}_{\hat{\phi}}+1}(X) \to \mathcal{L}_1(X)$ de rayon $\mathbf{r}_{\hat{\phi}} \in \mathbb{N}$. Comme la fonction de bloc n'est pas définie de façon unique à partir de ϕ, nous appellerons *rayon* de l'automorphisme ϕ le nombre $\mathbf{r}(\phi) = \inf \mathbf{r}_{\hat{\phi}}$ où l'infimum est pris parmi toutes les fonctions de bloc définissant ϕ. Une propriété importante de ce rayon est la *sous-additivité* : si ϕ et ψ sont deux automorphismes d'un même sous-shift, alors

$$\mathbf{r}(\phi \circ \psi) \leq \mathbf{r}(\phi) + \mathbf{r}(\psi). \tag{1}$$

Pour $R > 0$, on notera par $\mathrm{Aut}_R(X, \sigma) := \{\phi \in \mathrm{Aut}(X, \sigma) : \mathbf{r}(\phi) \text{ et } \mathbf{r}(\phi^{-1}) \leq R\}$.

4.1. Groupes d'automorphisme et complexité sous-quadratique.

Rappelons qu'un sous-shift X est de complexité sous-quadratique si sa complexité vérifie $\liminf_{\ell\to\infty} p_X(\ell)/\ell^2 = 0$. Il existe des sous-shifts minimaux de complexité super-linéaire mais sous-quadratique [41]. Pour ces sous-shifts il existe une version du corollaire 3.3 obtenue par V. Cyr et B. Kra [27], sous la condition, plus faible, d'être transitif. De plus, la même condition sur la complexité assure que tout endomorphisme du système est inversible.

Théorème 4.1. *Soit (X, σ) un sous-shift transitif de complexité sous-quadratique. Alors*

— *tout endomorphisme est inversible :* $\mathrm{End}(X, \sigma) = \mathrm{Aut}(X, \sigma)$.

— *Le groupe* $\mathrm{Aut}(X,\sigma)/\langle\sigma\rangle$ *est périodique.*

Les systèmes vérifiant le premier point sont dits *coalescents*. Ils possèdent une rigidité. Ainsi si pour un système (Y,σ) et (X,σ) sont des facteurs mutuels l'un de l'autre, ils sont alors conjugués car la composition des applications facteurs donne un endomorphisme de (X,σ) qui est dans ce cas inversible. À l'opposé, il existe un sous-shift (Toeplitz) qui n'est pas coalescent [31]. Cet exemple a donc une complexité non sous-quadratique.

Rappelons qu'un groupe est dit *périodique* si tout élément est d'ordre fini. Ainsi pour un automorphisme ϕ d'un sous-shift de complexité sous-quadratique, il existe des entiers $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ tels que $\phi^k = \sigma^p$. Ce théorème s'applique tout particulièrement aux sous-shifts Toeplitz donnés par le théorème 3.19. On peut en déduire que leurs groupes d'automorphismes sont toujours de rang un. L'hypothèse de transitivité est inévitable pour le théorème 4.1. En effet considèrons deux sous-shifts disjoints apériodiques X et Y de complexité sous-quadratique. Nous pouvons construire un automorphisme dont la restriction sur X est le shift et est l'identité sur Y. Ainsi aucune puissance de cet automorphisme de $X \cup Y$ n'est une puissance du shift.

La preuve du théorème 4.1 utilise une généralisation du théorème de Morse-Hedlund au cas multidimensionel (théorème 2.12) appliquée au diagramme espace-temps d'un automorphisme Le *diagramme espace temps* d'un automorphisme ϕ du sous-shift X est le $\mathbb{Z}^2$-sous-shift

$$X_\phi := \{(\phi^j(x)_i)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}, x \in X\},$$

où y_i désigne la lettre à la position i dans la suite $y \in X$.

Esquisse de preuve. Commençons par démontrer le second point. Il n'est pas difficile de vérifier à partir du théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon (théorème 2.10) et de la notion de fonction de bloc que la complexité du diagramme espace-temps X_ϕ d'un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(X,\sigma)$ vérifie, pour tout entier $n, m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,

$$p_{X_\phi}(n,m) \leq p_X(2\mathbf{r}m - 2\mathbf{r} + n),$$

où le maximum des rayons de ϕ et ϕ^{-1} est $\mathbf{r} = \max(\mathbf{r}(\phi), \mathbf{r}(\phi^{-1}))$. Comme $\liminf_n p_X(n)/n^2 = 0$, on en déduit que $\liminf_n p_{X_\phi}(n,n)/n^2 = 0$. Par le théorème 2.12, chaque élément de X_ϕ est périodique. En particulier c'est le cas de la suite $(\phi^i(x)_j)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ où x est un point d'orbite dense dans X. Il existe donc des entiers p et k tels que $\phi^p(x) = \sigma^k(x)$. On conclut par densité de l'orbite de x dans X.

La preuve du premier point est similaire. Cependant pour un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(X,\sigma)$, le diagramme espace temps ne définit plus un $\mathbb{Z}^2$-sous-shift mais un $\mathbb{N}^2$-sous-shift. Malgré cette différence, la même stratégie fonctionne. Une version finitaire du théorème 2.12 (voir par exemple [74, Lemma 5]) permet de conclure qu'il existe des entiers p et k tels que $\phi^p(x) =$

$\sigma^k(x)$. Par densité $\phi^p = \sigma^k$ sur tout le sous-shift X et en particulier ϕ est inversible. □

4.2. Groupes d'automorphisme et complexité polynomiale.

Théorème 4.2 ([25]). *Si (X, σ) est un sous-shift minimal de sorte qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{p_X(n)}{n^d} = 0,$$

alors $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ *est moyennable. De plus n'importe quel groupe de* $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$*, finiment engendré et sans torsion, a un taux de croissance polynomiale inférieur à $d - 1$.*

Ce résultat contraint le groupe d'automorphisme de sous-shift de complexité polynomiale. À titre illustratif, un sous-shift minimal de complexité en $\mathrm{o}(n^d)$ ne peut contenir le groupe libre (à croissance exponentielle) ni le groupe $\mathbb{Z}^d$ dans son groupe d'automorphisme car le taux de croissance polynomiale de ce groupe est d.

Ce théorème peut être vu comme une généralisation du théorème 4.1 dans le cas minimal. En effet, un sous-shift de complexité sous-quadratique correspond au cas $d = 2$. Pour tout automorphisme ϕ d'un tel sous-shift, le groupe engendré par ϕ et par le shift σ a une croissance polynomiale égale à 1 (théorème 4.2). Il s'agit donc d'un groupe virtuellement isomorphe à $\mathbb{Z}$ [62] et l'on retrouve le théorème 4.1 sous l'hypothèse supplémentaire de minimalité.

À l'opposé, cette borne sur la croissance du groupe est optimale. En effet, le système produit de d sous-shifts Toeplitz disjoints de complexité linéaire, donne un sous-shift Toeplitz de complexité $\mathrm{O}(n^d)$ (cf section 3.4.2). Par la proposition 3.18, son groupe d'automorphisme contient le groupe $\mathbb{Z}^d$.

Le théorème 4.2 a quelques conséquences algébriques. Par une application directe du célèbre théorème de Gromov et de L. van den Dries et A. Wilkie [83] qui stipule qu'un groupe à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent (cf Annexe A). Le degré de nilpotence est majoré explicitement par le taux de croissance polynomiale du groupe par la formule de Bass-Guivarc'h [6, 46]. Ainsi, le long de leur preuve V. Cyr et B. Kra obtiennent

Proposition 4.3. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 4.2, n'importe quel groupe de* $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$*, finiment engendré et sans torsion, est virtuellement nilpotent de degré de nilpotence inférieur à $\lfloor(-1 + \sqrt{8d - 7})/2\rfloor$.*

Ainsi, pour un sous-shift minimal de complexité $\mathrm{o}(n^3)$, n'importe quel groupe d'automorphismes sans torsion finiment engendré a un degré de nilpotence inférieur 1. Il est donc abélien. À la différence de la croissance, nous verrons dans la section 4.4 que la majoration sur le degré de nilpotence n'est pas optimale.

Pour démontrer le théorème 4.2, V. Cyr et B. Kra utilisent une notion combinatoire typique des sous-shifts d'entropie nulle : le mots étendables.

À l'opposé des mots spéciaux, les mots étendables s'étendent à gauche et à droite d'une longueur proportionnelle à la longueur du mot de façon unique dans le langage du sous-shift. Plus précisément, ils démontrent le résultat suivant.

Lemme 4.4. *Soit un entier $d \geq 1$. Il existe une constante $C(d) > 1$ telle que pour tout sous-shift (X, σ) de complexité $\mathrm{O}(n^d)$, il existe une infinité de mot $w \in \mathcal{L}(X)$ tel que*

$$|\{(a, b) \in \mathcal{L}(X)^2 : awb \in \mathcal{L}(X), |a| = |b| = \lfloor \frac{|w|}{C} \rfloor\}| = 1.$$

Les mots w vérifiant la propriété du lemme sont dits *étendables*.

Démonstration. Supposons $C > 1$ grand (déterminé un peu plus loin). Par contradiction supposons également que pour tout mot $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur supérieure à ℓ_0, il existe des mots a_1, b_1, a_2, b_2 avec $|a_i| = |b_i| = \lfloor \frac{|w|}{C} \rfloor$ tels que $a_1 w b_1 \neq a_2 w b_2 \in \mathcal{L}(X)$.

On a donc pour tout $n \geq \ell_0$

$$p_x\left(\frac{C+2}{C}n\right) = p_X(n + 2n/C) \geq 2p_X(n). \tag{2}$$

En outre, pour tout entier n il existe un entier m tel que $\left(\frac{C+2}{C}\right)^m \leq n < \left(\frac{C+2}{C}\right)^{m+1}$. Soit m_0 l'entier associé à ℓ_0. Pour tout entier n suffisamment grand ($\geq \left(\frac{C+2}{C}\right)^{m_0+1}$), on a donc par itération de l'inégalité (2)

$$p_X(n) \geq p_X(\left(\frac{C+2}{C}\right)^m) \geq 2^{m-\ell_0} p_X(\ell_0) \geq n^{\frac{\log 2}{\log((C+2)/C)}} 2^{\ell_0 - 1} p_X(\ell_0).$$

On obtient ainsi une contradiction avec l'hypothèse sur la complexité dès que C vérifie $\frac{\log 2}{\log((C+2)/C)} \geq d + 1$. □

Voici un second résultat utile pour la preuve. Rappelons que $\langle S \rangle$ désigne le groupe engendré par les éléments de S et que la notion de cylindre est définie en section 2.3.

Lemme 4.5. *Soient (X, σ) un sous-shift minimal et $w \in \mathcal{L}(X)$. Alors le groupe $\langle\{\phi \in \mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/2 \rfloor}(X, \sigma) : \phi([w]) \subset [w]\}\rangle$ est fini.*

Démonstration. Un *mot de retour* sur w, est un mot $v \in \mathcal{L}(X)$ tel que $wv \in \mathcal{L}(X)$ et le mot w apparaît comme préfixe et comme suffixe de wv. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/2 \rfloor}(X, \sigma)$ vérifiant $\phi([w]) \subset [w]$. Par définition nous avons, pour tout mot de retour v, $\phi([wv]) \subset [wu]$ pour un certain mot de retour u sur w avec $|wu| = |wv|$. Comme X est la fermeture de l'orbite d'une suite uniformément récurrente, il existe une longueur M_w majorant la longueur de tout *mot de premier retour* sur w, *i.e.* un mot de retour v sur w, où w apparaît exactement 2 fois dans wv. La transformation ϕ induit donc une transformation $\bar{\phi}$ sur l'ensemble $\mathcal{R} := \{[wv] : v \text{ est un mot de retour sur } w, |wv| \leq M_w\}$ telle que $\phi([wv]) \subset \bar{\phi}([wv])$.

L'application $\bar{\phi}$ est surjective. En effet si v est un mot de retour tel que $[wv] \notin \bar{\phi}(\mathcal{R})$, comme une suite $x \in X$ est une concaténation de mots de premier retours sur w, le mot v n'apparaît pas dans $\phi(x)$. Cela contredit la minimalité. L'application $\bar{\phi}$ est même bijective puisque l'ensemble $\mathcal{R}$ est fini. Notons par S_w le semi-groupe engendré par $\{\phi \in \mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/2 \rfloor}(X, \sigma) : \phi([w]) \subset [w]\}$. Il est alors simple de vérifier que la transformation $\phi \mapsto \bar{\phi}$ induit un morphisme de semi-groupe du semi-groupe S_w vers l'ensemble des bijections de $\mathcal{R}$. Cette transformation est en fait injective. Si ψ_1, ψ_2 sont 2 automorphismes dans S_w qui induisent la même transformation sur $\mathcal{R}$, puisque tout $x \in X$ est une concaténation de mots de premiers retour sur w, nous obtenons $\psi_1(x) = \psi_2(x)$. Par le lemme 2.1, nous avons $\psi_1 = \psi_2$. Ainsi le semi-groupe S_w s'injecte dans un groupe fini, c'est donc un groupe fini. $\square$

Esquisse de preuve du théorème 4.2. Soit G un groupe finiment engendré par des automorphismes de rayon R et sans torsion de $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$. L'idée pour restreindre la croissance du groupe G consiste à utiliser la sous-additivité du rayon d'un automorphisme. Ainsi par l'inégalité (1) si $\phi_1, \ldots, \phi_\ell \in \mathrm{Aut}_R(X)$, $\phi_{i_1}^{\epsilon_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n}^{\epsilon_n} \in \mathrm{Aut}_{nR}(X, \sigma)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_j \leq n$, $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$. Pour majorer le cardinal des éléments obtenus par au plus n compositions de générateurs de G, il suffit donc de majorer celui de $G \cap \mathrm{Aut}_{nR}(X, \sigma)$.

Soit w un mot étendable de $\mathcal{L}(X)$ de longueur supérieure strictement à $C4R$ donné par le lemme 4.4. Ainsi pour tout automorphisme ϕ de $\mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor}(X, \sigma)$, il existe un mot u de longueur $|w| + 2\lfloor |w|/(4C) \rfloor$ tel que $\phi([w]) \subset [u]$. Nous avons également $\phi^{-1}([u]) \subset [w]$ puisque $\mathbf{r}(\phi^{-1}) \leq \lfloor |w|/(4C) \rfloor$, et donc $\phi([w]) = [u]$. De même, si $\phi_1([w]) = \phi_2([w])$ pour $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor}(X, \sigma)$, nous obtenons $\phi_2^{-1} \circ \phi_1([w]) \subset [w]$. Ainsi $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ appartient au groupe $Stab_w := \langle \{\phi \in \mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/2 \rfloor}(X, \sigma) : \phi([w]) \subset [w]\} \rangle$. L'application $\phi \mapsto \phi([w])$ montre donc que le quotient $\mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor}(X, \sigma)/Stab_w$ est fini de cardinal inférieur à $p_X(|w| + \lfloor |w|/C \rfloor)$.

Or le lemme 4.5 affirme que le groupe $Stab_w$ est fini. Le groupe G étant sans torsion, l'intersection $G \cap Stab(w)$ est triviale et donc le cardinal $|G \cap \mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor}(X, \sigma)|$ est inférieur à $p_X(|w| + \lfloor |w|/C \rfloor)$. Comme il y a une infinité de mot étendable w, et que $p_X(|w| + \lfloor |w|/C \rfloor) = \mathrm{o}(|w|^d)$, nous en déduisons que G ne peut être à taux de croissance polynomiale supérieure à d. De plus, comme $\liminf_n \log(|G \cap \mathrm{Aut}_{nR}(X, \sigma)|)/\log(nR) \leq d$, G est un groupe à faible croissance polynomiale et donc est un groupe à taux de croissance polynomiale au plus $d - 1$. [83].

Pour montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ est moyennable, on déduit du raisonnement précédent que chaque ensemble $\mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor}(X, \sigma)$ est une union de $p_X(|w| + \lfloor |w|/C \rfloor)$ classe à gauche suivant le groupe $Stab_w$. Un estimé similaire pour $\mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor + \mathbf{r}}(X, \sigma)$ qui contient $\phi . \mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor}(X, \sigma)$ où ϕ est un automorphisme de rayon $\mathbf{r}$ très petit par rapport à $|w|$, assure que la famille d'ensembles finis $\{\mathrm{Aut}_{\lfloor |w|/(4C) \rfloor}(X, \sigma)\}$ pour tous les mots étendables w, forme une suite de Følner de $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ [25]. $\square$

4.3. **Groupes d'automorphisme et complexité sous-exponentielle.** Peu d'exemple de sous-shift de complexité super-polynomiale et d'entropie nulle sont connus. De ce fait, leurs propriétés restent encore mystérieuses et tout particulièrement celles concernant leur groupe d'automorphisme.

V. Cyr et B. Kra obtiennent cependant un résultat notable dans ce contexte et similaire au théorème 4.2 mais pour des sous-shifts de complexité super-polynomiale et toujours sous-exponentielle.

Théorème 4.6 ([25]). *Si (X,σ) est un sous-shift minimal de sorte qu'il existe $\beta < 1/2$ tel que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log p_X(n)}{n^\beta} = 0,$$

alors $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$ est moyennable. De plus n'importe quel groupe de $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$, finiment engendré et sans torsion, a une croissance en $\mathrm{O}(\exp(n^{\beta/(1-\beta)}))$.

En particulier un tel sous-shift ne possède pas d'automorphismes engendrant le groupe libre. Ceci est très différent des sous-shifts de type fini. L'énoncé du théorème n'a pas de sens pour $\beta \in [1/2;1)$ car dans ce cas l'exposant $\beta/(1-\beta)$ est supérieur à 1 et n'importe quel groupe a une croissance au plus exponentielle.

On ne sait toujours pas si les hypothèses du théorème 4.6 sont optimales. En fait la majoration sur la complexité dans ce théorème semble être essentiellement une limitation liée à la technique de la preuve. Ainsi on ne connait pas d'exemple de sous-shift minimal d'entropie nulle avec un groupe d'automorphisme à croissance super-polynomiale.

Par exemple, il existe des sous-shifts Toeplitz d'entropie nulle et de complexité super-polynomiale. Mais leur groupe d'automorphisme étant abélien, ils ne peuvent qu'engendrer des groupes à croissances polynomiales (corollaire 3.15). Il est possible que le groupe d'automorphisme d'un sous-shift minimal d'entropie nulle soit toujours moyennable.

Question 4.7. *Existe-t-il un sous-shift minimal d'entropie nulle dont le groupe d'automorphisme n'est pas moyennable ?*

Un exemple d'un tel sous-shift avec des automorphismes engendrant le groupe libre suffirai. Sans l'hypothèse de minimalité, v. Cyr et B. Kra ont montré dans [24] que le groupe d'automorphisme était moyennable dès que la complexité du sous-shift est en $\mathrm{o}(n^2/\log n)$.

Le principe de la preuve du théorème 4.6 est similaire à celle du théorème 4.2 concernant les sous-shifts de complexité polynomiale. Une première étape consiste à montrer l'existence de mots étendables pour les sous-shifts d'entropie nulle.

Lemme 4.8. *Soient $0 < C < \log 2/2$ et (X,σ) un sous-shift minimal d'entropie nulle. Alors il existe une infinité de mot $w \in \mathcal{L}(X)$ tel que*

$$|\{(a,b) \in \mathcal{L}(X)^2 : awb \in \mathcal{L}(X), |a| = |b| = \lfloor C|w|/\log p_X(|w|)\rfloor\}| = 1.$$

Ce lemme est similaire au lemme 4.4, mais est moins restrictif sur la longueur possible d'un mot étendable. Pour un sous-shift dont la complexité vérifie $\limsup_{n\to\infty} \frac{\log p_X(n)}{n^\beta} = 0$ pour $0 < \beta < 1$, nous déduisons de ce lemme qu'il existe une infinité de mot étendable w sur une longueur supérieure à $K|w|^{1-\beta}$, $K > 1$ [25]. Ce lemme pourrait faire croire que l'existence de mot étendable est propre aux systèmes d'entropie nulle. En fait il n'en est rien. Il existe des sous-shifts minimaux d'entropie strictement positive avec des mots étendables (par exemple dans la preuve de [30, Theorem 5.1]). Nous proposons ici une preuve du lemme 4.8 dûe à F. Durand que je remercie d'avoir accepté de la partager.

Démonstration. Supposons $0 < C < \log 2/2$. Par contradiction supposons également que pour tout mot $w \in \mathcal{L}(X)$ de longueur supérieure à ℓ_0, il existe des mots a_1, b_1, a_2, b_2 avec $|a_i| = |b_i| = \lfloor C|w|/\log p_X(|w|)\rfloor$ tels que $a_1wb_1 \neq a_2wb_2 \in \mathcal{L}(X)$.

On a donc pour tout $n \geq \ell_0$,

$$p_X(n + 2\lfloor Cn/\log(p_X(n))\rfloor) \geq 2p_X(n). \tag{3}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $K(n) := 2\lfloor Cn/\log(p_X(n))\rfloor$. Fixons un entier $n \geq \ell_0$ et soit $(n_i)_{i\leq 0}$ la suite croissante d'entiers telle que $n_0 = n$ et pour tout $i < 0$,

$$n_i := n_{i+1} - 1 - K(n) < n_{i+1}.$$

Nous noterons $n_k = \sup\{n_i : n_i < \ell_0, i \leq 0\}$.

Par l'inégalité (3), nous obtenons

$$p_X(n_i) \geq p_X(n_{i-1} + K(n)) \geq 2^{|k-i|+1}p_X(\ell_0). \tag{4}$$

Comme $n_0 - n_k = \sum_{i=k+1}^{0} n_i - n_{i-1} \leq \sum_{i=k+1}^{0} 1 + K(n) \leq |k| + |k|K(n)$, nous obtenons $|k| \geq (n_0 - n_k)/(1 + K(n))$. Nous en déduisons par l'inégalité (4) que

$$\log_2 p_X(n) \geq \frac{n - \ell_0}{1 + K(n)} + \log_2 p_X(\ell_0) \geq \log(p_X(n)) \frac{1 - \ell_0/n}{\log p_X(n)/n + 2C} + \log_2 p_X(\ell_0).$$

En divisant l'inégalité précédente par $\log_2 p_X(n)$ et en prenant la limite en n, nous obtenons $1/\log 2 \geq 1/(2C)$, contredisant le choix de C. □

Esquisse de démonstration du théorème 4.6. La preuve suit la même stratégie que celle du théorème 4.2, *i.e.* elle consite à montrer que la suite des ensembles $\{\mathrm{Aut}_{\lfloor C|w|^{1-\beta}\rfloor}(X, \sigma)\}$ pour tous les mots étendables w donnés par le lemme 4.8, forme une famille de Følner d'ensembles. De la même façon que dans le théorème 4.2, le cardinal de $\mathrm{Aut}_{\lfloor C|w|^{1-\beta}/4\rfloor}(X, \sigma)$ est majoré par $p_X(|w| + \lfloor C|w|^{1-\beta}\rfloor)$. Ainsi, si G est un groupe sans torsion engendré par un nombre fini d'automorphismes de rayon au plus R, sa croissance est majorée par celle de $\log(|G \cap \mathrm{Aut}_{nR}(X, \sigma)|)$ et donc par celle de $\log(p_x(\lfloor n^{1/(1-\beta)} + Cn\rfloor + 1)) = \mathrm{o}(n^{\beta/(1-\beta)})$.

Il est aussi possible de démontrer que l'ensemble $\mathrm{Aut}_{\lfloor C|w|^{1-\beta}\rfloor}(X, \sigma)$ est une union de $p_X(|w| + \lfloor C|w|^{1-\beta}\rfloor)$ classe à gauche suivant le groupe $Stab_w$.

Ici aussi la croissance sous-exponentielle de ce nombre montre que la famille d'ensembles $\{\mathrm{Aut}_{\lfloor C|w|^{1-\beta}\rfloor}(X,\sigma)\}$ forme une famille de Følner de $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$ [25]. $\square$

4.4. **Distorsion dans le groupe d'automorphisme.** Mis à part la croissance de groupe d'automorphismes, peu de choses sont connues quant aux propriétés algébriques des groupes d'automorphismes de sous-shift d'entropie nulle. Nous allons donner dans cette section des résultats issus de [23] où sont donnés les premiers exemples de groupes qui ne peuvent pas se réaliser comme de tels groupes d'automorphisme. Nous raffinerons également les bornes sur le degré de nilpotence des groupes en fonction du taux de croissance polynomiale de la complexité (cf proposition 4.3). La notion algébrique essentielle pour ces résultats est celle de distorsion.

Une notion fondamentale en théorie géométrique des groupes est celle de la *distance métrique des mots*. Un ensemble fini $\mathcal{S}$ de générateurs engendrent un groupe $\langle \mathcal{S}\rangle$ sur lequel il est possible il est possible de définir la longueur $\ell_{\mathcal{S}}(g)$ de la plus petite présentation (en terme de longueur de mot) d'un élément $g \in \langle \mathcal{S}\rangle$ par des éléments de $\mathcal{S}$. Plus précisément, cette longueur est définie par

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) := \inf\{n \geq 1 : g = s_1 \dots s_n, s_i \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} \cup \{1_G\}\}.$$

Un élément g d'un groupe G est dit *distordu* s'il existe un ensemble fini $\mathcal{S} \subset G$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ell_{\mathcal{S}}(g^n)}{n} = 0.$$

Par défaut un tel élément sera supposé d'ordre infini. Il est simple de remarquer que la longueur $\ell_{\mathcal{S}}(\cdot)$ est sous-additive ($\ell_{\mathcal{S}}(g\cdot h) \leq \ell_{\mathcal{S}}(g) + \ell_{\mathcal{S}}(h)$) de sorte que la limite existe par le lemme de Fekete. Il se trouve qu'un élément est distordu indépendamment du choix des générateurs du groupe G.

On remarquera que cette notion a du sens même pour un groupe G infiniment engendré (on a toujours $\ell_{\{g\}}(g^n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \in G$). De plus n'importe quelle racine ou puissance d'un élément distordu est distordu. Pour préciser les cas nous dirons qu'un élément g est *polynomialement* (resp. *logarithmiquement*) distordu si pour un ensemble fini $\mathcal{S}$, nous avons $\ell_{\mathcal{S}}(g^n) = \mathrm{O}(n^{1/d})$ pour un certain entier $d \geq 1$ (resp. $= \mathrm{O}(\log n)$).

Comme exemple de groupes possédant des éléments distordus citons :

Exemple : le groupe d'*Heisenberg discret* $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathcal{H} = \langle s,t,u | su = us, ts = st, [u,t] = utu^{-1}t^{-1} = s\rangle. \tag{5}$$

Ce groupe est également celui engendré par les matrices

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ and } s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est possible de vérifier que pour $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$s^{n^2} = [u^n, t^n] = u^n t^n u^{-n} t^{-n}$$

et ainsi s est un élément (polynomialement) distordu d'ordre infini.

Exemple : le groupe de *Baumslag-Solitar* $\mathrm{BS}(1,n)$ est défini pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathrm{BS}(1,n) = \langle a, b | bab^{-1} = a^n \rangle.$$

L'élément a est exponentiellement distordu pour l'ensemble de générateur $\mathcal{S} = \{a, b, b^{-1}\}$. Pour voir cela, donnons pour un entier $m \geq 2$, son écriture en base n : $m = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_k n^k$ où chaque $\alpha_i \in \{0, \ldots, n-1\}$. En utilisant la méthode d'Hörner, nous obtenons $m = n \cdot (n \cdot (n \cdots (\alpha_{k-1} + n\alpha_k) + \alpha_{k-2}) + \cdots + \alpha_1) + \alpha_0$,ce qui implique $a^m = b^k a^{\alpha_k} b^{-1} a^{\alpha_{k-1}} b^{-1} \cdots b^{-1} a^{\alpha_0}$ et $\ell_S(a^m) \leq k + n(k+1) + k = \mathrm{O}(\log m)$.
D'autres groupes présentent des exemples d'éléments exponentiellement distordus : $\mathrm{SL}(k, \mathbb{Z})$ pour tout $k \geq 3$, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$ avec p premier (voir [61]).

De façon similaire, pour un automorphisme ϕ la limite suivante est appelée *rayon asymptotique*,

$$\mathbf{r}_\infty(\phi) := \lim_{n \to \infty} \frac{\mathbf{r}(\phi^n)}{n} = \inf_n \frac{\mathbf{r}(\phi^n)}{n}.$$

Cette limite existe par sous-additivité de la fonction rayon. Elle peut être interprétée comme l'accroissement moyen du rayon le long des puissances de ϕ. La notion de rayon asymptotique est similaire à celle d'exposant de Lyapounov d'automate cellulaire dû à M. A. Shereshevsky [82] mais contrairement à celle-ci, elle s'applique à tous les sous-shifts.

Mentionnons quelques propriétés élémentaires de ce rayon asymptotique dont les preuves sont laissées au lecteur.

Proposition 4.9. *Pour un sous-shift X et $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(X, \sigma)$, nous avons*
— $\mathbf{r}_\infty(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}) = \mathbf{r}_\infty(\phi)$ *;*
— $\mathbf{r}_\infty(\phi^p) = p\mathbf{r}_\infty(\phi)$ *pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.*

À titre d'exemple, pour l'application décalage σ sur un sous-shift infini X, nous avons trivialement pour $n \geq 1$, $\mathbf{r}(\sigma^n) \leq n$. Puisqu'il existe toujours des mots spéciaux droits de toute longueur (théorème 2.7) et en particulier de longueur $2n - 1$, nous en déduisons que $\mathbf{r}(\sigma^n) = n$ et donc $\mathbf{r}_\infty(\sigma) = 1$.

Définition 4.10. *Un élément de* $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ *est dit* distordu en rayon *si son rayon asymptotique est nul.*

Il suit immédiatement de la définition que n'importe quelle puissance ou racine d'un automorphisme distordu en rayon est également distordu en rayon. De la même façon que pour la notion algébrique, nous préciserons parfois qu'un automorphisme est *polynomialement* (resp. *exponentiellement*) distordu en rayon lorsque $\mathbf{r}(\phi^n) = \mathrm{O}(n^{1/d})$ pour un certain entier $d \geq 1$ (resp. $= \mathrm{O}(\log n)$).

Il se trouve que les automorphismes distordus dans $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ sont distordus en rayon.

Proposition 4.11. *Si un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(X, \sigma)$ d'un sous-shift (X, σ) est distordu, alors il est distordu en rayon.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{Aut}(X, \sigma)$ un sous-ensemble fini tel que $\lim_n \ell_{\mathcal{S}}(\phi^n) = 0$. Par sous-additivité du rayon on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{r}(\phi^n) \leq \ell_{\mathcal{S}}(\phi^n) \max_{g \in \mathcal{S}} \mathbf{r}(g).$$

On conclut facilement en passant à la limite dans l'inégalité. □

Cependant, on ne sait pas si la réciproque est vraie, *i.e.* si un automorphisme distordu en rayon est nécessairement distordu dans $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$. Ajoutons que dans [22], il est démontré que le système dynamique donné par un automorphisme distordu en rayon est nécessairement d'entropie nulle.

Remarque 4.12. Nous déduisons de la proposition 4.11 que l'application shift σ n'étant pas distordue en rayon, ne peut être distordue dans $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$, pour n'importe quel sous-shift infini X.

L'existence d'automorphisme distordu en rayon n'est pas évidente. M. Hochman donne dans [50] une exemple d'automorphisme, d'ordre infini et polynomialement distordu en rayon pour un degré d arbitraire. De plus il est possible de modifier son exemple pour obtenir un tel exemple exponentiellement distordu.

Récemment P. Guillon et V. Salo ont construit d'autres exemples d'automorphismes avec des types de croissance de rayon variés [45, theorem 5]. Ils construisent des exemples d'automorphismes distordus en rayon en utilisant la riche notion de machine de Turing et son codage par des automates cellulaires. Grâce à leurs techniques, ils montrent également que tout sous-shift sofique indénombrable contient un automorphisme distordu en rayon [45, theorem 4]. Toujours en utilisant les machines de Turing, P. Guillon et V. Salo obtiennent le résultat d'indécidabilité suivant qui illustre toute la difficulté d'obtenir des automorphismes distordus en rayon.

Théorème 4.13 ([45])**.** *Soit X un sous-shift sofique indénombrable. Il est indécidable de savoir, étant donné un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(X, \sigma)$, si ϕ est distordu en rayon.*

Plus globalement, on ne connait pas d'exemple d'automorphisme distordu dans le groupe d'automorphisme d'un sous-shift.

Question 4.14. *Existe-il un sous-shift X et un automorphisme ϕ non périodique, distordu dans $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$?*

Le cas des exemples de [50] et [45] sont encore inconnus car leur groupe d'automorphisme ne sont pas déterminés. Les auteurs de [45] conjecturent une réponse positive à la question 4.14. À l'opposé, comme nous le verrons dans la section suivante, l'existence d'automorphisme distordu impose des contraintes sur la complexité du sous-shift, sans pour autant exclure définitivement leur existence.

4.4.1. *Distorsions exponentielles.* Nous montrons ici comment la complexité et notamment l'entropie nulle contraint la distorsion exponentielle.

Théorème 4.15 ([23])**.** *Soit (X, σ) un sous-shift d'entropie nulle. Si $\phi \in \mathrm{Aut}(X, \sigma)$ est exponentiellement distordu en rayon, alors ϕ est d'ordre fini.*

Démonstration. Comme ϕ est exponentiellement distordu, il existe une constante $C > 1$ telle que $\mathbf{r}(\phi^n) \leq C \log n$ pour tout entier $n \geq 1$. Considérons le diagramme espace temps X_ϕ de l'automorphisme ϕ (cf définition section 4.1). On cherche à évaluer la complexité du sous-shift Y, dit projectif, obtenu en prenant la restriction des suites sur les lignes verticales. Formellement ce sous-shift est $Y := \{\phi^j(x)_0 : j \in \mathbb{Z}, x \in X\}$. La restriction du sous-shift X_ϕ aux lignes horizontales n'est alors que le sous-shift X.

Soit $n \geq 1$ un entier. Par définition du rayon si deux suites $x, y \in X$ vérifient $x_i = y_i$ pour tout indice $|i| \leq \mathbf{r}(\phi^n)$, alors $\phi^n(x)_0 = \phi^n(y)_0$. Ainsi la complexité du sous-shift Y vérifie

$$p_Y(n) \leq \max_{0 \leq i \leq n} p_X(2\mathbf{r}(\phi^i) + 1) \leq p_X(2\lfloor C \log n \rfloor + 1). \tag{6}$$

En particulier, nous avons $p_Y(2^n) \leq p_X(2\lfloor nC \log 2 \rfloor + 1)$.

Comme l'entropie de X est nulle, il existe un entier n tel que $p_X(2\lfloor nC \log 2 \rfloor + 1) \leq 2^n$. Ainsi par le théorème de Morse-Hedlund (remarque 2.8), le sous-shift Y est fini et il existe une période p commune pour chacune de ses suites. L'automorphisme vérifie donc $\phi^p = \mathrm{Id}$. □

Le théorème 4.15 a des conséquences algébriques. Rappelons que les groupes $\mathrm{SL}(k, \mathbb{Z})$ avec $k \geq 3$ ainsi que beaucoup de réseaux de Lie sont presque simple (cf annexe A) dans le sens où tout sous-groupe normal est soit fini soit d'indice fini.

Corollaire 4.16 ([23])**.** *Soit (X, σ) un sous-shift d'entropie nulle. Soit G un groupe contenant un élément g exponentiellement distordu. Alors pour tout morphisme $\Phi \colon G \to \mathrm{Aut}(X, \sigma)$, l'élément $\Phi(g)$ est d'ordre fini.*
De plus si G est presque simple, $\Phi(G)$ est un groupe fini.

Démonstration. L'élément $\phi = \Phi(g)$ est exponentiellement distordu dans le groupe $\Phi(G) < \mathrm{Aut}(X, \sigma)$. Par la proposition 4.11 et le théorème 4.15, il est d'ordre fini.

Si, de plus, G est presque simple, l'élément $\Phi(g)$ est d'ordre fini. Ainsi le noyau K de Φ est infini car il contient une infinité de puissances de g. Puisque G est presque simple, le groupe normal K a un indice fini et $\Phi(G) \simeq G/K$ est fini. □

Ainsi ce corollaire montre que les groupes tels $\mathrm{SL}(k, \mathbb{Z})$, $k \geq 3$ ou le groupe de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(1, n)$, $n \geq 2$ ne peuvent être des sous-groupes d'automorphisme d'un sous-shift d'entropie nulle car ils ont des éléments exponentiellement distordus d'ordre infini. Il est cependant possible qu'ils ne soient dans le groupe d'automorphisme d'aucun sous-shift même d'entropie strictement positive.

Question 4.17. *Existe-t-il un sous-shift, d'entropie strictement positive, contenant* $\mathrm{SL}(k,\mathbb{Z})$*,* $k \geq 3$ *ou le groupe de Baumslag-Solitar* $\mathrm{BS}(1,n)$*,* $n \geq 2$ *dans son groupe d'automorphisme ?*

En rapport avec cette question mentionnons, que le groupe de Baumslag et Solitar $\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b | ba^m b^{-1} = a^n \rangle$, pour $n > m > 1$ n'est pas résiduellement fini et donc ne peut pas être dans le groupe d'automorphisme d'un sous-shift de type fini [9]. Si le groupe $\mathrm{BS}(1,n)$ est un sous-groupe d'automorphisme, la relation $bab^{-1} = a^n$ implique que l'élément $c_k := b^k a b^{-k}$, $k \geq 0$ vérifie $c_k^n = c_{k-1}$ et $c_0 = a$. Ainsi a possède une chaine infinie de racine d'ordre n. Un tel exemple est une question encore ouverte pour les sous-shifts de type fini [9].

4.4.2. *Distorsions polynomiales.* La distorsion polynomiale est également contrainte par la complexité polynomiale.

Par exemple, dans ce contexte, il existe un résultat sur la distorsion similaire au théorème 4.15.

Théorème 4.18 ([23])**.** *Soit* (X,σ) *un sous-shift admettant un automorphisme* ϕ *dont le rayon vérifie* $\mathbf{r}(\phi^n) = \mathrm{O}(n^{1/d})$*. Si* ϕ *est d'ordre infini alors*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_X(n)}{n^{d+1}} > 0.$$

Rappelons que dans [50] et [45] sont proposés des exemples de sous-shifts de complexités polynomiales possédant des automorphismes d'ordre infini et polynomialement distordus en rayon.

Idée de démonstration. La stratégie de preuve est semblable à celle du théorème 4.1 sur la complexité sous-quadratique. On considère le diagramme espace-temps associé à l'automorphisme ϕ et par l'étude de sa complexité on en déduit des propriétés de periodicité et que l'ordre de l'automorphisme est fini. Un estimé similaire à l'inégalité (6) donne que la complexité du sous-shift bidimensionnel vérifie pour une certaine constante $C > 1$, $p_{X_\phi}(n, n^d) \leq p_X(Cn)$ pour tout entier $n \geq 1$. Ainsi, si $\liminf_{n\to\infty} p_X(n)/n^{d+1} = 0$, il existe un entier n tel que $p_{X_\phi}(n, n^d) \leq n^{d+1}/2$. La version faible du théorème de Nivat (théorème 2.12) implique que pour tout point $x \in X$, il existe des entiers $i, j \in \mathbb{Z}$, $i > 0$ tels que $\phi^i(x) = \sigma^j(x)$. En particulier pour une suite x apériodique. Il est possible d'en déduire que $\mathbf{r}(\phi^{ik}) \geq |j|k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ [23]. Ceci n'est compatible avec une distorsion en rayon seulement si $j = 0$. L'orbite de x par ϕ est donc finie. De même, comme ϕ envoie chaque suite périodique de X sur une suite périodique (de même période), l'orbite de tout point $x \in X$ par ϕ est finie. Il suit que chaque suite du sous-shift projectif vertical $Y := \{\phi^j(x)_0 : j \in \mathbb{Z}, x \in X\}$ est périodique. Par la remarque 2.9, ce sous-shift est fini et ϕ est d'ordre fini. □

Il est également possible de raffiner la majoration sur le degré de nilpotence obtenue dans la proposition 4.3 en étudiant la distorsion dans le groupe des automorphismes.

Théorème 4.19 ([23])**.** *Soit* (X, σ) *un sous-shift minimal tel que pour un entier* $d \geq 1$*, sa complexité vérifie* $p_X(n) = \mathrm{o}(n^{(d+1)(d+2)/2+2})$*. Alors tout sous-groupe finiment engendré, sans torsion de* $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ *est virtuellement nilpotent de degré au plus* d*.*

Ainsi si la complexité d'un sous-shift minimal est en $\mathrm{o}(n^5)$, n'importe quel groupe finiment engendré, sans torsion, est virtuellement abélien.

Démonstration dans un cas particulier. Nous renvoyons le lecteur à [23] pour la preuve générale de ce résultat qui utilise plusieurs notions propres aux groupes nilpotents. Nous verrons les idées de cette preuve dans le cas, plus simple, où $p_X(n) = \mathrm{o}(n^5)$.

Pour un tel sous-shift minimal (X, σ), soit $G < \mathrm{Aut}(X, \sigma)$ un groupe sans torsion engendré par un nombre fini d'éléments. Par la proposition 4.3, ce groupe contient un sous-groupe H d'indice fini, nilpotent et de degré de nilpotence au plus 2. Si H est de degré 2, étant sans torsion, il contient nécessairement un groupe isomorphe au groupe de Heisenberg $\mathcal{H}$ (cf (5)). Avec les notations de (5), nous noterons également les automorphismes associés u, v et s. Remarquons, qu'en particulier le sous-shift X doit être infini pour avoir des automorphismes d'ordre infini. Comme le shift σ commute avec tous les automorphismes, l'intersection vérifie $\langle\sigma\rangle \cap \mathcal{H} = \langle\sigma\rangle \cap Z(\mathcal{H})$ où $Z(\mathcal{H})$ est le centralisateur de $\mathcal{H}$. Si cette intersection n'est pas triviale et puisque $Z(\mathcal{H})$ est engendré par s, une puissance du shift σ est une puissance de s. Ceci implique que σ est distordu dans $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$, ce qui est impossible par la remarque 4.12. Donc l'intersection $\langle\sigma\rangle \cap \mathcal{H}$ est triviale.

Ainsi le groupe $\mathrm{Aut}(X, \sigma)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\langle\sigma\rangle \oplus \mathcal{H}$. Ce sous-groupe étant de croissance en $\Theta(n^5)$ [62], ceci contredit la proposition 4.3. Donc G ne peut être que virtuellement abélien. $\square$

Le cas du groupe d'Heisenberg dans la preuve de ce théorème conduit naturellement à la question suivante.

Question 4.20. *Existe-t-il un sous-shift* X *ayant le groupe d'Heisenberg* $\mathcal{H}$ *comme sous-groupe d'automorphisme ?*

Cette question peut sembler être très spécifique. Cependant une réponse négative impliquerait une rigidité dans le théorème 4.2. En effet dans ce cas, tout groupe finiment engendré et sans torsion d'un sous-shift minimal de complexité polynomial serait virtuellement abélien, puisque le groupe d'Heisenberg est un sous-groupe de n'importe quel groupe nilpotent, non abélien, finiment engendré et sans torsion. La question 3.21 aurait ainsi une réponse négative dans le cas de la complexité polynomiale.

À l'opposé une réponse positive illustrerait la richesse des groupes d'automorphismes de sous-shift et répondrait positivement à la questions 4.14. Un tel exemple est encore inconnu même pour les sous-shifts de type fini.

5. Au delà des automorphismes des sous-shifts unidimensionnels

Nous présentons dans cette section quelques résultats sur les automorphismes pour des sous-shifts multidimensionnels. Les principales questions dans le contexte unidimensionnel s'étendent naturellement à ce contexte et mêmes pour des sous-shifts sur des groupes dénombrable généraux. Cependant le faible nombre de résultats obtenus pour les sous-shifts de type finis illustrent déjà les difficultés. Nous en verrons quelques uns et leurs différences avec le cas unidimensionnel. les problèmes d'automorphisme s'étendent également pour les flots et notamment les systèmes de pavage. Nous discuterons succinctement l'exemple du pavage de Penrose. Enfin nous présenterons la notion de direction de non-expansivité qui généralise la notion de suites asymptotiques et le lien avec les automorphismes.

5.1. **Sous-shifts multi-dimensionels.** Pour un entier $d \geq 1$ et un sous-shift $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un *automorphisme* ϕ de X est un homéomorphisme de l'espace commutant avec toutes les transformations shift σ^z, $z \in \mathbb{Z}^d$. Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon [47] s'étend sans difficulté dans ce contexte multidimensionnel, de sorte que tout automorphisme est un automate cellulaire.

De façon analogue au cas unidimensionnel, un *sous-shift de type fini* (SFT) $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est défini à partir d'un ensemble fini de motifs interdits et les éléments de X sont les suites $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ où aucun motif interdit n'apparaît.

Cependant le cas multidimensionnel n'est pas une extension directe du cas unidimensionnel. De nombreux nouveaux phénomènes apparaissent. Alors que les SFT en dimension 1 sont connus pour avoir une famille dense de points périodiques, R. Berger a donné un exemple de SFT en dimension $d = 2$ sans un point périodique [7]. R. Robinson a donné ensuite un exemple plus simple d'un tel SFT apériodique et minimal [78]. Au niveau des automorphismes, T. Ward [84] a donné un exemple de SFT multidimensionnel, mélangeant et d'entropie nulle dont le groupe d'automorphisme est trivial (ne contient que les transformations du shift). Plus tard M. Hochman construit un exemple de $\mathbb{Z}^2$-SFT dont le groupe d'automorphisme est isomorphe à $\mathbb{Z}^2 \oplus G$ où G est un groupe infini localement fini et virtuellement simple [49]. À la différence des SFT uni-dimensionels, le groupe des automorphismes n'est donc pas nécessairement résiduellement fini.

M. Hochman a donné des conditions suffisantes assurant un gros groupe d'automorphisme.

Théorème 5.1 ([49])**.** *Si X est un $\mathbb{Z}^d$-SFT d'entropie strictement positive, alors son groupe d'automorphisme contient des copies isomorphes de tout groupe fini.*

La condition sur l'entropie est faible mais pas nécessaire pour avoir beaucoup d'automorphismes. Par exemple, en considérant le SFT bi-dimensionel $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ où chaque colonne est une suite constante de symbole. Ce sous-shift n'est rien autre que le diagramme espace temps du full-shift unidimensionel $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ associé à l'automorphisme Id. Il est simple de voir que le groupe d'automorphisme de X est isomorphe à celui du full-shift.

En ajoutant une hypothèse de transitivité, *i.e.* pour un système admettant une orbite dense, M. Hochman obtient également un analogue au théorème de Ryan.

Théorème 5.2 ([49]). *Si X est un $\mathbb{Z}^d$-SFT d'entropie strictement positive transitif, alors le centre de son groupe d'automorphisme est engendré par l'action du shift $\langle \sigma^z, z \in \mathbb{Z}^d \rangle$.*

Il existe une version analogue au théorème de Kim et Rousch.

Théorème 5.3 ([49]). *Soit X est un $\mathbb{Z}^d$-SFT d'entropie strictement positive. Si les points minimaux sont denses dans X, alors son groupe d'automorphisme contient une copie isomorphe de* $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Ces résultats sur la généralisation du théorème de Kim et Rousch suscitent les questions suivantes proposées dans [49].

Question 5.4. *Pour tout entier $i, j, d \geq 2$, $i \neq j$, peut-on plonger les groupes d'automorphisme des full-shifts d-dimensionnels sur i et j symboles l'un dans l'autre ?*

Question 5.5. *Pour un entier $d \geq 2$, peut-on plonger le groupe d'automorphisme du full-shift d-dimensionnel sur* 2 *symboles dans celui d'un SFT de dimension inférieure ?*

Précisons que les résultats analogues au théorème de Ryan (théorème 5.2) montrent que les groupes d'automorphismes de full-shifts d et d'-dimensionnel sur 2 symboles ne sont pas isomorphes puisqu'ils ont des centres différents.

Le cas des sous-shifts minimaux reste également particulier dans la famille des SFT. Rappelons que dans ces sous-shifts toutes les orbites sont denses et que pour chaque suite, une copie de chaque motif fini apparaît sur un ensemble syndétique de $\mathbb{Z}^d$. Une première propriété des SFT minimaux est que leur langage est décidable [48] *i.e.* il existe un algorithme qui décide si un motif P apparaît dans les éléments du sous-shift. Cet algorithme est identique pour toute la famille des SFT minimaux.

Proposition 5.6. *Il existe un algorithme, qui étant donné une famille finie $\mathcal{F}$ de motifs interdits définissant un SFT $X_{\mathcal{F}}$ minimal non vide et un motif $P \in \mathcal{A}^F$ décide si P apparaît dans un élément de $X_{\mathcal{F}}$.*

Ce résultat s'étend aux sous-shifts minimaux effectifs, *i.e.* définis par une suite récursive (au sens algorithmique) de mots interdits (voir par ex. [44]). Rappelons en revanche que le fait de savoir si $X_{\mathcal{F}}$ est vide est une propriété indécidable [7].

Esquisse de preuve. L'algorithme fonctionne de la façon suivante : pour chaque entier n (plus grand que la taille des motifs de $\mathcal{F}$), on énumère tous les motifs $a_1, \dots, a_{k(n)}$ de $\mathcal{A}^{[-n,n]^d}$ qui ne contiennent pas de motifs interdits $\mathcal{F}$. Si le motif P apparaît dans chacun des motifs a_i, l'algorithme sort que le motif P apparaît. S'il n'apparaît dans aucun motif, l'algorithme sort que le motif P n'apparaît pas. Pour les autres cas, on augmente n et on recommence la procédure.

Ce processus s'arrêtera à un moment puisque par minimalité le motif P, s'il apparaît dans le sous-shift, doit apparaître dans n'importe quel motif de taille suffisamment grande. Il est simple de vérifier que cet algorithme donne bien la réponse attendue. $\square$

Cette possibilité d'énumérer algorithmiquement les motifs d'un sous-shift est particulièrement intéressante pour étudier le problème du mot dans le groupe d'automorphisme (voir par ex [44]).

Théorème 5.7. *Si le langage d'un sous-shift $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est décidable, alors le problème du mot sur le groupe des automorphismes de X est décidable.*

Esquisse de preuve. Supposons qu'il existe un algorithme `A` qui pour chaque ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}^d$ puisse donner tous les motifs dans $\mathcal{A}^F$ apparaissant dans un élément du sous-shift X.

Une collection de N automorphismes $\phi_1, \dots, \phi_N$ est donnée par N fonctions de bloc $\hat{\phi}_i \colon \mathcal{A}^{[-R,R]^d} \to \Sigma$ (théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon). Il est alors possible de déterminer algorithmiquement une fonction de bloc $\hat{\psi}$ de la composition $\psi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_N$ définie sur $\mathcal{A}^{[-NR,NR]^d}$. L'automorphisme ψ est l'identité si et seulement si pour tout motif $x \in \mathcal{A}^{[-NR,NR]^d}$ apparaissant dans X, nous avons $\hat{\psi}(x)_O = x_O$ où O désigne l'origine. L'algorithme `A` énumérant tous les motifs apparaissant dans X, permet de vérifier algorithmiquement cette condition. Le problème du mot est donc décidable pour ces automorphismes. $\square$

À l'opposé de ce résultat, P. Guillon, E. Jeandel, J. Kari et P. Vanier donnent un exemple de SFT bi-dimensionnel dont le problème du mot est indécidable. En particulier le sous-shift proposé n'est pas minimal.

Théorème 5.8 ([44]). *Il existe un SFT bi-dimensionnel X pour lequel le problème du mot est indécidable dans un sous-groupe finiment engendré d'automorphismes de X.*

Les auteurs de [44] raffinent même ce résultat en construisant des SFT dont le problème du mot dans le groupe d'automorphisme a un degré Turing de complexité arbitraire. Ils soulèvent également la question de la réciproque du théorème 5.7 dans le cas des SFT : est-ce que la décidabilité du problème du mot dans le groupe des automorphismes est équivalente à la décidabilité du langage ?

5.2. **Pavages et flots.** En lien avec les actions discrètes sur des sous-shifts, l'étude des pavages de $\mathbb{R}^d$ ou des ensembles de Delaunay, conduit à étudier l'action d'un flot $\varphi : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \Omega$ sur un espace métrique compact Ω appelé *enveloppe du pavage* correspondant à la translation du pavage étudié. L'action du flot est appelé *système de pavage* ou *système de Delone*. Nous renvoyons le lecteur à [77] pour les notations et une introduction à ce sujet. Dans ce cadre un *automorphisme* est un homéomorphisme de Ω qui commute avec le flot ($\phi \circ \varphi^t = \varphi^t \circ \phi$, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$). Toutes les questions sur les automorphismes de sous-shifts minimaux peuvent s'étendre à ce contexte. C'est également le cas pour les stratégies d'études des automorphismes, la plupart des arguments s'étendent sans peine au cas des flots.

Par exemple pour le fameux pavage de Penrose, l'enveloppe Ω_{Pen} est un espace métrique compact où le flot $\mathbb{R}^2$ agit de façon minimale (toutes les orbites sont denses). Une description assez précise de cette enveloppe est donnée par l'intermédiaire de son facteur équicontinu maximal qui est un $\mathbb{R}^2$-flot linéaire $\{L^t, t \in \mathbb{R}^2\}$ minimal sur le tore $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ de dimension 4. Il existe une fonction facteur $\pi \colon \Omega_{Pen} \to \mathbb{T}^4$ continue et qui commute avec les différents flots ($\pi \circ \varphi^t = L^t \circ \pi$, $\forall t \in \mathbb{R}^2$) [76]. Cette application facteur est presque injective de sorte que les mêmes arguments utilisés pour les lemmes 2.6 et 2.3 appliqués au cas des flots montrent que l'application π induit une injection $\hat{\pi}$ du groupe des automorphismes de Ω_{Pen} dans celui du flot linéaire $\{L^t, t \in \mathbb{R}^2\}$ sur le tore $\mathbb{T}^4$. Par les mêmes arguments que dans le lemme 3.10, les automorphismes de ce flot linéaire ne sont rien d'autres que des translations linéaires sur $\mathbb{T}^4$. E. A. Robinson montre dans [76] qu'il existe une unique $\{L^t, t \in \mathbb{R}^2\}$-orbite dont les éléments x vérifient $|\pi^{-1}(x)| = 10$. Comme l'application π est compatible, pour chaque automorphisme ϕ, la translation $\hat{\pi}(\phi)$ doit préserver cette orbite. L'action des automorphismes sur un flot minimal étant libre, la translation $\hat{\pi}(\phi)$ est égale à un élément de la forme L^t. L'injectivité de $\hat{\pi}$ implique que les automorphismes de Ω_{pen} sont réduits au flot de translation φ^t, $t \in \mathbb{R}^2$.

Il existe d'autres groupes naturellement associés à un systèmes de pavages qui sont également des invariants de systèmes dynamiques. Plus en relation avec les problèmes d'équivalences orbitales de flot, le normalisateur $N_{\mathrm{Homeo}(\Omega)}(\varphi)$ du flot φ^t dans le groupe des homéomorphismes de l'enveloppe Ω du pavage est l'ensemble des homéomorphismes de l'enveloppe qui conjugue le flot $\{\varphi^t : t \in \mathbb{R}^d\}$ avec un flot de la forme $\{\varphi^{At} : t \in \mathbb{R}^d\}$ pour une application linéaire inversible $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$. Il se trouve que le groupe de ces transformations linéaires A est isomorphe à la collection des classes $[h]$ des éléments $h \in N_{\mathrm{Homeo}(\Omega)}(\varphi)$ modulo isotopie [59]. Cette collection forme un groupe appelé *mapping class group* de l'enveloppe. Il est également isomorphe au quotient $\mathrm{Homeo}(\Omega)/\mathrm{Homeo}^0(\Omega)$ où $\mathrm{Homeo}^0(\Omega)$ désigne la classe d'isotopie de l'identité [59]. Le mapping class group est toujours dénombrable pour les systèmes de pavages [1] et il a été explicité dans le cas du pavage de Penrose dans [59]. Dans le cas de la dimension $d = 1$, l'enveloppe du pavages correspond à une suspension d'un sous-shift (X, σ). Le mapping class group contient alors une copie isomorphe au groupe quotient $\mathrm{Aut}(X,\sigma)/\langle\sigma\rangle$. S. Schmieding et K. Yang donnent des conditions suffisantes pour que le mapping class group soit virtuellement isomorphe à ce groupe quotient [81]. En dimension supérieure, ces groupes pour des systèmes de pavages qui ne sont pas des suspensions de sous-shifts multidimensionnels, sont encore largement méconnus.

Les pavages substitutifs, comme le pavage de Penrose, forment une riche famille d'exemple. De plus il est connu qu'ils ne possèdent qu'un nombre fini, de système de pavages apériodiques, facteurs du système [15]. De la même façon que dans le cas symbolique (question 3.9), il est possible d'espérer pouvoir répondre à la question suivante.

Question 5.9. *Existe-t-il un algorithme pour donner la liste de tous les différents systèmes de pavages apériodiques facteurs d'un système de pavage substitutif donné ?*

5.3. **Direction de non expansivité.** Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, la notion de mot spéciaux et notamment du théorème de Morse-Hedlund (théorème 2.7) est fondamentale pour l'étude des automorphismes de $\mathbb{Z}$-sous-shift. Dans le cas des multi-dimensionnel, il existe une généralisation de la notion de suites asymptotiques, proposée par M. Boyle et D. Lind dans [8] via la notion de direction de non expansivité. Fixons une norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^d$ et rappelons qu'un hyperplan H de $\mathbb{R}^d$ est un sous-espace vectoriel de dimension $d-1$. Pour une constante $M>0$, notons par H^M l'ensemble des points de l'epsace à distance au plus M de l'hyperplan H : $H^M := \{z\in\mathbb{R}^d : \exists h\in H,\ \|z-h\|\leq M\}$

Définition 5.10. *Pour un $\mathbb{Z}^d$-sous-shift X, un hyperplan $H\subset\mathbb{R}^d$ est dit* expansif *s'il existe une constante M telle pour $x,y\in X$,*

$$x|_{\mathbb{Z}^d\cap H^M} = y|_{\mathbb{Z}^d\cap H^M} \Rightarrow x=y.$$

Le terme expansif vient du fait que si $H\cap\mathbb{Z}^d$ forme un sous-réseau non trivial, la définition traduit le fait que l'action de $\mathbb{Z}^d$ restreinte à ce sous réseau est expansive. La notion d'hyperplan expansif est une notion projective dans le sens où elle ne dépend pas de l'orientation de l'hyperplan. Pour la dimension 2, on parle alors de *direction expansive* car les hyperplans sont des droites.

Nous serons en fait plus intéressé par les hyperplans de qui ne sont pas expansifs. Un tel hyperplan sera appelé *hyperplan non expansif* (*direction de non expansivité* dans le cas $d=2$). Par un argument classique de compacité, pour un sous-shift X et un hyperplan non expansif, il existe dans X deux éléments $x\neq y$ qui coïncident sur un demi-espace délimité par l'hyperplan H. De façon analogue au théorème 2.7, M. Boyle et D. Lind obtiennent ce surprenant résultat.

Théorème 5.11 ([8]). *Un $\mathbb{Z}^d$-sous-shift infini admet un hyperplan expansif.*

À la différence du cas unidimensionnel où n'importe quel hyperplan (un point) est non expansif (théorème 2.7), on ne sait pas *a priori* quelle est la direction de non expansivité d'un sous-shift. Nous noterons par $NE(X)$ l'ensemble des hyperplans qui sont des directions de non-expansivité du système (X, T). Il se trouve que $NE(X)$ est un sous-ensemble fermé dans l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{R}^d$ qui forme la variété grassmanienne [8]. Pour la dimension 2, les résultats de [8] et de M. Hochman donnent une réciproque.

Théorème 5.12 ([8, 50])**.** *Tout ensemble non vide, fermé de directions de* $\mathbb{R}^2$ *est un ensemble de direction de non expansivité d'un* $\mathbb{Z}^2$*-sous-shift.*

Ainsi l'ensemble $NE(X)$ peut être homéomorphe à n'importe quel ensemble fermé du cercle : un point, un ensemble de Cantor, un cercle, etc... pour un sous-shift X. Le point le plus difficile dans la preuve du théorème 5.12 est de réaliser un exemple où $NE(X)$ est un singleton d'une direction arbitraire fixée, tout particulièrement lorsque la direction est irrationnelle. M. Hochman utilise pour cela des machines de Turing universelles. Cependant le problème suivant reste ouvert.

Question 5.13. *Peut on caractériser les directions de non expansivité pour les* $\mathbb{Z}^2$*-sous-shifts minimaux ?*

La même question reste ouverte pour d'autre type de dynamique restreinte (transitif, uniquement ergodique, ...). Le cas des SFT a été traité par P. Guillon et C. Zinoviadis (voir [86]). Mentionnons également qu'aucun algorithme n'est connu pour déterminer l'ensemble $NE(X)$ d'un sous-shift substitutif multidimensionnel.

Plus en relation avec le centralisateur d'une $\mathbb{Z}$-sous-shift X, pour un automorphisme ϕ de X, son diagramme espace-temps X_ϕ possède la direction horizontale d'équation $y = 0$ comme une direction d'expansive. Si $\phi = \mathrm{Id}$, la direction verticale d'équation $x = 0$ est alors l'unique direction de non-expansivité. Réciproquement les directions de non expansivité d'un $\mathbb{Z}^2$ sous-shift X ont un lien avec les automorphismes. En effet si ℓ est une droite de pente rationnelle qui est expansive pour X, alors la restriction de l'action du shift aux éléments de $\ell \cap \mathbb{Z}^2$ est conjuguée à un $\mathbb{Z}$-sous-shift. Pour tout élément $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \ell$, la transformation σ^z défini alors un automorphisme du sous-shift $(X, \sigma|_{\ell\cap\mathbb{Z}^2})$. Ceci permet, en principe de réaliser des exemples d'automorphisme de sous-shift avec des propriétés particulières.

Par exemple, en relation avec les automorphismes distordus (cf section 4.4), la proposition suivante a été démontrée dans [22].

Proposition 5.14 ([22])**.** *Soit* ϕ *un automorphisme d'un* $\mathbb{Z}$*-sous-shift* X*. Le diagramme espace temps* X_ϕ *de* ϕ *admet la direction verticale comme unique direction de non expansivité ssi* ϕ *et* ϕ^{-1} *sont distordus en rayon.*

Appendices

Annexe A. Notions de base en théorie des groupes

Définition A.1. *Un* semi-groupe *est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative.*

Par exemple ; $[0, +\infty)$ munit de la loi min. À la différence d'un groupe il n'existe pas nécessairement d'inverse pour un élément. Un semi-groupe G possédant un élément neutre (noté 1_G) est appelé *monoïde*.

Lemme A.2. *Si G est un groupe fini et $S \subset G$ est un semi-groupe pour la loi de composition de G. Alors S est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'un élément $f \in S$ est également dans G. Il a donc un ordre fini et il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 1_G$. Ainsi l'élément neutre 1_G et l'inverse $f^{-1} = f^{n-1}$ sont dans S. On vérifie alors directement que S est un sous-groupe de G. $\square$

Un *morphisme* de semi-groupe est une application $f\colon R \to S$ entre deux semi-groupes $(R, \cdot)$ et $(S, \star)$ commutant avec les lois de compositions *i.e.* $f(s \cdot t) = f(s) \star f(t)$ pour tout $s, t \in R$. Si, de plus f est une bijection on dit alors que f est un *isomorphisme*.

Définition A.3. *Pour une suite exacte de groupes G, H et N*

$$\{1\} \to N \to G \to H \to \{1\},$$

le groupe G est dit une extension *de N par H et H est un* facteur *de G.*

Le groupe N est alors *normal* dans G (*i.e.* $gNg^{-1} \subset N$ $\forall g \in G$) et le groupe quotient G/N est alors isomorphe à H.

On note par $H < G$ lorsque H est un sous-groupe d'un groupe G. Le sous-groupe H est dit *d'indice fini* si l'ensemble quotient G/H est fini.

Définition A.4. *Un semi-groupe G est dit* finiment engendré *s'il est engendré par un ensemble fini de générateurs $\mathcal{S}$.*

Le groupe engendré est noté $\langle \mathcal{S} \rangle$.

Définition A.5. *Pour une propriété $\mathtt{P}$ (abélien, isomorphe à $\mathbb{Z}$, moyennable, ...), un groupe G est dit* localement $\mathtt{P}$ *si tout sous-groupe de G finiment engendré vérifie la propriété $\mathtt{P}$.*

Par exemple, le groupe additifs des rationnels $\mathbb{Q}$ est localement isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Définition A.6. *Un groupe G est dit* virtuellement $\mathtt{P}$ *s'il admet un sous-groupe d'indice fini vérifiant la propriété $\mathtt{P}$.*

Par exemple, le groupe $\mathbb{Z} \oplus H$ où H est un groupe fini, est virtuellement isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Définition A.7. *Le* normalisateur $N_G(\mathcal{S})$ *d'un ensemble* $\mathcal{S} \subset G$ *dans le groupe* G *est l'ensemble des éléments de* G *qui préservent le groupe engendré par* $\mathcal{S}$ *par conjugaison :* $N_G(\mathcal{S}) = \{g \in G : g\langle\mathcal{S}\rangle g^{-1} = \langle\mathcal{S}\rangle\}$.

Le normalisateur est un sous-groupe de G.

Définition A.8. *Le* centralisateur $C_G(\mathcal{S})$ *d'un ensemble* $\mathcal{S} \subset G$ *dans le groupe* G *est l'ensemble des éléments de* G *qui commutent avec tous les éléments de* $\mathcal{S}$ *:* $C_G(\mathcal{S}) = \{g \in G : gs = sg\ \forall s \in \mathcal{S}\}$.

Le *centre* $Z(G)$ de G est le sous-groupe de G des éléments commutant avec tous les éléments de G : $Z(G) = C_G(G)$.

A.1. **Groupe libre et présentation.**

Pour un ensemble fini $\mathcal{S}$, considérons une copie $\mathcal{S}^{-1} := \{s^{-1} : s \in \mathcal{S}\}$. Un mot dans $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1})^*$ sera dit *réduit* s'il ne contient pas les mots ss^{-1} ou $s^{-1}s$. Tout mot dans $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1})^*$ peut être réduit à un unique mot réduit en éliminant successivement chaque apparition de mot ss^{-1} ou $s^{-1}s$.

Le *groupe libre* sur $\mathcal{S}$, noté $F_{\mathcal{S}}$ est l'ensemble de tous les mots réduits dans $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1})^*$, munit de la loi de composition : concaténation des mots suivie de l'opération de réduction. Pour un entier n, nous noterons F_n le groupe libre défini sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Un groupe peut se définir à partir d'une présentation. Étant donné un ensemble (fini) $\mathcal{S}$ et $R \subset (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1})^*$ un ensemble de mots, le groupe $\langle\mathcal{S}|R\rangle$ est le quotient de groupe $F_{\mathcal{S}}/N_R$ où $F_{\mathcal{S}}$ est le groupe libre sur $\mathcal{S}$ et N_R est le plus petit sous-groupe normal de $F_{\mathcal{S}}$ contenant R. Le couple $(\mathcal{S}, R)$ est une *présentation* d'un groupe G si G est isomorphe à $\langle\mathcal{S}|R\rangle$. Ce groupe est dit *finiment présenté* s'il admet une présentation $(\mathcal{S}, R)$ avec $\mathcal{S}$ et R finis.

Par exemple, nous avons $F_{\mathcal{S}} \simeq \langle S|\emptyset\rangle$, $\mathbb{Z}^2 \simeq \langle a, b|aba^{-1}b^{-1}\rangle$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle a|a^n\rangle$.

Pour un groupe G de présentation $(\mathcal{S}, R)$, il existe ainsi une application $\pi\colon \mathcal{S} \to G$ qui s'étend en un morphisme surjectif du monoïde libre $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1})^*$ sur G. On dit alors que le *problème du mot sur G est décidable* (ou *résoluble*) si l'appartenance d'un mot au langage $\{w \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1})^* : \pi(w) = 1_G\}$ est décidable.

A.2. **Groupe nilpotent.**

Pour f, g des éléments d'un groupe G, leur *commutateur* est l'élément $[f, g] := fgf^{-1}g^{-1}$.

Un groupe G est *abélien* lorsque tous ses éléments commutent entre eux : $[f, g] = 1_G, \forall f, g \in G$. Nous utiliserons pour ces groupes la notation additive $+$ pour la loi de groupe et écrirons $f + g$ à la place de fg.

Les groupes abéliens finiment engendrés sont complément caractérisé par le théorème de Kronecker : ils sont tous isomorphes à un groupe de la forme $\mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$ pour des entiers $d \geq 0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{N}^*$.

Définition A.9. *Le* rang *d'un groupe abélien G est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $G \otimes \mathbb{Q}$.*

L'exemple précédent a pour rang d.

Pour un groupe général G et deux sous-ensembles $A, B \subset G$, nous notons par $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $[a, b]$ avec $a, b \in G$. Pour un groupe, on définit de façon récursive une suite de sous-groupes emboités où $G_1 = G$ et $G_{k+1} = [G, G_k]$ pour $k > 0$.

Définition A.10. *On dit que G est un groupe* nilpotent *d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$, si d est le plus petit entier tel que G_{d+1} est le groupe trivial $\{1_G\}$. On dit simplement* nilpotent *en omettant l'ordre $d \geq 1$.*

Ainsi les groupes nilpotent d'ordre 1 sont les groupes abéliens. La notion de groupe nilpotent est donc une généralisation de la notion de groupe abélien. Le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}$ (cf exemple dans la section 4.4) est un groupe nilpotent d'ordre 2 puisque le commutateur s commute avec tous les éléments de $\mathcal{H}$. Plus généralement le groupe des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures dont la diagonale n'est formée que de 1, est nilpotent d'ordre $n - 1$.

Rappelons quelques propriétés des groupes nilpotents. Nous renvoyons le lecteur à [34] pour une étude détaillée de leurs propriétés. N'importe quel sous-groupe d'un groupe nilpotent finiment engendré est également nilpotent et finiment engendré.

Définition A.11. *Pour un groupe G, un élement g est dit de* torsion *s'il est d'ordre fini : i.e. s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $g^n = 1_G$.*

Dans le cas des groupes nilpotents :

- l'ensemble des éléments de torsion forme un groupe normal dit *de torsion* et est noté $T(G) := \{g \in G : \exists n \geq 1, g^n = 1\}$;
- un sous-groupe de torsion finiment engendré est fini.

A.3. **Groupe résiduellement fini.**

Définition A.12. *Un (semi-)groupe G est* résiduellement fini *si pour toute paire d'éléments distincts $f \neq \tilde{g} \in G$, il existe un morphisme π de (semi-)groupe vers un vers un (semi-)groupe fini tel que $\pi(f) \neq \pi(g)$.*

Dans le cas des groupes, il existe différentes caractérisations de cette propriété. Ainsi un groupe G est résiduellement fini

- ssi pour tout élément $g \in G$, $g \neq 1_G$, il existe un groupe fini K et un morphisme de groupe $\pi\colon G \to K$ tel que $\pi(g) \neq 1_K$;
- ssi l'intersection de tous ses sous-groupes d'indice fini est triviale.

Des exemples de groupes résiduellement finis sont les groupes finis, le groupe libre, les groupes nilpotents finiment engendré, etc ... Par un résultat de Mal'cev, les groupes linéaires finiment engendré engendrés, *i.e.* engendré par un nombre finis de matrices sur un coprs de caractéristique nulle sont également résiduellement fini. Un sous-groupe d'un groupe résiduellement fini est encore résiduellement fini. Le problème du mot est résoluble pour les groupes résiduellement finis.

À l'opposé, les groupes simples (sans groupe normal non trivial) infinis ne sont pas résiduellement finis. Mentionnons également que le groupe abélien $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas résiduellement fini. En effet, sinon pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$ il existe un groupe fini K et un morphisme $\pi \colon \mathbb{Q} \to K$ tel que $\pi(r) \neq 1_K$. Pour l'élément $r/|K| \in \mathbb{Q}$, son image dans K est d'ordre fini (divisant $|K|$). Ainsi $\pi(r) = |K|\pi(r/|K|) = 1_K$ ce qui conduit à une contradiction.

Définition A.13. *Un groupe est* presque simple *si tout sous-groupe normal et soit fini soit a un indice fini.*

Le théorème des sous-groupes normaux de Margulis implique que beaucoup de réseaux de Lie sont presques simples [63]. Des exemples typiques de tels groupes sont $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ pour $n \geq 3$.

A.4. **Propriétés géométriques des groupes.** Il existe une distance naturelle sur un groupe dénombrable pour lequel la multiplication à droite (ou à gauche en fonction des conventions) agit comme une isométrie. Les propriétés de cette distance sont reliées aux propriétés algébriques du groupe. C'est particulièrement le cas pour la notion métrique de croissance de groupe que nous utilisons dans ce papier. Nous renvoyons le lecteur à [62] pour un survol des propriétés de la fonction croissance d'un groupe.

Pour un ensemble fini $\mathcal{S}$ de générateurs engendrent un groupe $\langle \mathcal{S} \rangle$ la longueur $\ell_{\mathcal{S}}(g)$ est la plus petite présentation (en terme de longueur de mot) d'un élément $g \in \langle \mathcal{S} \rangle$ par des éléments de $\mathcal{S}$. Plus précisément, cette longueur est définie par

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) := \inf\{n \geq 1 : g = s_1 \cdots s_n, s_i \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} \cup \{1_G\}\}.$$

Cette longueur donne une distance $d_{\mathcal{S}}(g, h) := \ell_{\mathcal{S}}(g^{-1}h)$ sur G invariante par multiplication à droite.

La croissance d'un groupe finiment engendré G est alors donné par le cardinale de boule de rayon n centrée en l'élément neutre 1_G. Plus précisément, la *croissance (cumulative)* d'un groupe G engendré par un ensemble fini $\mathcal{S}$ est pour un entier $n \geq 0$

$$s_G(n) = |\{g \in G : \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq n\}|.$$

Cette fonction croissance est sous-multiplicative de sorte que la limite suivante, $\omega(G) := \lim_{n \to \infty} s_G(n)^{1/n}$ existe.

Nous disons que le groupe G a

— une *croissance exponentielle* si $\omega(G) > 1$;

— une *croissance sous-exponentielle* si $\omega(G) = 1$;

— une *croissance polynomiale* s'il existe des entiers c et d tels que $s_G(n) \leq cn^d$ pour tout entier n ;

— un *degré polynomiale* si G a une croissance polynomiale, et son degré est $d(G) := \inf\{d : \exists c, s_G(n) \leq cn^d \; \forall n\} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log s_G(n)}{\log n}$;

— une *croissance intermédiaire* si G a une croissance sous-exponentielle mais n'a pas une croissance polynomiale.

Dans tous les cas ces propriétés ne dépendent pas du choix des générateurs. De plus si $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log s_G(n)}{\log n}$ est finie, alors le groupe G a une croissance polynomiale [83].

Les groupe libre sur $N \geq 2$ générateurs a une croissance exponentielle, alors que les groupes nilpotents ont une croissance polynomiale. Ils sont mêmes typiques des groupes à croissance polynomiale par le célèbre théorème de Gromov.

Théorème A.14. *Un groupe à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent.*

A.5. **Moyennabilité.**

Définition A.15. *Un groupe G est dit* moyennable *s'il est possible de définir sur G mesure non triviale, finiment additive et invariante par translation.*

Rappelons qu'une telle mesure est une fonction $\mu\colon 2^G \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous sous-ensembles $A, B \subset G$

(1) si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

(2) si $g \in G$, alors $\mu(Ag) = \mu(A)$;

(3) $\mu(G) > 0$.

À la différence d'une mesure classique d'un espace mesuré, cette mesure μ est définie sur tous les sous-ensembles de G et ne vérifie pas la propriété d'additivité pour des unions dénombrable d'ensembles (σ-additivité). Nous renvoyons le lecteur à [62] et [34] pour une présentation plus précise de cette notion.

Par exemple, un groupe G fini est moyennable car il admet la mesure $\mu(A) = |A|/|G|$ qui vérifie tous les points (1)-(3). Mentionnons également que

— les groupes nilpotents sont moyennables ;

— les sous-groupes et les facteurs de groupes moyennables sont moyennables ;

— une extension d'un groupe moyennable par un groupe moyennable est moyennable ;

— un groupe localement moyennable est moyennable.

À l'opposé le groupe libre n'est pas moyennable.

Il existe différentes caractérisations des groupes moyennables. Par exemple, toute action continue d'un groupe moyennable sur un espace métrique compact admet une mesure invariante.

Il en existe également une à partir des suites de Følner, particulièrement utile pour l'étude des automorphismes.

Si G est groupe engendré par un ensemble $\mathcal{S}$, pour un sous-ensemble $A \subset G$, le *bord* ∂A de A est le sous-ensemble de G défini par $\partial A = \{x \notin A : \exists s \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}, y \in A, x = ys\}$.

Théorème A.16. *Un groupe finiment engendré G est moyennable ssi* $\inf |\partial A|/|A| = 0$ *où l'infimum est pris sur tous les sous-ensembles de G.*
De façon équivalente, il existe une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de sous-ensembles de G tels que $\lim_n |\partial F_n|/|F_n| = 0$.

La suite $(F_n)_n$ est alors appelée *suite de Følner* de G. Comme la notion de moyennabilité est indépendante du choix des générateurs, c'est également le cas pour de la suite de Følner.

De cette caractérisation, il est possible d'en déduire qu'un groupe à croissance sous-exponentielle est moyennable : la suite des boules centrées en l'élément neutre $B_n := \{g \in G : \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq n\}$ est une suite de Følner. Par exemple, pour $G = \mathbb{Z}^d$, la suite d'ensemble où $F_n = [-n; n]^d$ forme une suite de Følner.

Cependant il ne s'agit pas d'une caractérisation puisqu'il existe des groupes moyennables à croissance exponentielle (par exemple les groupes de Baumslag-Solitar).

Références

[1] J. Aliste-Prieto and S. Petite. On the simplicity of homeomorphism groups of a tilable lamination. *Monatsh. Math.*, 181(2) :285–300, 2016.

[2] J. Auslander. Endomorphisms of minimal sets. *Duke Math. J.*, 30 :605–614, 1963.

[3] J. Auslander. *Minimal flows and their extensions*, volume 153 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122.

[4] M. Baake, J. A. G. Roberts, and R. Yassawi. Reversing and extended symmetries of shift spaces. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 38(2) :835–866, 2018.

[5] M. Barge and B. Diamond. A complete invariant for the topology of one-dimensional substitution tiling spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(5) :1333–1358, 2001.

[6] H. Bass. The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 25 :603–614, 1972.

[7] R. Berger. The undecidability of the domino problem. *Mem. Amer. Math. Soc. No.*, 66 :72, 1966.

[8] M. Boyle and D. Lind. Expansive subdynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1) :55–102, 1997.

[9] M. Boyle, D. Lind, and D. Rudolph. The automorphism group of a shift of finite type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 306(1) :71–114, 1988.

[10] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[11] W. Bułatek and J. Kwiatkowski. Strictly ergodic Toeplitz flows with positive entropies and trivial centralizers. *Studia Math.*, 103(2) :133–142, 1992.

[12] C. F. Colle and E. Garibaldi. An alphabetical approach to nivat's conjecture. arXiv :1904.04897.

[13] M. I. Cortez and S. Petite. On the the centralizers of minimal aperiodic actions on the cantor set. *arXiv e-prints*, page arXiv :1807.04654.

[14] M. I. Cortez and S. Petite. G-odometers and their almost one-to-one extensions. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(1) :1–20, 2008.

[15] María Isabel Cortez, Fabien Durand, and Samuel Petite. Linearly repetitive Delone systems have a finite number of nonperiodic Delone system factors. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(3) :1033–1046, 2010.

[16] E. Coven. Endomorphisms of substitution minimal sets. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 20 :129–133, 1971/72.

[17] E. Coven, F. Dekking, and M. Keane. Topological conjugacy of constant length substitution dynamical systems. *Indag. Math. (N.S.)*, 28(1) :91–107, 2017.

[18] E. Coven, A. Dykstra, M. Keane, and M. LeMasurier. Topological conjugacy to given constant length substitution minimal systems. *Indag. Math. (N.S.)*, 25(4) :646–651, 2014.

[19] E. Coven, A. Quas, and R. Yassawi. Computing automorphism groups of shifts using atypical equivalence classes. *Discrete Anal.*, pages Paper No. 3, 28, 2016.

[20] E. M. Coven, M. Keane, and M. Lemasurier. A characterization of the Morse minimal set up to topological conjugacy. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(5) :1443–1451, 2008.

[21] . Cyr and B. Kra. Nonexpansive $\mathbb{Z}^2$-subdynamics and Nivat's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(9) :6487–6537, 2015.

[22] V. Cyr, J. Franks, and B. Kra. The spacetime of a shift endomorphism. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(1) :461–488, 2019.

[23] V. Cyr, J. Franks, B. Kra, and S. Petite. Distortion and the automorphism group of a shift. *J. Mod. Dyn.*, 13 :147–161, 2018.

[24] V. Cyr and B. Kra. The automorphism group of a shift of slow growth is amenable. arXiv :1708.06253.

[25] V. Cyr and B. Kra. The automorphism group of a shift of linear growth : beyond transitivity. *Forum Math. Sigma*, 3 :e5, 27, 2015.

[26] V. Cyr and B. Kra. The automorphism group of a minimal shift of stretched exponential growth. *J. Mod. Dyn.*, 10 :483–495, 2016.

[27] V. Cyr and B. Kra. The automorphism group of a shift of subquadratic growth. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(2) :613–621, 2016.

[28] A. del Junco. A simple measure-preserving transformation with trivial centralizer. *Pacific J. Math.*, 79(2) :357–362, 1978.

[29] S. Donoso, F. Durand, A. Maass, and S. Petite. On automorphism groups of low complexity subshifts. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2015.

[30] S. Donoso, F. Durand, A. Maass, and S. Petite. On automorphism groups of Toeplitz subshifts. *Discrete Anal.*, pages Paper No. 11, 19, 2017.

[31] T. Downarowicz. The royal couple conceals their mutual relationship : a noncoalescent Toeplitz flow. *Israel J. Math.*, 97 :239–251, 1997.

[32] T. Downarowicz. Survey of odometers and Toeplitz flows. In *Algebraic and topological dynamics*, volume 385 of *Contemp. Math.*, pages 7–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[33] T. Downarowicz, J. Kwiatkowski, and Y. Lacroix. A criterion for Toeplitz flows to be topologically isomorphic and applications. *Colloq. Math.*, 68(2) :219–228, 1995.

[34] C. Druţu and M. Kapovich. *Geometric group theory*, volume 63 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. With an appendix by Bogdan Nica.

[35] F. Durand. Sur les ensembles d'entiers reconnaissables. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 10 :65–84, 1998.

[36] F. Durand. Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic subshift factors. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 20 :1061–1078, 2000.

[37] F. Durand and J. Leroy. Decidability of the isomorphism and the factorization between minimal substitution subshifts. arXiv :1806.04891.

[38] C. Epifanio, M. Koskas, and F. Mignosi. On a conjecture on bidimensional words. *Theoret. Comput. Sci.*, 299(1-3) :123–150, 2003.

[39] I. Fagnot. Sur les facteurs des mots automatiques. *Theoret. Comput. Sci.*, 172(1-2) :67–89, 1997.

[40] S. Ferenczi. Systems of finite rank. *Colloq. Math.*, 73(1) :35–65, 1997.

[41] S. Ferenczi. Complexity of sequences and dynamical systems. In *Combinatorics and number theory*, volume 206, pages 145–154. (Tiruchirappalli, 1996), 1999.

[42] T. Giordano, I. F. Putnam, and C. F. Skau. Full groups of Cantor minimal systems. *Israel J. Math.*, 111 :285–320, 1999.

[43] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund. *Topological dynamics*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 36. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1955.

[44] P : Guillon, E. Jeandel, J. Kari, and P. Vanier. Undecidable word problem in subshift automorphism groups. In *Computer science—theory and applications*, volume 11532 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 180–190. Springer, Cham, 2019.

[45] P. Guillon and V. Salo. Distortion in one-head machines and cellular automata. In *Cellular automata and discrete complex systems*, volume 10248 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 120–138. Springer, Cham, 2017.

[46] Y. Guivarc'h. Groupes de Lie à croissance polynomiale. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 272 :A1695–A1696, 1971.

[47] G. A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Math. Systems Theory*, 3 :320–375, 1969.

[48] M. Hochman. On the dynamics and recursive properties of multidimensional symbolic systems. *Invent. Math.*, 176(1) :131–167, 2009.

[49] M. Hochman. On the automorphism groups of multidimensional shifts of finite type. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(3) :809–840, 2010.

[50] M. Hochman. Non-expansive directions for $\mathbb{Z}^2$ actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(1) :91–112, 2011.

[51] C. Holton and L. Zamboni. Descendants of primitive substitutions. *Theory Comput. Systems*, 32 :133–157, 1999.

[52] B. Host and F. Parreau. Homomorphismes entre systèmes dynamiques définis par substitutions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(3) :469–477, 1989.

[53] K. Jacobs and M. Keane. $0-1$-sequences of Toeplitz type. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 13 :123–131, 1969.

[54] K. Juschenko and N. Monod. Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups. *Ann. of Math. (2)*, 178(2) :775–787, 2013.

[55] K. H. Kim and F. W. Roush. On the automorphism groups of subshifts. *Pure Math. Appl. Ser. B*, 1(4) :203–230 (1991), 1990.

[56] J.L. King and J.-P. Thouvenot. A canonical structure theorem for finite joining-rank maps. *J. Analyse Math.*, 56 :211–230, 1991.

[57] B. P. Kitchens. *Symbolic dynamics*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1998. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts.

[58] P. Kůrka. *Topological and symbolic dynamics*, volume 11 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[59] J. Kwapisz. Rigidity and mapping class group for abstract tiling spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(6) :1745–1783, 2011.

[60] M. Lemańczyk and M. K. Mentzen. On metric properties of substitutions. *Compositio Math.*, 65(3) :241–263, 1988.

[61] A. Lubotzky, S. Mozes, and M. S. Raghunathan. The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (91) :5–53 (2001), 2000.

[62] A. Mann. *How groups grow*, volume 395 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[63] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[64] H. Matui. Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems. *Internat. J. Math.*, 17(2) :231–251, 2006.

[65] K. Medynets. Reconstruction of orbits of Cantor systems from full groups. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(6) :1104–1110, 2011.

[66] K. Medynets and J. P. Talisse. Toeplitz subshifts with trivial centralizers and positive entropy. *Involve*, 12(3) :395–410, 2019.

[67] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic Dynamics. *Amer. J. Math.*, 60(4) :815–866, 1938.

[68] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62 :1–42, 1940.

[69] B. Mossé. Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution. *Theoret. Comput. Sci.*, 99(2) :327–334, 1992.

[70] C. Müllner and R. Yassawi. Automorphisms of automatic shifts. arXiv :1904.00854.

[71] V. Nekrashevych. Palindromic subshifts and simple periodic groups of intermediate growth. *Ann. of Math. (2)*, 187(3) :667–719, 2018.

[72] J. Olli. Endomorphisms of Sturmian systems and the discrete chair substitution tiling system. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(9) :4173–4186, 2013.

[73] D. S. Ornstein. On the root problem in ergodic theory. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II : Probability theory*, pages 347–356. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.

[74] A. Quas and L. Zamboni. Periodicity and local complexity. *Theoret. Comput. Sci.*, 319(1-3) :229–240, 2004.

[75] M. Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, volume 1294 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1987.

[76] E. A. Robinson, Jr. The dynamical properties of Penrose tilings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(11) :4447–4464, 1996.

[77] E. A. Robinson, Jr. The dynamical theory of tilings and quasicrystallography. In *Ergodic theory of* $\mathbf{Z}^d$ *actions (Warwick, 1993–1994)*, volume 228 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 451–473. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[78] R. M. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Invent. Math.*, 12 :177–209, 1971.

[79] V. Salo. Toeplitz subshift whose automorphism group is not finitely generated. *Colloq. Math.*, 146(1) :53–76, 2017.

[80] V. Salo and I. Törmä. Block maps between primitive uniform and Pisot substitutions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 35(7) :2292–2310, 2015.

[81] S. Schmieding and K. Yang. The mapping class group of a minimal subshift. arXiv :1810.08847.

[82] M. A. Shereshevsky. Lyapunov exponents for one-dimensional cellular automata. *J. Nonlinear Sci.*, 2(1) :1–8, 1992.

[83] L. van den Dries and A. J. Wilkie. Gromov's theorem on groups of polynomial growth and elementary logic. *J. Algebra*, 89(2) :349–374, 1984.

[84] T. Ward. Automorphisms of $\mathbf{Z}^d$-subshifts of finite type. *Indag. Math. (N.S.)*, 5(4) :495–504, 1994.

[85] Susan Williams. Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 67(1) :95–107, 1984.

[86] C. Zinoviadis. Hierarchy and expansiveness in 2D subshifts of finite type. In *Language and automata theory and applications*, volume 8977 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 365–377. Springer, Cham, 2015.

[87] A. Zucker. Minimal flows with arbitrary centralizer. *arXiv e-prints*, page arXiv :1909.08394.

Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées, CNRS-UMR 7352, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint Leu, 80039 Amiens cedex 1, France.

Email address: `samuel.petite@u-picardie.fr`