Deuxième partie

Méthode de décomposition de domaine appliquée aux équations de Saint-Venant

Chapitre 12

Equations de Saint-Venant

Dans ce chapitre nous rappelons comment les équations de Saint-Venant sont obtenues formellement par intégration verticale des équations de Navier Stokes. On pourra se reporter à [45] (Tan Weiyan), [22] (A. E. Gill) ou [39] (J. Pedlosky) pour plus de détails.

Dans un premier temps nous explicitons le système de Saint-Venant sur lequel nous allons travailler. Puis nous mettons en évidence les ondes de Kelvin représentées dans le modèle.

12.1 Equations non hydrostatiques

Dans cette section nous écrivons les équations de Navier-Stokes dans un milieu en rotation et nous rappelons les propriétés de ces lois de conservation.

12.1.1 Lois de conservation

Soit ρ la masse volumique et p la pression du fluide. Nous notons $-g\vec{k}$ le vecteur gravité et si $\vec{V}_{\mathcal{G}} \in \mathbb{R}^3$ désigne la vitesse dans un repère galiléen $\mathcal{G}$, les équations de Navier-Stokes (avec une viscosité nulle) s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{D\vec{V}_{\mathcal{G}}}{Dt} = -\nabla_3 p - \rho g \vec{k}, \\ \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_3 \cdot \vec{V}_{\mathcal{G}} = 0, \end{cases} \tag{12.1}$$

où $\dfrac{D\rho}{Dt}$ représente la dérivée particulaire $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_3 \rho \cdot \vec{V}_{\mathcal{G}}$.

Remarque 4 *∇_3 et $\nabla_3 \cdot$ représentent respectivement les opérateurs gradient et divergence dans $\mathbb{R}^3$. Nous noterons ∇ et $\nabla \cdot$ ces opérateurs dans $\mathbb{R}^2$.*

Puisqu'il est plus naturel de travailler dans un repère lié à la Terre, nous introduisons le référentiel $\mathcal{R}$ $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à $\mathcal{G}$ (voir Figure 12.1). Si $\vec{V}$ désigne la vitesse dans $\mathcal{R}$, la première équation de (12.1) s'écrit :

$$\rho\left(\frac{D\vec{V}}{Dt} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}\right) = -\nabla_3 p - \nabla_3\Phi - \rho g\vec{k}, \tag{12.2}$$

avec $\Phi = \Omega^2 R^2/2$ et R la distance entre la particule et l'axe de rotation. Puisque la force de gravité dérive d'un potentiel, il existe Ψ tel que $-\nabla_3\Phi - \rho g\vec{k} = -\nabla_3\Psi$ et nous récrivons cette quantité $-\rho g\vec{j}$.

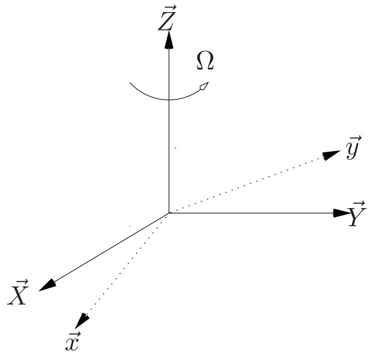


FIG. 12.1 – Référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{G}$

Nous introduisons ensuite un système de coordonnées sphériques qui va permettre de prendre en compte plus facilement les effets de la gravité. Nous introduisons (λ, ϕ, r) les coordonnées correspondant à la longitude, la latitude et la hauteur (voir Figure 12.2). Dans ce nouveau repère, $\vec{V}$ a pour coordonnées (u, v, w) et $\vec{\Omega} = (0,\ \Omega\cos\phi,\ \Omega\sin\phi)$. L'équation (12.2) devient :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\rho\left(\dfrac{Du}{Dt} - \dfrac{uv\tan\phi}{r} + \dfrac{uw}{r}\right) + 2\Omega\rho(w\cos\phi - v\sin\phi) & = & -\dfrac{1}{r\cos\phi}\dfrac{\partial p}{\partial\lambda}, \\
\rho\left(\dfrac{Dv}{Dt} + \dfrac{u^2\tan\phi}{r} + \dfrac{vw}{r}\right) + 2\Omega\rho u\sin\phi & = & -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\phi}, \\
\rho\left(\dfrac{Dw}{Dt} - \dfrac{u^2+v^2}{r}\right) - 2\Omega\rho u\cos\phi & = & -\dfrac{\partial p}{\partial r} - \rho g, \\
\dfrac{D\rho}{Dt} + \dfrac{\rho}{r\cos\phi}(\dfrac{\partial u}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial(v\cos\phi)}{\partial\phi}) + \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 w)}{\partial r} & = & 0,
\end{array}\right. \tag{12.3}$$

avec $\dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{u}{r\cos\phi}\dfrac{\partial}{\partial\lambda} + \dfrac{v}{r}\dfrac{\partial}{\partial\phi} + w\dfrac{\partial}{\partial r}.$

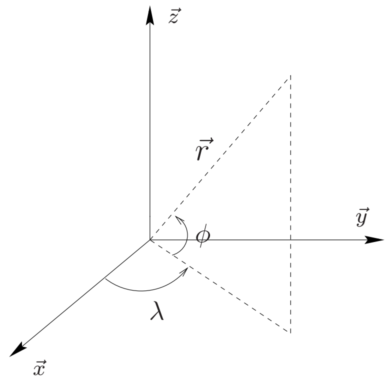


FIG. 12.2 – Système de coordonnées sphériques

12.1.2 Propriétés des lois de conservation

Le système (12.3) possède les propriétés de conservation suivantes :

i. Conservation du moment angulaire :
Le moment angulaire d'une particule de fluide dans un milieu en rotation : $\mathcal{M} = (\Omega + u/R)R^2$ est conservé.

ii. Conservation de l'énergie mécanique :
Pour tout volume V on a $\int_V \frac{d}{dt}\left(u^2 + v^2 + w^2 + gz\right) dV = 0$.

12.2 Equations hydrostatiques

Nous faisons ici quelques hypothèses physiques qui nous permettront d'approcher le système (12.3) et nous précisons les conditions aux limites.

12.2.1 Approximations

Approximation de Boussinesq

Cette approximation consiste à considérer que la densité volumique varie faiblement autour d'une position d'équilibre. Soit ρ_0 la valeur de référence, et $\widehat{\rho}$ la petite perturbation, nous avons :

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \widehat{\rho}(x, y, z, t) \text{ avec } \rho_0 \gg \widehat{\rho}.$$

En introduisant cette décomposition dans l'équation de conservation de la masse $D\rho/Dt + \rho\nabla_3 \cdot \vec{V} = 0$, nous trouvons :

$$\frac{D\widehat{\rho}}{Dt} + \rho_0(\nabla_3 \cdot \vec{V}) + \widehat{\rho}(\nabla_3 \cdot \vec{V}) = 0.$$

L'approximation de Boussinesq qui traduit la faible variation de densité $\hat{\rho}/\rho_0 \ll 1$ nous donne alors l'hypothèse d'incompressibilité $\nabla_3 \cdot \vec{V} = 0$.

Approximations hydrostatiques

Nous étudions la circulation de l'océan dans un volume de hauteur H petit par rapport aux dimensions de la Terre, c.-à-d. nous faisons les approximations géométriques suivantes :

- la coordonnée r est de l'ordre du rayon de la Terre : $r \sim a$.
- la variation de r est de l'ordre de H : $\partial r \sim H$.
- les variations de la longitude et de la latitude sont linéaires : $(\partial\lambda, \partial\phi) \sim \mathcal{O}(1)$.

En utilisant les approximations précédentes et en considérant l'expression de la dérivée particulaire en coordonnées sphériques :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + w\frac{\partial}{\partial r},$$

nous déduisons les adimensionnements suivants :

$$\begin{array}{ccr} u & \sim & U, \\ v & \sim & U, \\ w & \sim & \dfrac{UH}{a}, \\ \partial t & \sim & \dfrac{a}{U}. \end{array}$$

Nous faisons alors une étude adimensionnelle de la troisième équation du système (12.3). En appréciant l'ordre de grandeur de chacun des termes et en négligeant les plus petits, il reste :

$$\frac{\partial p}{\partial r} \sim -\rho g.$$

C'est l'approximation hydrostatique.

Ensuite en divisant les deux premières équations de (12.3) par ρ et en approchant $1/\rho$ par $1/\rho_0$ (approximation de Boussinesq), nous obtenons finalement le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{uv\tan\phi}{r} - \dfrac{uw}{r} - 2\Omega w\cos\phi + 2\Omega v\sin\phi - \dfrac{1}{\rho_0 r\cos\phi}\dfrac{\partial p}{\partial\lambda}, \\ \dfrac{Dv}{Dt} = -\dfrac{u^2\tan\phi}{r} - \dfrac{uw}{r} - 2\Omega u\sin\phi - \dfrac{1}{\rho_0 r}\dfrac{\partial p}{\partial\phi}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = -\rho g, \\ \nabla_3\cdot\vec{V} = 0. \end{array}\right. \tag{12.4}$$

Ce système n'est toutefois pas physiquement acceptable. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe (12.1.2) le moment angulaire et l'énergie cinétique des équations primitives non hydrostatiques sont conservées. Mais les équations (12.4) ne vérifient pas ces propriétés. Or il suffit de négliger le terme en w dans le second membre des deux premières équations, ce qui est cohérent avec la simplification de la troisième où l'on avait négligé le mouvement vertical, pour que l'énergie cinétique soit conservée. Ensuite, si on écrit les équations en un rayon moyen r_E, la conservation du moment angulaire est vérifiée. Nous obtenons alors les équations primitives hydrostatiques :

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{uv\tan\phi}{r_E} + fv - \dfrac{1}{r_E\cos\phi}\dfrac{\partial p'}{\partial\lambda}, \\ \dfrac{Dv}{Dt} = -\dfrac{u^2\tan\phi}{r_E} - fu - \dfrac{1}{r_E}\dfrac{\partial p'}{\partial\phi}, \\ \dfrac{\partial p'}{\partial r} = -\dfrac{\rho}{\rho_0}g, \\ \nabla_3.\vec{V} = 0, \end{cases} \tag{12.5}$$

avec

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r_E\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{r_E}\frac{\partial}{\partial\phi} + w\frac{\partial}{\partial r}, \\ &p' = p/\rho_0, \\ &f = 2\Omega\sin\phi. \end{aligned}$$

Nous récrivons ce système de façon plus compacte, en introduisant la vitesse horizontale $\vec{U} = (u, v)$:

$$\begin{cases} \dfrac{D\vec{U}}{Dt} + f\vec{k}\wedge\vec{U} = -\nabla p', \\ \dfrac{\partial p'}{\partial r} = -g\dfrac{\rho}{\rho_0}, \\ \nabla\cdot\vec{U} + \dfrac{\partial w}{\partial r} = 0. \end{cases} \tag{12.6}$$

Dans la suite nous revenons à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) où la variable z est assimilée à r.

12.2.2 Conditions limites

Nous détaillons ici les conditions aux limites qui sont imposées à la surface de l'eau et au fond. Ici h représente la hauteur de l'eau par rapport à la surface $z = 0$ et η représente la profondeur (voir Figure 12.3).

- Surface libre
  Soit $G(x) = 0$ l'équation de la surface libre d'un fluide en mouvement. Pour une particule située au niveau de cette surface, l'équation $G(x) = 0$ ne varie pas au cours du temps. Du point de vue lagrangien, cela signifie que l'on a $DG/Dt = 0$ sur cette surface.
  Ainsi en $z = h(x, y, t)$, l'équation de la surface libre, nous avons la relation : $Dz/Dt = w = Dh/Dt$ c.-à-d.

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} \text{ en } z = h. \tag{12.7}$$

- Fond
  L'équation du fond s'écrit : $z + \eta(x, y) = 0$ et la condition d'imperméabilité $\vec{V} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$ ($\vec{\mathbf{n}}$ représente le vecteur normal au fond) nous donne :

$$w = -u\frac{\partial \eta}{\partial x} - v\frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ en } z = -\eta. \tag{12.8}$$

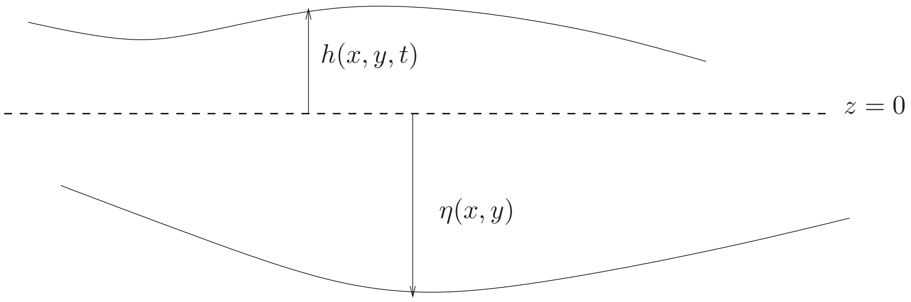


Fig. 12.3 – hauteur et fond de l'eau

12.3 Equations de Saint-Venant linéaires

Puisque nous sommes dans le cas d'un bassin peu profond, nous allons plutôt considérer le mouvement moyen régi par les équations (12.6) que nous allons pour cela intégrer verticalement.

Equations avec termes sources

Dans cette section nous introduisons les termes sources. Nous prenons en compte notamment la force exercée par l'atmosphère au niveau de la surface de l'eau et celle qu'exerce le fond marin sur l'eau. Ces forces font appel à la théorie de la couche limite d'Ekman. Si on exerce une force $\vec{\tau}$ à la surface d'une couche d'épaisseur δz, au niveau de la base de la couche il s'exercera une force $\vec{\tau} - \delta z\, \partial_z \vec{\tau}$ (voir Figure 12.4).

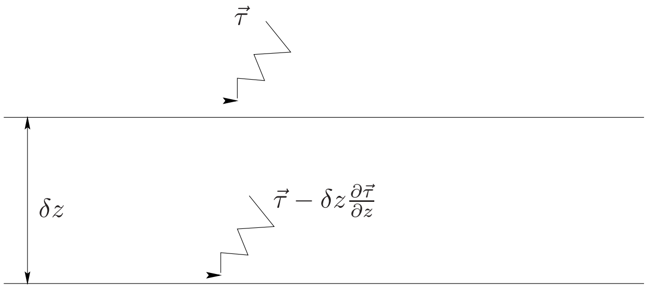


FIG. 12.4 – Couche limite d'Ekman

Nous obtenons alors la force par unité de masse : $\partial_z \vec{\tau}/\rho_0$ que l'on ajoute au second membre de l'équation de quantité de mouvement puisque c'est bien une force qui tend à accélérer le fluide.

Les équations sont donc

$$\begin{cases} \dfrac{D\vec{U}}{Dt} + f\vec{k} \wedge \vec{U} = -\nabla p' + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial p'}{\partial z} = -\dfrac{\rho}{\rho_0} g, \\ \nabla \cdot \vec{U} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{12.9}$$

Equations de Saint-Venant

Puisque nous considérons que le mouvement vertical est de faible amplitude devant le mouvement horizontal, nous allons intégrer verticalement les équations primitives hydrostatiques (12.9) dans le contexte de petites variations. Pour cela, nous écrivons $\vec{U}$ comme la somme de la valeur moyenne et d'une petite perturbation :

$$\vec{U} = \vec{\mathbf{U}}(x, y, t) + \vec{U'}(x, y, z, t) \tag{12.10}$$

avec $\vec{\mathbf{U}}(x, y, t) = \frac{1}{H}\int_{-\eta}^{h} \vec{U}\, dz$ où $H = \eta + h$.

Pour intégrer la première équation de (12.9), il nous faut obtenir une expression de la pression. Pour cela, nous utilisons la deuxième équation de (12.9) :

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_0} g = -g\left(1 + \frac{\widehat{\rho}}{\rho_0}\right).$$

Nous en déduisons que $p' = g(h - z) + \int_h^z \widehat{\rho}/\rho_0 dz$, ou si on néglige les petites variations :

$$p' = g(h - z).$$

A présent nous intégrons verticalement sur la faible épaisseur $[-\eta, h]$ chacun des termes de la première équation de (12.9) ($(X)_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur X) :

i. terme $D\vec{U}/Dt$ (nous prenons en compte la condition $\nabla_3 \cdot \vec{V} = 0$) :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\eta}^{h} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \vec{U} \vec{V} \right)_1 dz \\
= & \int_{-\eta}^{h} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \\
= & \int_{-\eta}^{h} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right) dz \\
= & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\eta}^{h} u dz - \frac{\partial h}{\partial t} u_{|z=h} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\eta}^{h} u^2 dz - \frac{\partial h}{\partial x} u^2_{|z=h} - \frac{\partial \eta}{\partial x} u^2_{|z=-\eta} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\eta}^{h} (uv) dz - \frac{\partial h}{\partial y} uv_{|z=h} - \frac{\partial \eta}{\partial y} uv_{|z=-\eta} + (uw)_{|z=h} - (uw)_{|z=-\eta} \\
= & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\eta}^{h} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\eta}^{h} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\eta}^{h} (uv) dz \\
& - u \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - w \right)_{|z=h} - u \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \right)_{|z=-\eta} \\
= & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\eta}^{h} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\eta}^{h} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\eta}^{h} (uv) dz,
\end{aligned}$$

cette dernière égalité utilise les conditions aux limites (12.7) et (12.8). En reprenant le raisonnement sur la deuxième coordonnée de $D\vec{U}/Dt$ nous trouvons :

$$\int_{-\eta}^{h} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \vec{U} \vec{V} \right) dz = \frac{\partial (H\mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot \int_{-\eta}^{h} (\vec{U} \vec{U}^t) dz.$$

ii. terme en pression :

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{h} \nabla p' dz &= g \left(\int_{-\eta}^{h} \nabla h dz - \int_{-\eta}^{h} \nabla z dz \right) \\
&= g(\nabla \int_{-\eta}^{h} h dz - h \nabla h - h \nabla \eta) - g(\nabla \int_{-\eta}^{h} z dz - h \nabla h + \eta \nabla \eta) \\
&= g(\nabla (Hh) - h \nabla h - h \nabla \eta) - g(h \nabla h - \eta \nabla \eta - h \nabla h + \eta \nabla \eta) \\
&= g(\nabla (Hh) - h \nabla H) \\
&= gH \nabla h.
\end{aligned}$$

iii. termes de forçage :

$$\int_{-\eta}^{h} \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho_0}(\vec{\tau_s} - \vec{\tau_b})$$

où $\vec{\tau_b}$ et $\vec{\tau_s}$ représentent respectivement la tension exercée au niveau de la surface de l'eau et au niveau du fond.

En regroupant les calculs i., ii. et iii. nous obtenons finalement l'équation :

$$\frac{\partial(H\vec{\mathbf{U}})}{\partial t} + \nabla \cdot \int_{-\eta}^{h} (\vec{U}\vec{U}^t) dz + fH\vec{k} \wedge \vec{\mathbf{U}} + gH\nabla\eta = \frac{\vec{\tau_s}}{\rho_0} - \frac{\vec{\tau_b}}{\rho_0}. \tag{12.11}$$

Nous intégrons à présent la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \vec{U} + \partial w/\partial z = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\eta}^{h} \nabla \cdot \vec{U} dz + \int_{-\eta}^{h} \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ = \ & \nabla \cdot \int_{-\eta}^{h} \vec{U} dz - \nabla h \cdot \vec{U}_{|z=h} - \nabla\eta \cdot \vec{U}_{|z=-\eta} + w_{|z=h} - w_{|z=-\eta} \\ = \ & \nabla \cdot (H\vec{\mathbf{U}}) + \frac{\partial h}{\partial t}, \end{aligned}$$

la dernière ligne étant obtenue grâce aux conditions aux limites (12.7) et (12.8).

Grâce à la relation (12.10) nous pouvons approcher le deuxième terme de (12.11) par $\nabla\cdot(H\vec{\mathbf{U}}\vec{\mathbf{U}}^t)$ et nous obtenons finalement les équations de Saint-Venant suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial(H\vec{\mathbf{U}})}{\partial t} + \nabla \cdot (H\vec{\mathbf{U}}\vec{\mathbf{U}}^t) + fH\vec{k} \wedge \vec{\mathbf{U}} + gH\nabla h = \frac{\vec{\tau_s}}{\rho_0} - \frac{\vec{\tau_b}}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right. \tag{12.12}$$

Dans l'étude qui suit nous supposons que la hauteur totale de l'eau varie peu (c.-à-d. H peut être assimilée à une constante), ainsi $\nabla \cdot (H\vec{\mathbf{U}}\vec{\mathbf{U}}^t)$ devient $H\nabla\vec{\mathbf{U}}\vec{\mathbf{U}}$, et ce terme est ensuite linéarisé autour de $\vec{\mathbf{U}} = \vec{0}$. Par ailleurs pour des raisons de stabilité numérique, il est utile d'ajouter de la dissipation au modèle. La force de Coriolis est considérée constante dans la partie théorique et dépendra de l'espace dans la partie numérique. Enfin, nous négligeons la tension du fond marin. Nous travaillerons alors sur les équations de Saint-Venant linéarisées suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial\vec{\mathbf{U}}}{\partial t} + f\vec{k} \wedge \vec{\mathbf{U}} + \frac{g}{H}\nabla h = \frac{\vec{\tau_s}}{\rho_0} - \nu\triangle\vec{\mathbf{U}}, \\ & \frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{12.13}$$

Pour des raisons de compacité d'écriture nous adimensionnons la variable h et nous introduisons $h' = (h - H)/H$. Ceci revient à travailler sur le système précédent avec $H = 1$. Et nous introduisons la variable c telle que $c^2 = gH$. Nous obtenons finalement le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\mathbf{U}}}{\partial t} + f\vec{k} \wedge \vec{\mathbf{U}} + c^2 \nabla h' = \dfrac{\vec{\tau_s}}{\rho_0} - \nu \triangle \vec{\mathbf{U}}, \\ \dfrac{\partial h'}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \tag{12.14}$$

Ce système est très utilisé en météorologie et océanographie, notamment pour des études de processus. Par ailleurs, la dynamique des modèles tridimensionnels très complexes utilisés pour les simulations réalistes (modèles aux équations primitives) peut en fait être décomposée comme la superposition de modes verticaux vérifiant chacun un système de type Saint-Venant. Les équations de Saint-Venant sont donc sous-jacentes à tous les modèles de circulation océanique ou atmosphérique.

12.4 Ondes de Kelvin

Les ondes principales présentes dans le modèle de Saint-Venant sont les ondes de Kelvin. Ces ondes sont solutions du système de Saint-Venant sans viscosité, sans forçage et avec une vitesse méridienne nulle ($v_K = 0$) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_K}{\partial t} + c^2 \dfrac{\partial h_K}{\partial x} = 0, \\ f u_K + c^2 \dfrac{\partial h_K}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial h_K}{\partial t} + \dfrac{\partial u_K}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

En cherchant la solution sous la forme $u_K = e^{\xi x + st} \tilde{u}(y)$ et $h_K = e^{\xi x + st} \tilde{h}(y)$, nous sommes amenés à résoudre le système :

$$\begin{cases} s\tilde{u} + c^2 \xi \tilde{h} = 0, \\ f\tilde{u} + c^2 \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial y} = 0, \\ s\tilde{h} + \xi \tilde{u} = 0. \end{cases}$$

La première et la troisième équation nous donnent une condition nécessaire pour que la solution ne soit pas identiquement nulle : $\xi = \epsilon s/c$, avec $\epsilon = \pm 1$. Nous obtenons également $\tilde{h} = -\epsilon \tilde{u}/c$. La deuxième équation nous donne alors $\partial_y \tilde{u} = f\epsilon \tilde{u}/c$, c.-à-d.

$\tilde{u} = \alpha e^{\epsilon \frac{f}{c} y}$. Or l'hypothèse $f = \beta y$ avec $\beta > 0$ nous indique que $fy > 0$, ainsi en prenant $\epsilon = -1$ nous sommes assurés que la solution n'explose pas avec y. Nous avons alors :

$$u_K = \alpha e^{-\frac{s}{c}x} e^{st} e^{\frac{-\beta y^2}{2c}},$$
$$h_K = \frac{1}{c} \alpha e^{-\frac{s}{c}x} e^{st} e^{\frac{-\beta y^2}{2c}}$$

et nous retrouvons le fait que l'onde de Kelvin est une onde qui se propage d'ouest en est.

Chapitre 13

Equations de Saint-Venant dans l'espace entier

Dans ce chapitre, nous résolvons les équations de Saint-Venant dans l'espace entier $\Omega \equiv \mathbb{R}^2$ c.-à-d. nous résolvons le problème de Cauchy suivant, avec $\mathbf{W}(x,y,t)$ défini pour $(x,y) \in \Omega$ et $t \in]0,T[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = A\dfrac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + B\dfrac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} + C\left(\dfrac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial y^2}\right) + D\mathbf{W} + \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega \times]0,T[, \\ \mathbf{W}(\cdot,\cdot,0) = \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{13.1}$$

avec $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{F}_W = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La force de Coriolis est supposée constante ici et dans les chapitres qui suivent. Nous introduisons $\mathbf{U}$ le vecteur vitesse $(u,v)^t$, $\mathbf{F} = (F_1,F_2)^t$ et nous notons $\mathcal{L}_{SW}$ l'opérateur de Saint-Venant défini par :

$$\mathcal{L}_{SW} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - A\frac{\partial}{\partial x} - B\frac{\partial}{\partial y} - C\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - D.$$

Si nous explicitons les équations en $\mathbf{U}$ et h de ce système, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \nu \triangle \mathbf{U} + c^2 \nabla h + \tilde{D}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{13.2}$$

avec $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$.
Dans la Section 13.1 nous montrons que le problème (13.1) avec un second membre nul est bien posé. Puis grâce au principe de Duhamel, dans la Section 13.2 nous généralisons le résultat au problème non homogène et nous donnons un résultat de régularité pour la solution.

13.1 Problème de Cauchy homogène

Nous étudions ici le problème sans second membre associé à (13.1) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_H & = & 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_H(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{13.3}$$

Nous rappelons dans cette section les théorèmes qui nous donnent l'existence d'une solution à ce problème de Cauchy homogène. On pourra se reporter à [30] (H-O. Kreiss et J. Lorenz) pour plus de détails.
Dans un premier temps nous définissons la transformée de Fourier dans les deux variables de l'espace $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ d'une fonction ϕ de $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\hat{\phi}(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)e^{-i(kx+ly)}\,dx\,dy,$$

et nous prenons la transformée de Fourier de l'équation (13.3). Si $\widehat{\mathbf{W}}_H = (\hat{u}_H, \hat{v}_H, \hat{h}_H)$ désigne la transformée de Fourier de $\mathbf{W}_H = (u_H, v_H, h_H)$, nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{\mathbf{W}}_H}{\partial t} = (ikA + ilB - (k^2+l^2)C + D)\widehat{\mathbf{W}}_H & \text{dans } \mathbb{R}^2\times]0,T[, \\ \widehat{\mathbf{W}}_H(\cdot,\cdot,0) = \widehat{\mathbf{W}}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{13.4}$$

Définition 13.1.1 *La matrice $P(ik,il) = (ikA + ilB - (k^2+l^2)C + D)$ est appelée symbole de l'opérateur différentiel $\mathcal{P}(\partial_x, \partial_y) = A\partial_x + B\partial_y + C(\partial_{xx} + \partial_{yy}) + D$.*

Nous résolvons à présent (13.4) et ce problème admet la solution :

$$\widehat{\mathbf{W}}_H(k,l,t) = \widehat{\mathbf{W}}_0(k,l)e^{P(ik,il)t}.$$

Par transformée de Fourier inverse nous trouvons que la solution de (13.3), si elle existe, est de la forme :

$$\mathbf{W}_H(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(kx+ly)}e^{P(ik,il)t}\widehat{\mathbf{W}}_0(k,l)\,dk\,dl. \tag{13.5}$$

Cette dernière expression nous donne alors un critère pour que le problème (13.3) soit bien posé. C'est l'objet de la définition suivante où $|A|$ désigne la norme de la matrice A définie par $|A| = \max\{|Au|, |u| = 1\}$ avec $|\cdot|$ la norme euclidienne vectorielle.

Définition 13.1.2 *Le problème de Cauchy (13.3) est dit bien posé s'il existe deux constantes K et α telles que*

$$|e^{P(ik,il)t}| \leq Ke^{\alpha t}$$

pour tout $t \geq 0$ et pour tout (k, l) dans $\mathbb{R}^2$.

Cette définition implique que la solution $\mathbf{W}_H$ existe et qu'elle est majorée en norme par la condition initiale.

Ainsi pour montrer que (13.3) est bien posé, il suffit de montrer que la matrice $P(ik, il) = (ikA + ilB - (k^2 + l^2)C + D)$ vérifie cette propriété. Mais la forme de $P(ik, il)$ est difficilement exploitable ; nous utiliserons alors une caractérisation de cette définition. Pour cela nous introduisons le théorème suivant où l'expression $A \leq B$ où A et B sont deux matrices hermitiennes de $\mathbb{C}^{n,n}$, est définie par $\langle u, Au\rangle \leq \langle u, Bu\rangle$ pour tout u dans $\mathbb{C}^n$.

Théorème 13.1.1 *Le problème de Cauchy $u_t = \mathcal{P}(\partial_x, \partial_y)u$ est bien posé si et seulement si pour tout (k, l) de $\mathbb{R}^2$, il existe une matrice hermitienne $H(k, l) \in \mathbb{C}^{2,2}$ avec*

$$K^{-1}\mathcal{I}d \leq H(k,l) \leq K\,\mathcal{I}d \text{ et } H(k,l)P(ik,il) + P^{\star}(ik,il)H(k,l) \leq 2\alpha H(k,l)$$

avec $\mathcal{I}d$ l'opérateur identité dans $\mathbb{C}^{2,2}$, et K, α des constantes indépendantes de k et l.

Ce théorème permet de démontrer le résultat qui suit (on pourra trouver la démonstration de ces deux théorèmes dans [30] (H-O. Kreiss et J. Lorenz)). Nous rappelons que le système $\partial_t u + A\partial_x u = 0$ est dit *fortement hyperbolique* si A est diagonalisable et si ses valeurs propres sont réelles.

Théorème 13.1.2 *Nous considérons le vecteur $\mathbf{W}_H(x, y, t) = (\mathbf{U}_H(x, y, t), h_H(x, y, t))^t$ et l'opérateur différentiel $\mathcal{P}(\partial_x, \partial_y)$ écrit sous la forme :*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{R}_0.$$

Si $\mathcal{P}_1$ est l'opérateur Laplacien, si $\partial_t h_H = \mathcal{P}_2(h_H)$ est un problème fortement hyperbolique, et si les $\mathcal{R}_{j,k}$ sont d'ordre 1 et $\mathcal{R}_0$ d'ordre 0, alors le problème de Cauchy $\partial_t \mathbf{W}_H = \mathcal{P}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{W}_H$ est bien posé au sens de la Définition 13.1.2.

Si $(\cdot,\cdot)_\Omega$ et $\|\cdot\|_\Omega$ désignent le produit scalaire et la norme associée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, nous avons le théorème suivant.

Théorème 13.1.3 *Soit* $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. *Le problème de Cauchy (13.3) est bien posé au sens de la Définition 13.1.2. De plus nous avons l'estimation d'énergie pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$\|\mathbf{W}_H(\cdot,\cdot,t)\|_\Omega^2 \leq C\|\mathbf{W}_0\|_\Omega^2. \tag{13.6}$$

avec C *une constante positive.*

Preuve : Nous appliquons le Théorème 13.1.2. avec $\mathcal{P}_1 \equiv \nu\triangle$, $\mathcal{R}_{11} \equiv 0$, $\mathcal{R}_{12} \equiv -c^2\nabla$, $\mathcal{P}_2 \equiv 0$, $\mathcal{R}_{21} \equiv -\mathrm{div}$ et $\mathcal{R}_0 \equiv \begin{pmatrix} -\tilde{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Nous obtenons alors que (13.3) est bien posé.

Il reste à montrer l'estimation d'énergie. Pour cela nous multiplions scalairement par le vecteur $\mathbf{U}_H$ l'équation

$$\frac{\partial \mathbf{U}_H}{\partial t} - \nu\triangle\mathbf{U}_H + c^2\nabla h_H + \tilde{D}\mathbf{U}_H = 0$$

et nous intégrons le résultat sur Ω. Nous obtenons après intégration par parties et puisque $(\tilde{D}\mathbf{U}_H, \mathbf{U}_H)_\Omega = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{U}_H\|_\Omega^2 + \nu\|\nabla\mathbf{U}_H\|_\Omega^2 - c^2(h_H, \mathrm{div}\mathbf{U}_H)_\Omega = 0. \tag{13.7}$$

Puis en multipliant l'équation $\partial_t h_H + \mathrm{div}\mathbf{U}_H = 0$ par $c^2 h_H$ et en intégrant sur Ω, nous obtenons :

$$\frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\|h_H\|_\Omega^2 + c^2(h_H, \mathrm{div}\mathbf{U}_H)_\Omega = 0. \tag{13.8}$$

En additionnant (13.8) et (13.7) nous trouvons alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{U}_H\|_\Omega^2 + c^2\|h_H\|_\Omega^2\right) + \nu\|\nabla\mathbf{U}_H\|_\Omega^2 = 0. \tag{13.9}$$

Cette relation nous indique d'une part que l'énergie se dissipe sous le seul effet de la viscosité. D'autre part, l'intégration de cette équation sur l'intervalle $]0, t[$ et l'utilisation de la condition initiale nous donne l'estimation (13.6) □

13.2 Problème de Cauchy non homogène

Nous étudions à présent le problème de Cauchy non homogène (13.1). Nous montrons dans un premier temps que ce problème possède une solution (Théorème 13.2.1) puis nous donnons des résultats de régularité (Théorèmes 13.2.2 et 13.2.3).

Théorème 13.2.1 *Soit* $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *et* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. *Le problème de Cauchy non homogène (13.1) possède une solution et elle vérifie l'estimation d'énergie pour tout* $t \geq 0$ *:*

$$\|\mathbf{W}(\cdot,\cdot,t)\|_\Omega^2 \leq C(t)\left(\|\mathbf{W}_0\|_\Omega^2 + \int_0^t \|\mathbf{F}(\cdot,\cdot,\tau)\|_\Omega^2\right).$$

Preuve : Nous introduisons le semi-groupe d'opérateurs $\mathcal{T}(t)$ défini par

$$\mathbf{W}_H(t) = \mathcal{T}(t)\mathbf{W}_0. \tag{13.10}$$

Par ailleurs, le principe de Duhamel (voir [30] (H-O. Kreiss et J. Lorenz)) nous donne :

$$\mathbf{W}(t) = \mathcal{T}(t)\mathbf{W}_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau,$$

et ainsi,

$$\|\mathbf{W}(\cdot,\cdot,t)\|_\Omega \leq \|\mathcal{T}(t)\mathbf{W}_0\|_\Omega + \int_0^t \|\mathcal{T}(t-\tau)\mathbf{F}(\tau)\|_\Omega\, d\tau.$$

Le problème homogène étant bien posé, il existe deux constantes positives α et K telles que $|\mathbf{W}_H|(t) \leq Ke^{\alpha t}|\mathbf{W}_0|$ c.-à-d. $|\mathcal{T}(t)\mathbf{F}| \leq Ke^{\alpha t}|\mathbf{F}|$. Et en utilisant (13.6), nous en déduisons :

$$\|\mathbf{W}(\cdot,\cdot,t)\|_\Omega \leq C\|\mathbf{W}_0\|_\Omega + \max_{0\leq\tau\leq t} e^{\alpha(t-\tau)} \int_0^t \|\mathbf{F}(\cdot,\cdot,\tau)\|_\Omega d\tau,$$

avec C la constante positive donnée par le Théorème 13.1.3.
Ainsi nous avons :

$$\|\mathbf{W}(\cdot,\cdot,t)\|_\Omega^2 \leq \tilde{C}(t)\left(\|\mathbf{W}_0\|_\Omega^2 + \int_0^t \|\mathbf{F}(\cdot,\cdot,\tau)\|_\Omega^2\right),$$

avec $\tilde{C}(t)$ une constante positive qui dépend de t. □

Le théorème suivant nous donne un premier résultat de régularité pour le problème de Cauchy (13.1).

Théorème 13.2.2 *Soit* $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *appartenant à* $\mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *et* $\mathbf{F}$ *appartenant à* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. *Si* $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, h)$ *est la solution de (13.1), alors* $\mathbf{U}$ *appartient à* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega\times]0,T[)$ *et* h *appartient à* $H^{1,1}(\Omega\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h$ *appartenant à* $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,T[)$.

Preuve : Nous reprenons le raisonnement de la preuve du Théorème 13.1.3, c.-à-d. nous multiplions scalairement l'équation d'évolution en $\mathbf{U}$ de (13.2) par $\mathbf{U}$, celle en h par c^2h. Dans le cas du problème non homogène (13.9) devient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathbf{U}\|_\Omega^2 + c^2\|h\|_\Omega^2) + \nu\|\nabla\mathbf{U}\|_\Omega^2 &= (\mathbf{F},\mathbf{U})_\Omega \\ &\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{F}\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{U}\|_\Omega^2.\end{aligned}$$

Cette inégalité est obtenue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par la relation (1.5). Nous intégrons à présent cette relation sur $]0,t[$, $t \leq T$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\|\mathbf{U}\|_\Omega^2(t) + c^2\|h\|_\Omega^2(t)) + \nu\int_0^t \|\nabla\mathbf{U}\|_\Omega^2(\sigma)d\sigma \\ \leq &\frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbf{F}\|_\Omega^2(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbf{U}\|_\Omega^2(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}(\|\mathbf{U}_0\|_\Omega^2 + c^2\|h_0\|_\Omega^2).\end{aligned} \tag{13.11}$$

Soit $\phi(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbf{U}\|_\Omega^2(\sigma)d\sigma$, nous avons alors pour tout $t \leq T$:

$$\phi'(t) \leq K + \phi(t)$$

avec $K = \frac{1}{2}\int_0^T \|\mathbf{F}\|_\Omega^2(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}(\|\mathbf{U}_0\|_\Omega^2 + c^2\|h_0\|_\Omega^2)$.
Le lemme de Gronwall implique que pour tout $t \leq T$, $\phi(t) \leq Ke^T$ c.-à-d. :

$$\frac{1}{2}\int_0^t \|\mathbf{U}\|_\Omega^2(\sigma)d\sigma \leq Ke^T\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|\mathbf{F}\|_\Omega^2(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}(\|\mathbf{U}_0\|_\Omega^2 + c^2\|h_0\|_\Omega^2)\right).$$

Avec les hypothèses $(\mathbf{U}_0, h_0) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, cette dernière inégalité nous donne $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Ensuite, l'inégalité (13.11) nous donne $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))$.

Nous multiplions à présent l'équation en $\mathbf{U}$ par $-\triangle\mathbf{U}$ et celle en h par $-c^2\triangle h$ et nous intégrons sur Ω. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{U}\|_\Omega^2 + \nu\|\triangle\mathbf{U}\|_\Omega^2 - c^2(\nabla h,\triangle\mathbf{U})_\Omega - (\tilde{D}\mathbf{U},\triangle\mathbf{U})_\Omega &= -(\mathbf{F},\triangle\mathbf{U})_\Omega \\ \frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla h\|_\Omega^2 - c^2(\mathrm{div}\mathbf{U},\triangle h)_\Omega &= 0.\end{aligned} \tag{13.12}$$

Par ailleurs, nous avons $(\tilde{D}\mathbf{U}, \triangle\mathbf{U})_\Omega = (-fv, \triangle u)_\Omega + (fu, \triangle v)_\Omega = (f\nabla v, \nabla u)_\Omega - (f\nabla u, \nabla v)_\Omega = 0$ et

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\mathbf{U}, \triangle h)_\Omega &= -\,(\nabla(\mathrm{div}\mathbf{U}), \nabla h)_\Omega \\
&= -\left(\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \nabla h\right)_\Omega - \left(\nabla\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \nabla h\right)_\Omega \\
&= -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial h}{\partial x}\right)_\Omega - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)_\Omega - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial h}{\partial x}\right)_\Omega - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)_\Omega.
\end{aligned}$$

Et par intégrations par parties successives en x et y sur le deuxième et troisième terme de l'expression précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\mathbf{U}, \triangle h)_\Omega &= -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial h}{\partial x}\right)_\Omega - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial h}{\partial x}\right)_\Omega - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)_\Omega - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)_\Omega \\
&= -\,(\triangle\mathbf{U}, \nabla h)_\Omega.
\end{aligned}$$

En additionnant les égalités (13.12) et en appliquant Cauchy-Schwarz et (1.5) au second membre, nous trouvons alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla\mathbf{U}\|^2_\Omega + c^2\|\nabla h\|^2_\Omega) + \nu\|\triangle\mathbf{U}\|^2_\Omega \leq \frac{1}{2\nu}\|\mathbf{F}\|^2_\Omega + \frac{\nu}{2}\|\triangle\mathbf{U}\|^2_\Omega.$$

L'intégration sur $]0, t[$ nous donne alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\|\nabla\mathbf{U}\|^2_\Omega(t) + c^2\|\nabla h\|^2_\Omega(t)) + \frac{\nu}{2}\int_0^t \|\triangle\mathbf{U}\|^2_\Omega(\sigma)d\sigma \\
&\qquad \leq \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|\mathbf{F}\|^2_\Omega(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}(\|\nabla\mathbf{U}_0\|^2_\Omega + \|\nabla h_0\|^2_\Omega).
\end{aligned} \tag{13.13}$$

Puisque $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ est dans $\mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, nous en déduisons que $\mathbf{U}$ est dans $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$. Par ailleurs (13.11) et (13.13) nous donnent $h \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Enfin en utilisant l'équation en $\mathbf{U}$ nous avons $\partial_t\mathbf{U}$ dans $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ et en utilisant l'équation en h nous avons $\partial_t h$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. D'où le résultat :

$$\mathbf{U} \in \mathbf{H}^{2,1}(\Omega\times]0, T[) \quad \text{et} \quad h \in H^{1,1}(\Omega\times]0, T[).$$

Enfin, puisque $\mathbf{U} \in \mathbf{H}^{2,1}(\Omega\times]0, T[)$, $\mathrm{div}\mathbf{U} \in H^{1,1/2}(\Omega\times]0, T[)$ et l'équation en h nous donne alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} \in H^{1,1/2}(\Omega\times]0, T[).$$

□

Le théorème suivant nous donne un résultat de régularité quand les données du problème ont une régularité plus forte que celle considérée dans le Théorème 13.2.2. Cette régularité nous permettra de définir la trace de $\partial_t\mathbf{U}$ sur une interface fictive de Ω.

Théorème 13.2.3 *Soit* $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^3(\Omega)\times H^3(\Omega)$ *et* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega\times]0,T[)$. *Si* $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, h)$ *est la solution de (13.1), alors* $\mathbf{U}$ *est dans* $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega\times]0,T[)$ *et* ∂h *est dans* $H^{3,2}(\Omega\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h$ *dans* $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,T[)$.

Preuve : Les hypothèses de ce théorème vérifient celles du Théorème 13.2.2 et par conséquent $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, h)$ est dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega\times]0,T[) \times H^{1,1}(\Omega\times]0,T[)$ avec ∇h dans $\mathbf{H}^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$.
Nous dérivons chacune des équations du système de Saint-Venant par rapport à x et nous posons $\mathbf{W}_1 = (u_1, v_1, h_1) = (\partial_x u, \partial_x v, \partial_x h)^t$. Grâce à la linéarité de l'équation nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_1(\cdot,\cdot,0) = \dfrac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial x} & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $\partial_x\mathbf{F}$ dans $\mathbf{H}^{1,1/2}(\Omega\times]0,T[)$ (voir Théorème A-3.1), et $\partial_x\mathbf{W}_0$ dans $\mathbf{H}^2(\Omega)$. Nous appliquons alors de nouveau le Théorème 13.2.2 à ce système et nous obtenons $\partial_x\mathbf{U}$ dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$. En refaisant le même raisonnement pour le vecteur $(\partial_y u, \partial_y v, \partial_y h)$, nous obtenons $\partial_y\mathbf{U}$ dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$ et par suite $\mathbf{U}$ est dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^3(\Omega))$
Et puisque $\partial_{xx}\mathbf{F}$, $\partial_{yy}\mathbf{F}$ et $\partial_{xy}\mathbf{F}$ sont dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\partial_{xx}\mathbf{W}_0$, $\partial_{yy}\mathbf{W}_0$ et $\partial_{xy}\mathbf{W}_0$ sont dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, nous pouvons réitérer le processus sur les dérivées d'ordre 2 en x et y du système de Saint-Venant et nous déduisons que $\mathbf{U}$ est dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^4(\Omega))$. De même nous avons h dans $L^2(0,T;H^3(\Omega))$.

Pour la régularité en temps nous dérivons le système de Saint-Venant par rapport à t, c.-à-d. $\mathbf{W}_2 = (u_2, v_2, h_2)^t = (\partial_t u, \partial_t v, \partial_t h)^t$ vérifie le système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_2(\cdot,\cdot,0) = \mathbf{G_0} & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $\partial_t\mathbf{F}$ est dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\mathbf{G_0}$ est défini par :

$$\mathbf{G_0} = \begin{pmatrix} F_1(\cdot,\cdot,0) - \left(-fv_0 - \nu\triangle u_0 + c^2\dfrac{\partial h_0}{\partial x}\right) \\ F_2(\cdot,\cdot,0) - \left(fu_0 - \nu\triangle v_0 + c^2\dfrac{\partial h_0}{\partial y}\right) \\ -\dfrac{\partial u_0}{\partial x} - \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix},$$

avec chacune des composantes de $\mathbf{G_0}$ dans $H^1(\Omega)$.

Toujours par le Théorème 13.2.2, nous obtenons que $\partial_t \mathbf{U}$ est dans $\mathbf{H}^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et par suite $\mathbf{U}$ appartient à $\mathbf{H}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$.
D'autre part nous avons $\partial_t h$ dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ c.-à-d. h est dans $H^2(0,T;L^2(\Omega))$.
Nous en déduisons alors que $\mathbf{U}$ appartient à $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega\times]0,T[)$ et h à $H^{3,2}(\Omega\times]0,T[)$.

Enfin, puisque div$\mathbf{U}$ est dans $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,T[)$, l'équation $\partial_t h + \mathrm{div}\mathbf{U} = 0$ nous donne $\partial_t h$ dans $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,T[)$. $\square$

Chapitre 14

Equations de Saint-Venant dans le demi-plan

Dans ce chapitre nous décomposons Ω en $\Omega^- =]-\infty, L[\times\mathbb{R}$ et $\Omega^+ =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ avec $L \geq 0$, et nous faisons une étude en Fourier-Laplace (Fourier selon la variable y, Laplace selon la variable t) des équations de Saint Venant dans chacun de ces demi-plans. Ceci nous permet d'écrire un système d'équations différentielles ordinaires dont nous obtenons explicitement la solution en Fourier-Laplace. Cette démarche nous sera utile aux chapitres suivants au cours desquels nous considérons différentes conditions aux limites.

Dans la Section 14.1, nous effectuons une transformation de Fourier-Laplace du système de Saint Venant et nous le résolvons dans la Section 14.2. Enfin dans la Section 14.3 nous montrons une propriété des valeurs propres généralisées qui sera utile dans les chapitres suivants.

14.1 Transformée de Fourier-Laplace du système

Soit ϕ une fonction intégrable en espace telle qu'il existe deux constantes strictement positives α et K telles que $|\phi(x, y, t)| \leq Ke^{\alpha t}$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Nous notons $\hat{\phi}$ la transformée de Fourier en y et de Laplace en t de la fonction ϕ :

$$\hat{\phi}(x, \eta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \phi(x, y, t) e^{-(i\eta y + st)} dy\, dt,$$

où $s = \sigma + i\omega$, $\sigma > \alpha > 0$, est la variable de Laplace associée au temps, et η la variable de Fourier associée à la variable d'espace tangentielle y.
Nous considérons les équations de Saint Venant sans terme source et avec une condition initiale nulle, et nous en prenons la transformée de Fourier-Laplace. Nous notons

$\widehat{\mathbf{W}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h})$ la transformée de $\mathbf{W} = (u, v, h)$ et nous obtenons le système :

$$\begin{cases} (s+\nu\eta^2)\hat{u} - f\hat{v} + c^2\dfrac{\partial \hat{h}}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} & = \quad 0, \\ (s+\nu\eta^2)\hat{v} + f\hat{u} + c^2 i\eta\hat{h} - \nu\dfrac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} & = \quad 0, \\ s\hat{h} + i\eta\hat{v} + \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x} & = \quad 0. \end{cases} \tag{14.1}$$

Nous cherchons la solution du système (14.1) sous la forme $\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{\Phi}\ e^{-\xi x}$, avec $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^3$ et nous sommes amenés à résoudre le système suivant :

$$M\mathbf{\Phi} = 0, \tag{14.2}$$

où M est définie par :

$$M(\xi,\eta,s) = \begin{pmatrix} s+\nu\eta^2-\nu\xi^2 & -f & -c^2\xi \\ f & s+\nu\eta^2-\nu\xi^2 & c^2 i\eta \\ -\xi & i\eta & s \end{pmatrix}.$$

Le système (14.2) a une solution non nulle si et seulement si le déterminant de M est nul. Cette condition est réalisée si et seulement si ξ est solution de l'équation bicarrée à coefficients dépendant de s et η suivante :

$$\xi^4 - \left(2\eta^2 + \frac{s}{\nu} + \frac{s^2}{s\nu + c^2}\right)\xi^2 + \frac{s(s^2+f^2)}{\nu(s\nu+c^2)} + \frac{s\eta^2}{\nu} + \eta^4 + \frac{s^2\eta^2}{s\nu+c^2} = 0. \tag{14.3}$$

Nous introduisons :

$$\begin{aligned} \xi_a^2 &= \frac{1}{2}\left(2\eta^2 + \frac{s}{\nu} + \frac{s^2}{s\nu+c^2}\right) + \frac{\sqrt{s^2(c^4-4f^2\nu^2) - 4s\nu f^2 c^2}}{2\nu(s\nu+c^2)}, \\ \xi_b^2 &= \frac{1}{2}\left(2\eta^2 + \frac{s}{\nu} + \frac{s^2}{s\nu+c^2}\right) - \frac{\sqrt{s^2(c^4-4f^2\nu^2) - 4s\nu f^2 c^2}}{2\nu(s\nu+c^2)}, \end{aligned} \tag{14.4}$$

où $\sqrt{X}$ désigne le nombre complexe $i\sqrt{|X|}$ si $X \in \mathbb{R}^-$ ou le nombre complexe de partie réelle positive et dont le carré est X dans les autres cas.

Les solutions de (14.3) sont alors

$$\xi_1 = -\sqrt{\xi_a^2}, \xi_2 = -\sqrt{\xi_b^2}, \text{ et } \xi_3 = -\xi_1,\ \xi_4 = -\xi_2, \tag{14.5}$$

c.-à-d. les parties réelles de ξ_1 et ξ_2 sont négatives et celles de ξ_3, ξ_4 sont positives.

14.2 Résolution du système en Fourier-Laplace

La solution du système (14.1) s'écrit sous la forme :

$$\widehat{\mathbf{W}} = \alpha_1 \mathbf{\Phi}^1 e^{-\xi_1 x} + \alpha_2 \mathbf{\Phi}^2 e^{-\xi_2 x} + \alpha_3 \mathbf{\Phi}^3 e^{-\xi_3 x} + \alpha_4 \mathbf{\Phi}^4 e^{-\xi_4 x},$$

avec les $\mathbf{\Phi}^i$ donnés par

$$\mathbf{\Phi}^i = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fs - i\eta c^2 \xi_i \\ -(s\nu + c^2)\xi_i^2 + s(s+\nu\eta^2) \\ i\eta\,\nu\,{\xi_i}^2 + f\xi_i - i\eta\,(s+\nu\,\eta^2) \end{pmatrix}. \tag{14.6}$$

Soit $\widehat{\mathbf{W}}_\pm$ la solution dans $\Omega_\pm$. Pour que dans chaque sous-domaine la solution soit de carré intégrable en x, nous considérons le signe de la partie réelle des ξ_i, et nous éliminons les termes exponentiellement croissants. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{W}}_- &= \alpha_1 \mathbf{\Phi}^1 e^{-\xi_1 x} + \alpha_2 \mathbf{\Phi}^2 e^{-\xi_2 x} \quad \text{pour } (x,\eta,s) \in]-\infty, L[\times \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \\ \widehat{\mathbf{W}}_+ &= \alpha_3 \mathbf{\Phi}^3 e^{-\xi_3 x} + \alpha_4 \mathbf{\Phi}^4 e^{-\xi_4 x} \quad \text{pour } (x,\eta,s) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Par le Théorème 14.2.1 nous montrons que $\mathbf{\Phi}^1$, $\mathbf{\Phi}^2$ d'une part, et $\mathbf{\Phi}^3$, $\mathbf{\Phi}^4$ d'autre part, ne sont pas colinéaires et qu'ainsi la solution dans chaque sous-domaine est définie à exactement deux constantes près. Ces constantes seront déterminées par les conditions aux limites.

Dans ce qui suit nous posons $\tilde{c} = c^4 - 4f^2\nu^2$.

Théorème 14.2.1 *Si $(\sigma, \omega) \neq (0,0)$ et $(\sigma,\omega) \neq (4\nu f^2 c^2/\tilde{c}, 0)$, alors les vecteurs $\mathbf{\Phi}^1$ et $\mathbf{\Phi}^2$ d'une part et les vecteurs $\mathbf{\Phi}^3$ et $\mathbf{\Phi}^4$ d'autre part ne sont pas colinéaires.*

PREUVE : Nous montrons dans un premier temps que $\mathbf{\Phi}^1$ et $\mathbf{\Phi}^2$ ne sont pas colinéaires. Pour cela nous notons M_i la matrice M prise au point $\xi = \xi_i$. Nous avons par définition :

$$M_1 \mathbf{\Phi}^1 = 0 \quad \text{et} \quad M_2 \mathbf{\Phi}^2 = 0,$$

et si $\mathbf{\Phi}^1$ et $\mathbf{\Phi}^2$ étaient colinéaires, nous aurions $M_1\mathbf{\Phi}^2 = 0$ et $M_2 \mathbf{\Phi}^1 = 0$, et nous allons montrer que ces deux dernières égalités ne peuvent être réalisées. Pour cela nous récrivons l'égalité $M_i \mathbf{\Phi}^i = 0$, $i = 1,2$ sous la forme (voir (14.2)) :

$$(\xi_i^2 P + \xi_i Q + R)\mathbf{\Phi}^i = 0 \tag{14.7}$$

avec $P = \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} s+\nu\eta^2 & -f & 0 \\ f & s+\nu\eta^2 & c^2 i\eta \\ 0 & i\eta & s \end{pmatrix}$,
et ceci nous donne pour $i = 2$:

$$R\mathbf{\Phi}^2 = (-\xi_2^2 P - \xi_2 Q)\mathbf{\Phi}^2,$$

et par suite

$$\begin{aligned} M_1\mathbf{\Phi}^2 &= (\xi_1^2 P + \xi_1 Q + R)\mathbf{\Phi}^2 \\ &= (\xi_1^2 P + \xi_1 Q - \xi_2^2 P - \xi_2 Q)\mathbf{\Phi}^2 \\ &= (\xi_1 - \xi_2)((\xi_1 + \xi_2)P + Q)\mathbf{\Phi}^2. \end{aligned}$$

De même nous avons

$$M_2\mathbf{\Phi}^1 = (\xi_1 - \xi_2)((\xi_1 + \xi_2)P + Q)\mathbf{\Phi}^1.$$

Nous en déduisons que si $\xi_1 \neq \xi_2$ et si $\det((\xi_1 + \xi_2)P + Q) = c^2\nu(\xi_1 + \xi_2) \neq 0$, alors $M_2\mathbf{\Phi}^1 \neq 0$ et $M_1\mathbf{\Phi}^2 \neq 0$ et par suite $\mathbf{\Phi}^1$ et $\mathbf{\Phi}^2$ ne sont pas colinéaires. Nous allons montrer qu'en dehors des points $(\sigma, \omega) = (0, 0)$ et $(\sigma, \omega) = (4\nu f^2 c^2/\tilde{c}, 0)$, ξ_1 est différent de ξ_2 et $\xi_1 + \xi_2$ est non nul.

Nous cherchons d'abord pour quels (η, σ, ω) de $\mathbb{R}^3$, l'égalité $\xi_1 = \xi_2$ est vérifiée. Nous avons $\xi_1 = \xi_2$ si et seulement si $s(s\tilde{c} - 4f^2c^2\nu) = 0$ (voir (14.4)), c.-à-d. si et seulement si

$$s = 0 \text{ ou } s = 4c^2 f^2 \nu/\tilde{c}$$

soit

$$(\sigma, \omega) = (0, 0) \text{ ou } (\sigma, \omega) = (4c^2 f^2\nu/\tilde{c}, 0).$$

D'autre part nous cherchons pour quels (η, σ, ω) de $\mathbb{R}^3$, l'égalité $\xi_1 + \xi_2 = 0$ est réalisée. Pour cela nous montrons les implications et équivalences suivantes :

$$(\xi_1 + \xi_2 = 0) \Rightarrow (\mathcal{R}e(\xi_1) = \mathcal{R}e(\xi_2) = 0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{R}e(\xi_1^2) \leq 0 & \text{et} & \mathcal{R}e(\xi_2^2) \leq 0 \\ \mathcal{I}m(\xi_1^2) = 0 & \text{et} & \mathcal{I}m(\xi_2^2) = 0 \end{pmatrix}. \tag{14.8}$$

En effet, puisque les parties réelles de ξ_1 et ξ_2 sont négatives, une condition nécessaire pour que $\xi_1 + \xi_2$ s'annule est que $\mathcal{R}e(\xi_1) = \mathcal{R}e(\xi_2) = 0$. Puis nous avons

$$\mathcal{R}e(\xi_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{R}e(\xi_1^2) + (\mathcal{R}e(\xi_1^2)^2 + \mathcal{I}m(\xi_1^2)^2)^{1/2}\right)^{1/2},$$

ainsi $\mathcal{R}e(\xi_1)$ ne s'annule qu'à la condition nécessaire et suffisante que $\mathcal{R}e(\xi_1^2) \leq 0$ et $\mathcal{I}m(\xi_1^2) = 0$. De même nous avons $\mathcal{R}e(\xi_2) = 0$ si et seulement si $\mathcal{R}e(\xi_2^2) \leq 0$ et $\mathcal{I}m(\xi_2^2) = 0$. Mais $\mathcal{I}m(\xi_1^2)$ s'écrit sous la forme $\mathcal{I}m(\xi_1^2) = X + Y$ et $\mathcal{I}m(\xi_2^2) = X - Y$, avec (voir (14.4)) :

$$X = \mathcal{I}m\left(\eta^2 + \frac{s}{2\nu} + \frac{s^2}{2(s\nu + c^2)}\right) \text{ et } Y = \mathcal{I}m\left(\frac{\sqrt{s^2\tilde{c} - 4s\nu f^2 c^2}}{2\nu(s\nu + c^2)}\right).$$

Ainsi, dire que les parties imaginaires de ξ_1^2 et ξ_2^2 sont nulles revient à dire que $X = 0$ et $Y = 0$. Or $X = 0$ revient à :

$$\omega\left(\frac{1}{2\nu} + \frac{2\sigma(c^2+\sigma\nu)+\nu(\omega^2-\sigma^2)}{2((c^2+\sigma\nu)^2+\omega^2\nu^2)}\right) = 0,$$

$$\text{c.-à-d. } \omega\left(\frac{c^4+2\sigma^2\nu^2+4\sigma\nu c^2+2\nu^2\omega^2}{2((c^2+\sigma\nu)^2+\omega^2\nu^2)}\right) = 0,$$

et nous en déduisons alors puisque $\sigma \geq 0$ que X est nul si et seulement si $\omega = 0$. Or la partie Y avec $\omega = 0$ s'écrit :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tilde{c}\sigma - 4\nu f^2 c^2 \geq 0, \\ \dfrac{\sqrt{|\tilde{c}\sigma^2 - 4\nu\sigma f^2 c^2|}}{2\nu(\sigma\nu + c^2)} & \text{si} \quad \tilde{c}\sigma - 4\nu f^2 c^2 < 0. \end{cases}$$

Ainsi quand $\omega = 0$ et dans le cas où $\tilde{c}$ est positif, Y est identiquement nul si $\sigma \geq 4\nu f^2 c^2/\tilde{c}$ ou si $\sigma = 0$. Et dans le cas où $\tilde{c}$ est négatif, Y est identiquement nul pour $\sigma = 0$ ou $\sigma = 4\nu f^2 c^2/\tilde{c}$.

Nous avons donc montré que si $\tilde{c} > 0$:

$$\big(\mathcal{I}m(\xi_1^2) = \mathcal{I}m(\xi_2^2) = 0\big) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \omega = 0 \text{ et} \\ \sigma \in [4\nu f^2 c^2/\tilde{c}, +\infty[\cup \{0\} \end{array}\right),$$

et si $\tilde{c} \leq 0$:

$$\big(\mathcal{I}m(\xi_1^2) = \mathcal{I}m(\xi_2^2) = 0\big) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \omega = 0 \text{ et} \\ \sigma \in \{4\nu f^2 c^2/\tilde{c}\} \cup \{0\} \end{array}\right).$$

Or si $\omega = 0$ nous avons

$$\mathcal{R}e(\xi_1^2) = \eta^2 + \frac{\sigma}{2\nu} + \frac{\sigma^2}{2(\sigma\nu + c^2)} + E \text{ avec } E = \mathcal{R}e\left(\frac{\sqrt{\sigma^2\tilde{c} - 4\sigma\nu f^2 c^2}}{2\nu(\sigma\nu + c^2)}\right),$$

et $E \geq 0$ car E a le signe de la partie réelle d'une racine complexe. Ceci signifie que quand $\omega = 0$, pour tout $\sigma > 0$ la partie réelle de ξ_1^2 est strictement positive. Et quand $\sigma = 0$ la partie réelle de ξ_1^2 s'annule pour $\eta = 0$.

Pour résumer, en dehors du point $(\sigma, \eta, \omega) = (0, 0, 0)$ nous ne pouvons pas avoir à la fois $\mathcal{I}m(\xi_1^2) = \mathcal{I}m(\xi_2^2) = 0$ et $\mathcal{R}e(\xi_1^2) \leq 0$. Et grâce à (14.8) nous concluons que dans ce cas, l'égalité $\xi_1 + \xi_2 = 0$ ne peut pas avoir lieu.

Nous concluons du raisonnement précédent que pour $(\sigma, \omega) \neq (0, 0)$ et $(\sigma, \omega) \neq (4\nu f^2 c^2/\tilde{c}, 0)$ nous avons $\xi_1 \neq \xi_2$ et $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$, et nous avons vu que cela signifie que les vecteurs $\mathbf{\Phi}^1$ et $\mathbf{\Phi}^2$ ne sont pas colinéaires. Un raisonnement analogue s'applique aux vecteurs $\mathbf{\Phi}^3$ et $\mathbf{\Phi}^4$. $\square$

Nous dissocions à présent les variables $\mathbf{U}_\pm = (u_\pm, v_\pm)$ et $h_\pm$ et nous écrivons d'une part (voir (14.1)) :

$$\begin{aligned}
\hat{h}_- &= -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_-}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_- \quad \text{pour } (x,\eta,s) \in]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
\hat{h}_+ &= -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_+}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_+ \quad \text{pour } (x,\eta,s) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{U}}_- &= M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}x}\boldsymbol{\alpha} \quad \text{pour } (x,\eta,s) \in]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
\widehat{\mathbf{U}}_+ &= M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}x}\boldsymbol{\beta} \quad \text{pour } (x,\eta,s) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},
\end{aligned} \tag{14.9}$$

$$\begin{aligned}
&\text{avec} \quad M_{12} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix},\ \underline{e}^{-\xi_{12}x} = \begin{pmatrix} e^{-\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-\xi_2 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},\\
&\text{et} \quad M_{34} = \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix},\ \underline{e}^{\xi_{12}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{14.10}$$

où les A_i, B_i et C_i sont définies en (14.6). Le théorème suivant qui est une conséquence du Théorème 14.2.1, nous indique que les matrices M_{12} et M_{34} sont inversibles.

Théorème 14.2.2 *Si $(\sigma,\omega) \neq (0,0)$ et $(\sigma,\omega) \neq (4\nu f^2c^2/\tilde{c}, 0)$, alors les vecteurs (A_1, B_1) et (A_2, B_2) ne sont pas colinéaires.*

PREUVE : Nous raisonnons par l'absurde. Nous supposons que les vecteurs (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont colinéaires. Nous avons alors $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ et cela signifie que l'on peut trouver une constante λ telle que $B_1 = \lambda B_2$ et $A_1 = \lambda A_2$.

Par ailleurs la troisième équation de (14.2) nous donne :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{s}(\xi_1 A_1 - i\eta B_1),\\
C_2 &= \frac{1}{s}(\xi_2 A_2 - i\eta B_2).
\end{aligned}$$

Ceci nous conduit à $C_1 = \lambda C_2$ et par suite nous obtenons $(A_1, B_1, C_1) = \lambda(A_2, B_2, C_2)$. Mais ceci est en contradiction avec le Théorème 14.2.1 qui nous indiquait que les vecteurs (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2) ne sont pas liés.

Nous obtenons donc $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ et nous en déduisons le résultat du théorème. $\square$

14.3 Propriété des valeurs propres généralisées

Nous étudions ici le comportement de ξ_1 et ξ_2 quand σ tend vers l'infini.

Lemme 14.3.1 *Si $f\nu c \neq 0$ alors les parties réelles de ξ_1 et ξ_2 tendent uniformément vers $-\infty$ quand la partie réelle σ de la variable de Laplace s, tend vers l'infini.*

Preuve : Dans un premier temps, nous étudions les parties réelles de ξ_1^2 et ξ_2^2. Pour cela nous développons (14.4) :

$$\begin{aligned}\xi_{1,2}^2 = \; & \frac{\sigma}{2\nu} + \eta^2 + \frac{(\sigma^2-\omega^2)(\sigma\nu+c^2)+2\omega^2\sigma\nu}{2((\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2)} \pm \frac{1}{2\nu}\left(\frac{(\sigma\nu+c^2)R+\nu\omega I}{(\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2}\right) \\ & + i\left(\frac{\omega}{2\nu} + \frac{2\sigma\omega(\sigma\nu+c^2)+\nu\omega(\omega^2-\sigma^2)}{2((\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2)} \pm \frac{1}{2\nu}\left(\frac{(\sigma\nu+c^2)I-\nu\omega R}{(\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2}\right)\right)\end{aligned} \tag{14.11}$$

avec si on pose $\tilde{c} = c^4 - 4\nu^2 f^2$:

$$\begin{aligned} R = \; & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{c}(\sigma^2-\omega^2) - 4\nu f^2c^2\sigma + \sqrt{(\tilde{c}(\sigma^2-\omega^2)-4\nu f^2c^2\sigma)^2 + 4\omega^2(\sigma\tilde{c}-2f^2c^2\nu)^2}\right)^{1/2} \\ I = \; & \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(-\tilde{c}(\sigma^2-\omega^2) + 4\nu f^2c^2\sigma + \\ & \sqrt{(\tilde{c}(\sigma^2-\omega^2)-4\nu f^2c^2\sigma)^2 + 4\omega^2(\sigma\tilde{c}-2f^2c^2\nu)^2}\Bigg)^{1/2} \operatorname{sign}(\omega(\sigma\tilde{c}-2f^2c^2\nu)). \end{aligned} \tag{14.12}$$

Nous avons alors $\mathcal{R}e(\xi_{1,2}^2) = \eta^2 + f_1(\sigma,\omega) + f_2(\sigma,\omega) \pm \frac{1}{2\nu}f_3(\sigma,\omega) \pm \frac{1}{2\nu}f_4(\sigma,\omega)$ avec

$$\begin{aligned} f_1(\sigma,\omega) &= \frac{\sigma}{2\nu}, \\ f_2(\sigma,\omega) &= \frac{(\sigma^2-\omega^2)(\sigma\nu+c^2)+2\omega^2\sigma\nu}{2((\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2)}, \\ f_3(\sigma,\omega) &= \frac{(\sigma\nu+c^2)R}{(\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2}, \\ f_4(\sigma,\omega) &= \frac{\nu\omega I}{(\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que les parties réelles de ξ_1^2 et ξ_2^2 tendent vers l'infini quand σ tend vers l'infini, et ce, de manière uniforme en ω. Pour cela nous établissons successivement les assertions i., ii., iii. et iv. qui montrent que f_1, f_2, f_3 et f_4 vérifient également cette propriété.

i. De manière évidente, f_1 tend vers l'infini avec σ, de façon uniforme en ω.

ii. Nous étudions à présent f_2.

$$f_2(\sigma,\omega) = \frac{(\sigma^2-\omega^2)(\sigma\nu+c^2)+2\omega^2\sigma\nu}{2((\sigma\nu+c^2)^2+\nu^2\omega^2)} = \frac{1}{2}\frac{\omega^2(\sigma\nu-c^2)+\sigma^2(\sigma\nu+c^2)}{\nu^2\omega^2+(\sigma\nu+c^2)^2}.$$

Nous avons

$$\frac{\partial f_2}{\partial \omega} = \frac{-\omega c^4(\sigma\nu+c^2)}{(\nu^2\omega^2+(\sigma\nu+c^2)^2)^2},$$

ainsi à σ fixé, f_2 est croissante pour $\omega \in]-\infty,0[$ et décroissante pour $\omega \in]0,+\infty[$. Par ailleurs quand $|\omega|$ tend vers $+\infty$, f_2 tend vers $(\sigma\nu-c^2)/2\nu^2$ (voir le tableau de variations (14.1)). La fonction f_2 se trouve alors dans la bande $[(\sigma\nu-c^2)/2\nu^2, \sigma^2/2(\sigma\nu+c^2)]$ pour tout ω. Nous obtenons alors que $f_2(\sigma,\cdot)$ converge uniformément vers $+\infty$ quand σ tend vers l'infini.

ω	$-\infty$		0		$+\infty$
f_2			$\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\sigma\nu+c^2}$		
	$\frac{1}{2}\frac{\sigma\nu-c^2}{\nu^2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2}\frac{\sigma\nu-c^2}{\nu^2}$

Tab. 14.1 – Tableau de variations de f_2

iii. Nous étudions à présent

$$f_3(\sigma,\omega) = \frac{(\sigma\nu+c^2)R}{(c^2+\sigma\nu)^2+\nu^2\omega^2}.$$

Dans un premier temps nous étudions R qui a été défini en (14.12) et nous récrivons R^2 sous la forme

$$R^2 = \frac{1}{2}\left(-\tilde{c}\omega^2+G_1+\sqrt{(-\tilde{c}\omega^2+G_1)^2+4\omega^2G_2}\right),$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{avec} & G_1 & = & \sigma(\sigma\tilde{c}-4\nu f^2c^2), \\ & G_2 & = & (\sigma\tilde{c}-2f^2c^2\nu)^2, \\ & \tilde{c} & = & c^4-4\nu^2 f^2. \end{array} \qquad (14.13)$$

Nous avons

$$\frac{\partial R^2}{\partial \omega} = \omega \frac{-\tilde{c}\sqrt{(-\tilde{c}\omega^2 + G_1)^2 + 4\omega^2 G_2} + \tilde{c}^2\omega^2 + 2G_2 - \tilde{c}G_1}{\sqrt{(-\tilde{c}\omega^2 + G_1)^2 + 4\omega^2 G_2}},$$

c.-à-d. $\partial_\omega R^2$ s'annule en $\omega = 0$ et chercher les autres zéros de $\partial_\omega R^2$ revient à résoudre :

$$\tilde{c}\sqrt{(-\tilde{c}\omega^2 + G_1)^2 + 4\omega^2 G_2} = \tilde{c}^2\omega^2 + 2G_2 - \tilde{c}G_1. \tag{14.14}$$

En élevant au carré l'expression (14.14) nous trouvons après simplifications :

$$4G_2(G_2 - \tilde{c}G_1) = 0.$$

Or $G_2 - \tilde{c}G_1 = 4f^4c^4\nu^2 \neq 0$ et $G_2 \neq 0$ si $\sigma \neq 2f^2c^2\nu/\tilde{c}$.
En conclusion, $\partial_\omega R^2$ ne s'annule qu'en $\omega = 0$ si $\sigma \neq 2f^2c^2\nu/\tilde{c}$. Par ailleurs $\partial_\omega R^2$ a le signe de $\omega(-\tilde{c}\sqrt{(-\tilde{c}\omega^2 + G_1)^2 + 4\omega^2 G_2} + \tilde{c}^2\omega^2 + 2G_2 - \tilde{c}G_1)$. Or $2G_2 - \tilde{c}G_1 = \sigma^2\tilde{c}^2 - 4\sigma\tilde{c}\nu f^2c^2 + 8\nu^2 f^4c^4 \geq 0$ pour tout $\sigma > 0$. Ainsi dans le cas où $\tilde{c}$ est négatif, $\partial_\omega R^2$ a de façon évidente le signe de ω. Et dans le cas où $\tilde{c}$ est positif $(-\tilde{c}\sqrt{(-\tilde{c}\omega^2 + G_1)^2 + 4\omega^2 G_2} + \tilde{c}^2\omega^2 + 2G_2 - \tilde{c}G_1)$ est positif quand $4G_2(G_2 - \tilde{c}G_1)$ l'est également, c.-à-d. pour n'importe quelle valeur de ω. Nous en déduisons que $\partial_\omega R^2$ a le signe de ω et nous pouvons dresser le tableau de variations de la fonction R^2 (Tableau 14.2). Ainsi nous avons $0 \leq R \leq \sqrt{G_2}/\sqrt{\tilde{c}}$.

ω	$-\infty$		0		$+\infty$
R^2	$\frac{G_2}{\tilde{c}}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(G_1 + \lvert G_1 \rvert)$	$\nearrow$	$\frac{G_2}{\tilde{c}}$

TAB. 14.2 – Tableau de variations de R^2

Ensuite nous écrivons

$$0 \leq \frac{1}{(c^2 + \sigma\nu)^2 + \nu^2\omega^2} \leq \frac{1}{(c^2 + \sigma\nu)^2} \quad \forall\, (\sigma, \omega) \in \mathbb{R}^2,$$

puis

$$0 \leq \frac{R(c^2 + \sigma\nu)}{(\sigma\nu + c^2)^2 + \nu^2\omega^2} \leq \sqrt{\frac{G_2}{\tilde{c}}} \frac{1}{c^2 + \sigma\nu} \quad \forall\, (\sigma, \omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous avons alors :

$$0 \leq f_3(\sigma, \omega) \leq \frac{|\sigma\tilde{c} - 2f^2c^2\nu|}{\sqrt{\tilde{c}}} \frac{1}{c^2 + \sigma\nu} \quad \forall\, (\sigma, \omega) \in \mathbb{R}^2,$$

et nous en déduisons que f_3 reste bornée uniformément en ω quand σ tend vers l'infini.

iv. Enfin nous traitons le terme

$$f_4 = \frac{\nu\omega I}{(c^2+\sigma\nu)^2+\nu^2\omega^2}.$$

Nous montrons dans un premier temps que la quantité $|I|/|\sqrt{1+\omega^2}|$ est bornée par une constante indépendante de ω et σ. Ce qui signifie que nous cherchons une constante $C > 0$ telle que

$$I^2 \leq C(1+\omega^2). \tag{14.15}$$

Avec G_1 et G_2 définis en (14.13), nous avons :

$$I^2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{c}\omega^2 - G_1 + \sqrt{(-\tilde{c}\omega^2+G_1)^2+4\omega^2 G_2}\right),$$

et (14.15) s'écrit :

$$\frac{1}{2}(\tilde{c}\omega^2 - G_1 + \sqrt{\tilde{c}^2\omega^4 + 2(2G_2 - \tilde{c}G_1)\omega^2 + G_1^2}) \leq C(1+\omega^2),$$

ou encore

$$\sqrt{\tilde{c}^2\omega^4 + 2(2G_2 - \tilde{c}G_1)\omega^2 + G_1^2} \leq 2(C + \frac{1}{2}G_1) + (2C - \tilde{c})\omega^2.$$

En prenant le carré de cette expression et en réarrangeant les termes, nous trouvons :

$$(\tilde{c}^2 - (2C-\tilde{c})^2)\omega^4 + 2(2G_2 - 4C^2 + 2C\tilde{c} - 2CG_1)\omega^2 - 4C(C+G_1) \leq 0.$$

En prenant $C = \alpha\tilde{c}$, cette expression devient :

$$\phi_1\omega^4 + \phi_2\omega^2 + \phi_3 \leq 0 \tag{14.16}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = -4\,\alpha\,\tilde{c}^2\,(\alpha-1)\,,\\
&\phi_2 = \left(-4\,\tilde{c}^2\,(\alpha-1)\,\sigma^2 + 16\,\tilde{c}\nu\,f^2c^2\,(\alpha-1)\,\sigma + 4\,\alpha\,\tilde{c}^2 + 16\,\nu^2 f^4 c^4 - 8\,\alpha^2\tilde{c}^2\right),\\
&\phi_3 = -4\,\alpha\,\tilde{c}^2\sigma^2 + 16\,\alpha\,\tilde{c}\sigma\,\nu\,f^2c^2 - 4\,\alpha^2\tilde{c}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi en choisissant $\alpha \geq 1$, nous avons ϕ_1 négatif. Ensuite le discriminant de ϕ_2 vu comme un polynôme en σ vaut $64\;(-2\,\alpha\,\tilde{c}^2 + \tilde{c}^2 + 4\,\nu^2 f^4 c^4)\,\alpha\;(\alpha-1)\,\tilde{c}^2$.

Donc en imposant en plus $\alpha \geq (\tilde{c}^2 + 4\nu^2 f^4 c^4)/2\tilde{c}^2$, nous avons ϕ_2 négatif pour tout σ. Enfin le discriminant de ϕ_3 vu comme un polynôme de σ vaut $64\,\alpha^2\tilde{c}^2\,(-\alpha\,\tilde{c}^2 + 4\,\nu^2 f^4 c^4)$. Et en prenant $\alpha \geq 4\nu^2 f^4 c^4/\tilde{c}^2$, nous avons ϕ_3 négatif pour tout σ.
Ainsi, en choisissant $\alpha = \alpha_0 = \max(1, 4\nu^2 f^4 c^4/\tilde{c}^2, (\tilde{c}^2 + 4\nu^2 f^4 c^4)/2\tilde{c}^2)$, l'expression (14.16) est négative pour tout ω et par suite (14.15) est réalisée avec $C = \alpha_0\tilde{c}$. Nous avons alors :

$$\left|\frac{I}{\sqrt{1+\omega^2}}\right| \leq \sqrt{\alpha_0\tilde{c}}.$$

A présent nous introduisons $G_3 = (c^2 + \sigma\nu)^2 > 0$ et nous décomposons f_4 sous la forme :

$$\begin{aligned} f_4(\sigma,\omega) &= \frac{I}{\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\nu\omega\sqrt{1+\omega^2}}{G_3 + \nu^2\omega^2}, \\ &= \frac{I}{\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\nu}{G_3}\tilde{f}_4(\omega), \end{aligned}$$

avec $\tilde{f}_4(\omega) = \dfrac{\omega\sqrt{1+\omega^2}}{1+\lambda\omega^2}$ et $\lambda = \dfrac{\nu^2}{G_3}$. Nous avons :

$$\frac{\partial\tilde{f}_4}{\partial\omega} = \frac{-(\lambda-2)\omega^2 + 1}{\sqrt{\omega^2+1}(1 + 2\omega^2\lambda + \omega^4\lambda^2)},$$

et nous considérons les deux cas :
Si $\lambda - 2 \leq 0$ alors $\partial_\omega\tilde{f}_4(\omega) \geq 0$ pour tout ω c.-à-d. $\tilde{f}_4$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Et en considérant sa limite à l'infini, nous avons $|\tilde{f}_4(\omega)| \leq 1/\lambda$.
Si $\lambda - 2 > 0$ alors $\partial_\omega\tilde{f}_4(\omega) = 0$ pour $\omega = \omega_{1,2} = \pm 1/\sqrt{\lambda - 2}$. Et $|\tilde{f}_4(\omega)| \leq \max(1/|\lambda|, |\tilde{f}_4(\omega_1)|, |\tilde{f}_4(\omega_2)|)$.
Pour résumer nous avons :

$$\begin{cases} \text{si } \dfrac{\nu^2}{2} \leq (c^2+\sigma\nu)^2 \text{ alors } |\tilde{f}_4| \leq \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{G_3}{\nu^2}, \\ \text{si } \dfrac{\nu^2}{2} \geq (c^2+\sigma\nu)^2 \text{ alors } |\tilde{f}_4| \leq \max(|\dfrac{1}{\lambda}|, |\tilde{f}_4(\omega_1)|, |\tilde{f}_4(\omega_2)|). \end{cases}$$

Ainsi pour σ tel que $\dfrac{\nu^2}{2} \leq (c^2+\sigma\nu)^2$ nous avons

$$|f_4(\sigma,\omega)| \leq \left|\frac{I}{\sqrt{1+\omega^2}}\right|\frac{\nu}{G_3}|\tilde{f}_4(\omega)| \leq \frac{\sqrt{\alpha_0\tilde{c}}}{\nu}.$$

Nous avons alors montré que f_4 est bornée uniformément en ω et η quand σ tend vers l'infini.

Les résultats i., ii., iii. et iv. montrent que f_1, f_2, f_3 et f_4 tendent vers l'infini avec σ, uniformément en η et ω. Or puisque nous avons :

$$\begin{aligned} -\mathcal{R}e(\xi_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{R}e(\xi_1^2)+\sqrt{\mathcal{R}e(\xi_1^2)^2+\mathcal{I}m(\xi_1^2)^2}\right)^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_1+f_2+\frac{1}{2\nu}(f_3+f_4)+\sqrt{(f_1+f_2+\frac{1}{2\nu}(f_3+f_4))^2}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

nous obtenons que $\mathcal{R}e(\xi_1)$ converge uniformément vers $-\infty$ quand σ tend vers l'infini.

□

Chapitre 15

Algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes

Nous résolvons à présent les équations de Saint-Venant par méthode de décomposition de domaine. Dans ce chapitre nous étudions la généralisation de l'algorithme de Schwarz classique au problème en temps comme nous l'avons fait dans la partie I, Chapitre 2.

Cette méthode nécessite un recouvrement et nous découpons ainsi le domaine Ω en deux sous-domaines $\Omega_- =]-\infty, L[\times\mathbb{R}$ et $\Omega_+ =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et nous notons les interfaces $\Gamma_L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = L\}$ et $\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ (voir la Figure 15.1).

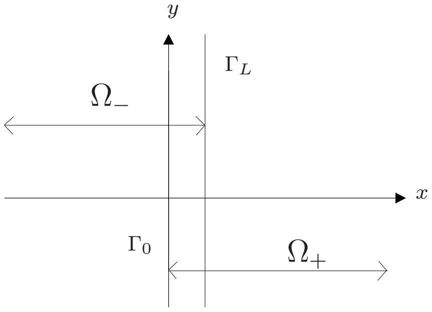


FIG. 15.1 – Décomposition du domaine $\mathbb{R}^2$ avec recouvrement

Dans ce qui suit $\mathbf{W}_\pm$ désigne l'inconnue $(u_\pm, v_\pm, h_\pm)$ dans $\Omega_\pm$ et $\mathbf{U}_\pm$ le vecteur vitesse $(u_\pm, v_\pm)$.

Nous proposons ici l'algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}_-^{k+1} & = \mathbf{F}_W \quad \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_-^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = \mathbf{W}_0 \quad \text{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U}_-^{k+1} & = \mathbf{U}_+^k \quad \text{sur } \Gamma_L\times]0,T[, \end{cases} \tag{15.1}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}_+^{k+1} & = \mathbf{F}_W \quad \text{dans } \Omega_+\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_+^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = \mathbf{W}_0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ \mathbf{U}_+^{k+1} & = \mathbf{U}_-^k \quad \text{sur } \Gamma_0\times]0,T[. \end{cases} \tag{15.2}$$

Dans la Section 15.1 nous étudions les problèmes aux limites qui sont impliqués dans cet algorithme et montrons qu'ils sont bien posés. Ceci nous permet alors de définir plus précisément l'algorithme dans la Section 15.2. Puis dans la Section 15.3 nous montrons que cet algorithme converge.

15.1 Etude des problèmes aux limites

Nous étudions ici les problèmes aux limites impliqués dans l'algorithme (15.1), (15.2). Les deux problèmes étant identiques, nous étudions le problème dans Ω_- :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W} & = \mathbf{F}_W \quad \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}(\cdot,\cdot,0) & = \mathbf{W}_0 \quad \text{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U} & = \mathbf{g} \quad \text{sur } \Gamma_L\times]0,T[, \end{cases} \tag{15.3}$$

avec $\mathbf{F}_W = (F_1, F_2, 0)^t = (\mathbf{F}, 0)^t$.

Le théorème suivant nous donne un résultat d'existence, d'unicité et de régularité pour le problème aux limites (15.3).

Théorème 15.1.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-))$, $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-)$ *et* $\mathbf{g}$ *dans* $\mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma_L\times]0,T[)$. *Si la relation de compatibilité*

$$\mathbf{g}(\cdot,0) = \mathbf{U}_0(L,\cdot) \quad \textit{sur } \Gamma_L, \tag{15.4}$$

est vérifiée, alors le problème aux limites (15.3) possède une unique solution $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, h)$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[) \times H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h$ *dans* $H^{1,1/2}(\Omega_-\times]0,T[)$.

PREUVE : La démonstration de ce théorème se fait en deux temps. Nous montrons premièrement que le système écrit en variables de Fourier-Laplace possède une solution. Puis nous revenons aux variables initiales et montrons la régularité par estimations d'énergie.

Nous considérons dans un premier temps le problème sans second membre et avec une condition initiale nulle. Pour cela nous introduisons $\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_{\text{cauchy}} - \mathbf{W}$ où $\mathbf{W}_{\text{cauchy}}$ est la solution du problème de Cauchy (13.1) dont la régularité est donnée par le Théorème 13.2.2. $\mathbf{W}_c$ vérifie :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_c & = & 0 & \text{dans } \Omega_- \times]0,T[, \\ \mathbf{W}_c(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U}_c & = & \mathbf{g}_c & \text{sur } \Gamma_L \times]0,T[, \end{cases} \tag{15.5}$$

avec $\mathbf{g}_c = \mathbf{U}_{\text{cauchy}}(L,\cdot,\cdot) - \mathbf{g} \in \mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma_L \times]0,T[)$ (voir le Théorème A-3.2).

Comme nous l'avons fait au Chapitre 14, nous prenons la transformée de Fourier-Laplace de l'équation de Saint-Venant homogène puis nous la résolvons. Puisque $\mathbf{W}_c$ est défini dans Ω_- nous avons (voir (14.9)) :

$$\widehat{\mathbf{U}}_c = M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}x}\boldsymbol{\alpha} \text{ et } \hat{h}_c = -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_c}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_c.$$

La condition $\mathbf{U}_c = \mathbf{g}_c$ sur $\Gamma_L \times]0,T[$ s'écrit alors en Fourier-Laplace :

$$M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}L}\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{g}}_c. \tag{15.6}$$

Or du Théorème 14.2.2 nous déduisons que si $\sigma \neq 0$ et $\sigma \neq 4\nu f^2 c^2/\tilde{c}$ alors $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ et par conséquent M_{12} est inversible. Par suite, la relation (15.6) définit un unique $\boldsymbol{\alpha}$ et nous trouvons l'unique solution du problème homogène (15.5) écrit en Fourier-Laplace :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}}_c &= M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}(x-L)}M_{12}^{-1}\hat{\mathbf{g}}_c, \\ \hat{h}_c &= -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_c}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_c. \end{aligned}$$

Par conséquent le problème en Fourier-Laplace correspondant à (15.3) possède une unique solution.

Nous revenons à présent à la solution dans les variables primales. Pour cela nous raisonnons comme dans la Partie I, Chapitre 2. Puisque $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0) \in \mathbf{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma_L \times]0,T[)$ et que la relation de compatibilité (15.4) est vérifiée, le Théorème A-3.2 nous indique qu'il existe $\mathbf{U}_{\text{relev}}$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_- \times]0,T[)$ tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{U}_0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U}_{\text{relev}}(L,\cdot,\cdot) & = & \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_L \times]0,T[. \end{cases}$$

Nous construisons ensuite h_{relev} dans $H^{1,1}(\Omega_- \times]0,T[)$ tel que $h_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0) = h_0$ et $\partial_t h_{\text{relev}} = -\text{div}\mathbf{U}_{\text{relev}}$ dans $\Omega_- \times]0,T[$. Nous introduisons alors $\mathbf{U}_r = \mathbf{U} - \mathbf{U}_{\text{relev}}$,

$h_r = h - h_{\text{relev}}$ et $\mathbf{W}_r = (\mathbf{U}_r, h_r)$. Nous sommes amenés à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_r & = & \mathbf{F}_W^r & \text{dans } \Omega_- \times]0,T[, \\ \mathbf{W}_r(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U}_r(L,\cdot,\cdot) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_L \times]0,T[, \end{cases}$$

avec $\mathbf{F}_W^r = (F_1^r, F_2^r, 0)^t = \mathbf{F}_W - \mathcal{L}_{SW}(\mathbf{U}_{\text{relev}}, h_{\text{relev}})^t$, vecteur dont chaque composante appartient à $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$.

Nous prenons la transformée de Fourier-Laplace de l'équation et nous trouvons :

$$\begin{cases} -\nu\dfrac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2} + (s+\nu\eta^2)\hat{u}_r - f\hat{v}_r + c^2\dfrac{\partial \hat{h}_r}{\partial x} & = & \widehat{F}_1^r, \\ -\nu\dfrac{\partial^2 \hat{v}_r}{\partial x^2} + (s+\nu\eta^2)\hat{v}_r + f\hat{u}_r + c^2 i\eta\hat{h}_r & = & \widehat{F}_2^r, \\ s\hat{h}_r + i\eta\hat{v}_r + \dfrac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} & = & 0. \end{cases} \tag{15.7}$$

Nous multiplions alors la première équation par $\overline{\hat{u}}_r$ (le conjugué de $\hat{u}_r$) puis nous intégrons selon la variable x sur $]-\infty, L[$. Si $(\cdot,\cdot)_x$ désigne le produit scalaire dans $L^2(]-\infty,L[)$ et $\|\cdot\|_x$ sa norme associée, nous obtenons après intégrations par parties :

$$\nu\left\|\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}\right\|_x^2 + (s+\nu\eta^2)\|\hat{u}_r\|_x^2 - (f\hat{v}_r,\hat{u}_r)_x - c^2\left(\hat{h}_r, \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}\right)_x$$
$$+\left(-\nu\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}(L,\cdot,\cdot) + c^2\hat{h}_r(L,\cdot,\cdot)\right)\overline{\hat{u}}_r(L,\cdot,\cdot) = (\widehat{F}_1^r,\hat{u}_r)_x \quad \forall(\eta,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}.$$

De même, nous multiplions la deuxième équation par $\overline{\hat{v}}_r$ et nous intégrons selon la variable x sur $]-\infty, L[$. Nous obtenons :

$$\nu\left\|\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial x}\right\|_x^2 + (s+\nu\eta^2)\|\hat{v}_r\|_x^2 + (f\hat{u}_r,\hat{v}_r)_x$$
$$+c^2 i\eta(\hat{h}_r,\hat{v}_r)_x - \nu\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial x}(L,\cdot,\cdot)\overline{\hat{v}_r}(L,\cdot,\cdot) = (\widehat{F}_2^r,\hat{v}_r)_x \quad \forall(\eta,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}.$$

Puis nous multiplions le conjugué de la troisième équation par $c^2\hat{h}_r$:

$$\overline{s}c^2\|\hat{h}_r\|_x^2 + c^2\left(\hat{h}_r, \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}\right)_x - i\eta c^2\left(\hat{h}_r,\hat{v}_r\right)_x = 0.$$

Nous additionnons ces trois égalités et en utilisant les conditions aux limites $\hat{u}_r(L,\cdot,\cdot) = 0$ et $\hat{v}_r(L,\cdot,\cdot) = 0$, nous obtenons :

$$\nu\left\|\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x}\right\|_x^2 + (s+\nu\eta^2)\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 + \overline{s}c^2\|\hat{h}_r\|_x^2$$
$$-(f\hat{v}_r,\hat{u}_r)_x + (f\hat{u}_r,\hat{v}_r)_x = (\widehat{F}_1^r,\hat{u}_r)_x + (\widehat{F}_2^r,\hat{v}_r)_x. \tag{15.8}$$

Nous prenons alors la partie réelle cette dernière égalité. Puisque f est réelle et qu'ainsi $(f\hat{u}_r, \hat{v}_r)_x - (f\hat{v}_r, \hat{u}_r)_x = 2i\mathcal{I}m(f\hat{u}_r, \hat{v}_r)_x$, nous obtenons pour tout $\alpha > 0$ et avec σ la partie réelle de s :

$$\begin{aligned} \nu \left\| \frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} \right\|_x^2 + (\sigma + \nu\eta^2)\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 + c^2\sigma\|\hat{h}_r\|_x^2 &= \mathcal{R}e\left((\widehat{\mathbf{F}}_r, \widehat{\mathbf{U}}_r)_x\right) \\ &\leq \frac{1}{2\alpha}\|\widehat{\mathbf{F}}_r\|_x^2 + \frac{\alpha}{2}\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy Schwarz et par la relation (1.5). En prenant $\alpha = (\sigma + \nu\eta^2)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \left\|\widehat{\mathbf{U}}_r(\cdot, \eta, s)\right\|_x^2 &\leq \frac{1}{(\sigma + \nu\eta^2)^2}\|\widehat{\mathbf{F}}^r(\cdot, \eta, s)\|_x^2, && (15.9) \\ \left\|\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x}(\cdot, \eta, s)\right\|_x^2 &\leq \frac{1}{2\nu(\sigma + \nu\eta^2)}\|\widehat{\mathbf{F}}^r(\cdot, \eta, s)\|_x^2, && (15.10) \\ \left\|\hat{h}_r(\cdot, \eta, s)\right\|_x^2 &\leq \frac{1}{2c^2\sigma(\sigma + \nu\eta^2)}\|\widehat{\mathbf{F}}^r(\cdot, \eta, s)\|_x^2. && (15.11) \end{aligned}$$

Nous introduisons $\| \cdot \|_{x,y}$ la norme dans $L^2(\Omega_-)$. Nous utilisons alors la relation (B-3) de l'Annexe B et la relation de Parseval. Nous obtenons pour $\beta = 0, 1$ ou 2 :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\|\frac{\partial^\beta \mathbf{U}_r}{\partial y^\beta}\right\|_{x,y}^2 (t)\, dt &\leq C(T) \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L} |\eta|^{2\beta}|\widehat{\mathbf{U}}_r|^2(x, \eta, \sigma + i\omega)\, dx\, d\eta\, d\omega \\ &= C(T) \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\eta|^{2\beta}\|\widehat{\mathbf{U}}_r(\cdot, \eta, \sigma + i\omega)\|_x^2\, d\eta\, d\omega \\ &\leq C(T) \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta|^{2\beta}}{(\sigma + \nu\eta^2)^2}\|\widehat{\mathbf{F}}^r(\cdot, \eta, \sigma + i\omega)\|_x^2\, d\eta\, d\omega \quad \text{par (15.9)} \\ &\leq \tilde{C}_1 C(T) \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\mathbf{F}}^r(\cdot, \eta, \sigma + i\omega)\|_x^2\, d\eta\, d\omega, \end{aligned} \qquad (15.12)$$

avec $\tilde{C}_1$ une constante positive. Cette dernière inégalité est obtenue en remarquant que pour $0 \leq \beta \leq 2$, l'application $\eta \to |\eta|^{2\beta}/(\sigma + \nu\eta^2)^2$ est continue et bornée à l'infini, et que par conséquent elle est bornée sur tout $\mathbb{R}$.

A présent nous utilisons la relation de Parseval sur la variable de Fourier associée à y (nous notons $\check{\mathbf{F}}^r$ la transformée de Fourier inverse en η de $\widehat{\mathbf{F}}^r$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| \frac{\partial^\beta \mathbf{U}_r}{\partial y^\beta} \right\|_{x,y}^2 (t)\, dt &\leq \tilde{C}_1 C(T) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2 (\eta, \sigma + i\omega)\, d\eta\, d\omega, \\
&= \tilde{C}_1 C(T) \int_{\mathbb{R}} \|\check{\mathbf{F}}^r\|_{x,y}^2 (\sigma + i\omega)\, d\omega, \\
&\leq \tilde{C}_1 C(T) \int_0^{+\infty} \|\mathbf{F}^r\|_{x,y}^2 (t)\, dt \quad \text{par } (B-2), \\
&\leq \tilde{C}_1 C(T) \int_0^T \|\mathbf{F}^r\|_{x,y}^2 (t)\, dt.
\end{aligned} \tag{15.13}$$

Cette dernière inégalité est obtenue grâce au principe de causalité (B-4.1). Nous obtenons alors le résultat suivant :

$$\mathbf{U}_r, \frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 \mathbf{U}_r}{\partial y^2} \text{ appartiennent à } \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega_-)). \tag{15.14}$$

De même nous avons pour $\beta = 0$ ou 1 :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial x} \right) \right\|_{x,y}^2 (t)\, dt &\leq C(T) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{L} |\eta|^{2\beta} \left| \frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} \right|^2 (x, \eta, \sigma + i\omega)\, dx\, d\eta\, d\omega \\
&= C(T) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\eta|^{2\beta} \left\| \frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} \right\|_x^2 (\eta, \sigma + i\omega)\, d\eta\, d\omega \\
&\leq C(T) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta|^{2\beta}}{2\nu(\sigma + \nu\eta^2)} \|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2\, d\eta\, d\omega \quad \text{par (15.10)} \\
&\leq \tilde{C}_2 C(T) \int_0^{+\infty} \|\mathbf{F}^r\|_{x,y}^2 (t)\, dt, \\
&\leq \tilde{C}_2 C(T) \int_0^T \|\mathbf{F}^r\|_{x,y}^2 (t)\, dt.
\end{aligned}$$

avec $\tilde{C}_2$ une constante strictement positive obtenue par le même argument que précédemment. Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 \mathbf{U}_r}{\partial x \partial y} \text{ appartiennent à } \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega_-)). \tag{15.15}$$

Enfin, nous avons pour $\beta = 0$ ou 1 :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| \frac{\partial^\beta h_r}{\partial y^\beta} \right\|_{x,y}^2 (t)\, dt &\leq C(T) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{L} |\eta|^{2\beta} |\hat{h}_r|^2 (x, \eta, \sigma + i\omega)\, dx\, d\eta\, d\omega \\
&= C(T) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\eta|^{2\beta} \|\hat{h}_r\|_x^2 (\eta, \sigma + i\omega)\, d\eta\, d\omega \\
&\leq C(T) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta|^{2\beta}}{2c^2 \sigma (\sigma + \nu \eta^2)} \|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2\, d\eta\, d\omega \qquad \text{par (15.11)} \\
&\leq \tilde{C}_3 C(T) \int_0^{+\infty} \|\mathbf{F}^r\|_{x,y}^2 (t)\, dt, \\
&\leq \tilde{C}_3 C(T) \int_0^{T} \|\mathbf{F}^r\|_{x,y}^2 (t)\, dt.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$h_r \text{ et } \frac{\partial h_r}{\partial y} \text{ appartiennent à } L^2(0, T; L^2(\Omega_-)). \tag{15.16}$$

Pour obtenir les autres résultats de régularité et conclure la démonstration du théorème, nous utilisons de nouveau les équations (15.7). En dérivant la troisième équation de (15.7) en x, nous obtenons :

$$\frac{\partial \hat{h}_r}{\partial x} = -\frac{i\eta}{s} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial x} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2},$$

et en reportant cette relation dans la première équation il vient :

$$-\left(\nu + \frac{c^2}{s} \right) \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2} + (s + \nu \eta^2) \hat{u}_r - f \hat{v}_r - \frac{c^2 i\eta}{s} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial x} = \widehat{F}_1^r.$$

Avec l'hypothèse $\mathbf{F}^r = (F_1^r, F_2^r)^t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ et grâce aux résultats (15.14) et (15.15), nous obtenons que $-(\nu + c^2/s)\partial_{xx} \hat{u}_r + s\hat{u}_r$ est dans $L^2(]-\infty, L[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, c.-à-d. :

$$\int_{-\infty}^{L} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| - \left(\nu + \frac{c^2}{s} \right) \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2} + s\hat{u}_r \right|^2 dx\, d\eta\, d\omega < \infty.$$

En développant cette expression nous trouvons :

$$\int_{-\infty}^{L} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\left| \nu + c^2/s \right|^2 \left| \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2} \right|^2 + |s\hat{u}_r|^2 + 2\mathcal{R}e \left(-\overline{s} \left(\nu + c^2/s \right) \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2} \overline{\hat{u}_r} \right) \right] dx\, d\eta\, d\omega < \infty. \tag{15.17}$$

Et puisque les termes de bord s'annulent grâce à la condition aux limites, nous avons par intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{L}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(-\overline{s}\left(\nu+c^2/s\right)\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2}\overline{\hat{u}_r}\right)dx\,d\eta\,d\omega=\int_{-\infty}^{L}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{s}\left(\nu+c^2/s\right)\left|\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}\right|^2 dx\,d\eta\,d\omega.$$

Or $|\nu+c^2/s|^2=\nu^2+c^4/|s|^2+2\nu c^2\mathcal{R}e(s^{-1})\geq\nu^2$, et $\mathcal{R}e(\overline{s}(\nu+c^2/s))=\sigma\nu+c^2(\sigma^2-\omega^2)/(\sigma^2+\omega^2)\geq\sigma\nu-c^2$, ainsi la relation (15.17) devient :

$$\begin{aligned}&\nu^2\int_{-\infty}^{L}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2}\right|^2 dx\,d\eta\,d\omega+\int_{-\infty}^{L}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|s\hat{u}_r|^2\,dx\,d\eta\,d\omega\\&+2(\sigma\nu-c^2)\int_{-\infty}^{L}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}\right|^2 dx\,d\eta\,d\omega<\infty.\end{aligned}$$

En choisissant $\sigma>c^2/\nu$, nous en déduisons que

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\text{ et }\frac{\partial u_r}{\partial t}\text{ sont dans }L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).\tag{15.18}$$

Un raisonnement analogue appliqué à la deuxième équation de (15.7), nous donne également

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}\text{ et }\frac{\partial v_r}{\partial t}\text{ sont dans }L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).\tag{15.19}$$

Enfin, nous considérons les résultats (15.14) et (15.15) qui nous donnent $\operatorname{div}\mathbf{U}_r$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$. En utilisant la troisième équation de (15.7), nous obtenons :

$$\frac{\partial h_r}{\partial t}\text{ est dans }L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).\tag{15.20}$$

Nous considérons par ailleurs les résultats (15.14) et (15.18) qui nous donnent $\partial_t u_r$, $\triangle u_r$ et v_r dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$. En utilisant la première équation de (15.7), nous obtenons alors :

$$\frac{\partial h_r}{\partial x}\text{ est dans }L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).\tag{15.21}$$

Ainsi les résultats (15.14), (15.15), (15.16), (15.18), (15.19), (15.20) et (15.21) nous donnent $\mathbf{U}_r$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et h_r dans $H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$. En considérant ensuite l'équation d'évolution en h_r nous obtenons que $\partial_t h_r$ est dans $H^{1,1/2}(\Omega_-\times]0,T[)$.

Puisque $\mathbf{U}=\mathbf{U}_r+\mathbf{U}_{\text{relev}}$ et $h=h_r+h_{\text{relev}}$, et que $(\mathbf{U}_{\text{relev}},h_{\text{relev}})\in\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)\times H^{1,1}(\Omega\times]0,T[)$, nous en déduisons le résultat de régularité du théorème. □

15.2 Définition de l'algorithme

Nous initialisons l'algorithme (15.1), (15.2) par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{sw}\,\mathbf{W}_-^0 & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_-^0(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U}_-^0 & = & \mathbf{g}_L & \text{sur } \Gamma_L\times]0,T[, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{sw}\,\mathbf{W}_+^0 & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_+\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_+^0(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \mathbf{U}_+^0 & = & \mathbf{g}_0 & \text{sur } \Gamma_0\times]0,T[, \end{cases} \tag{15.22}$$

avec $\mathbf{g}_L$ dans $\mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma_L\times]0,T[)$ et $\mathbf{g}_0$ dans $\mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma_0\times]0,T[)$ vérifiant :

$$\mathbf{g}_L(\cdot,0) = \mathbf{U}_0(L,\cdot) \quad \text{et } \mathbf{g}_0(\cdot,0) = \mathbf{U}_0(0,\cdot).$$

Théorème 15.2.1 *L'algorithme (15.1), (15.2) initialisé par (15.22) définit une suite unique* $(\mathbf{U}_-^k, h_-^k)$ *appartenant à* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[) \times H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h_-^k$ *dans* $H^{1,1/2}(\Omega_-\times]0,T[)$ *et une suite unique* $(\mathbf{U}_+^k, h_+^k)$ *appartenant à* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_+\times]0,T[)\times H^{1,1}(\Omega_+\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h_+^k$ *dans* $H^{1,1/2}(\Omega_+\times]0,T[)$.

PREUVE : D'après le Théorème 15.1.1, le problème (15.22) définit un unique $(\mathbf{U}_-^0, h_-^0)$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[) \times H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et un unique $(\mathbf{U}_+^0, h_+^0)$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_+\times]0,T[) \times H^{1,1}(\Omega_+\times]0,T[)$. Puis si $\mathbf{W}_+^k$ est solution de (15.2) à l'étape k dans $\Omega_+\times]0,T[$, alors d'après le Théorème A-3.2, nous avons :

$$\mathbf{U}_+^k(L,\cdot,\cdot) \text{ dans } \mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma_L\times]0,T[) \text{ avec } \mathbf{U}_+^k(L,\cdot,0) = \mathbf{U}_0(L,\cdot).$$

Ainsi, de nouveau par le Théorème 15.1.1, le problème (15.1) définit un unique $(\mathbf{U}_-^{k+1}, h_-^{k+1})$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[) \times H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$. Un raisonnement analogue dans Ω_+ termine la preuve. □

15.3 Etude de la convergence de l'algorithme

Nous montrons ici que l'algorithme (15.1), (15.2) initialisé par (15.22) converge. Comme dans la partie I, nous faisons une étude de l'équation en Fourier-Laplace. Ceci nous permet de définir ρ, le taux de convergence de l'algorithme et le résultat de convergence est obtenu en montrant que $|\rho|$ est strictement inférieur à 1.

15.3.1 Définition du taux de convergence

Nous introduisons l'algorithme vérifié par l'erreur de (15.1), (15.2) à l'étape $k+1$. Si nous appelons encore $\mathbf{W}_-^{k+1}$ et $\mathbf{W}_+^{k+1}$ les erreurs dans Ω_- et Ω_+, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}_-^{k+1} & = & 0 & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_-^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U}_-^{k+1} & = & \mathbf{U}_+^{k} & \text{sur } \Gamma_L\times]0,T[, \end{array}\right. \tag{15.23}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}_+^{k+1} & = & 0 & \text{dans } \Omega_+\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_+^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \mathbf{U}_+^{k+1} & = & \mathbf{U}_-^{k} & \text{sur } \Gamma_0\times]0,T[. \end{array}\right. \tag{15.24}$$

Nous prenons la transformée de Fourier-Laplace de l'équation de Saint-Venant homogène dans chacun des sous-domaines Ω_- et Ω_+. Dans le Chapitre 14, nous avons résolu cette équation et nous avons montré que la solution s'écrit (voir (14.9)) :

$$\begin{array}{l} \widehat{\mathbf{U}}_-^k(x,\eta,s) = M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}x}\boldsymbol{\alpha}^k \quad \text{pour } (x,\eta,s)\in]-\infty,L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}, \\ \widehat{\mathbf{U}}_+^k(x,\eta,s) = M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}x}\boldsymbol{\beta}^k \quad \text{pour } (x,\eta,s)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}. \end{array}$$

Les conditions en $x=L$ et $x=0$ s'écrivent alors :

$$\begin{array}{lcl} M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}L}\boldsymbol{\alpha}^{k+1} & = & M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}L}\boldsymbol{\beta}^k, \\ M_{34}\boldsymbol{\beta}^{k+1} & = & M_{12}\boldsymbol{\alpha}^k. \end{array}$$

Nous obtenons alors l'itération suivante :

$$\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = \underline{e}^{\xi_{12}L}M_{12}^{-1}M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{34}^{-1}M_{12}\boldsymbol{\alpha}^{k-1},$$

puis

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1}(L,\eta,s) & = & M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}L}\boldsymbol{\alpha}^{k+1} \\ & = & M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{34}^{-1}M_{12}\boldsymbol{\alpha}^{k-1} \\ & = & M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{34}^{-1}M_{12}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{12}^{-1}\widehat{\mathbf{U}}_-^{k-1}(L,\eta,s). \end{array} \tag{15.25}$$

Ainsi la vitesse de convergence de l'algorithme (15.1), (15.2) nous est donnée par la norme de la matrice $T = M_{34}e^{\xi_{12}L}M_{34}^{-1}M_{12}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{12}^{-1}$.

Définition 15.3.1 *Le taux de convergence ρ de l'algorithme (15.1), (15.2) est défini par la racine du rayon spectral de $TT^\star$:*

$$\rho(\sigma,\omega,\eta) = \max(|\lambda_i|^{1/2}, \lambda_i \textit{ valeurs propres de } TT^\star).$$

15.3.2 Convergence de l'algorithme de Schwarz classique

Nous introduisons dans un premier temps $|A|^2$ le carré de la norme de la matrice A défini par le rayon spectral de $AA^\star$, c.-à-d. $|A|^2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ où λ_1 et λ_2 sont solutions de :

$$\lambda^2 - \lambda(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) + |\det A|^2 = 0 \qquad \text{si} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, nous rappelons que si X_1 et X_2 sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} |X_1|^2 + |X_2|^2 &= \frac{1}{4}\left|S + \sqrt{S^2 - 4P}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|S - \sqrt{S^2 - 4P}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(|S|^2 + |S^2 - 4P|\right) \\ &\leq |S|^2 + 2|P|. \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$|A|^2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^2 + 2|\det A|^2. \quad (15.26)$$

Le lemme suivant nous donne une borne supérieur pour la norme de T.

Lemme 15.3.1 *Il existe un σ_0 tel que pour tout $\sigma > \sigma_0$ la norme de la matrice T est strictement inférieure à 1 pour tout (η, ω) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

PREUVE : Nous avons $|T| \leq |M_{34}|\,|\underline{e}^{\xi_{12}L}|\,|M_{34}^{-1}|\,|M_{12}|\,|\underline{e}^{\xi_{12}L}|\,|M_{12}^{-1}|$. Or puisque $\mathcal{R}e(\xi_1) \leq \mathcal{R}e(\xi_2)$ nous avons $|\underline{e}^{\xi_{12}L}| = e^{\mathcal{R}e(\xi_2 L)}$ et par ailleurs pour $(i,j) = (1,2)$ ou $(i,j) = (3,4)$, nous avons en vertu de (15.26) :

$$\begin{aligned} |M_{ij}|^2 &\leq \left(|A_i|^2 + |A_j|^2 + |B_1|^2 + |B_2|^2\right)^2 + 2|A_iB_2 - A_jB_1|^2, \\ |M_{ij}^{-1}|^2 &\leq \frac{(|A_i|^2 + |A_j|^2 + |B_1|^2 + |B_2|^2)^2}{|A_iB_2 - A_jB_1|^2} + 2\frac{1}{|A_iB_2 - A_jB_1|^2}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$|M_{34}|\,|\underline{e}^{\xi_{12}L}|\,|M_{34}^{-1}|\,|M_{12}|\,|\underline{e}^{\xi_{12}L}|\,|M_{12}^{-1}| \leq \frac{P(\eta, s)e^{2\mathcal{R}e(\xi_2)L}}{|A_1B_2 - A_2B_1|^2|A_3B_2 - A_4B_1|^2},$$

avec $P(\eta, s)$ une quantité qui peut être bornée par un polynôme en η et ω (voir la définition des A_i et B_i en (14.6)). Nous introduisons $Q(\eta, s) = \frac{P(\eta,s)}{|A_1B_2 - A_2B_1|^2|A_3B_2 - A_4B_1|^2}$ et pour σ fixé, nous mettons en avant deux points :

i. Le Théorème 14.2.2 nous indique que si $\sigma \neq 0$ et $\sigma \neq 4\nu f^2 c^2/\tilde{c}$, les quantités $|A_1B_2 - A_2B_1|$ et $|A_3B_2 - A_3B_1|$ ne s'annulent en aucun ω ou η. Ces quantités ne peuvent donc tendre vers 0 que quand $|\eta|$ ou $|\omega|$ tendent vers l'infini. Ceci est effectivement le cas puisque $|A_1B_2 - A_2B_1|$ et $|A_3B_2 - A_4B_1|$ sont factorisables par $\xi_1 - \xi_2$ (voir la définition des A_i et B_i en (14.6)) et que $\xi_1 - \xi_2$ tend vers 0 quand $|\eta|$ ou $|\omega|$ tend vers l'infini (voir (14.4)). Or dans ce cas $-\mathcal{R}e(\xi_2)$ croît comme $|\eta|$ ou $|\omega|$ (voir (14.4)), et par suite $Q(\eta, \omega)e^{2\mathcal{R}e(\xi_2)L}$ tend vers 0. Ainsi pour tout $0 < C < 1$ il existe un $\eta_0 > 0$ et un $\omega_0 > 0$ tels que pour tout $|\omega| > \omega_0$ et $|\eta| > \eta_0$ on ait $Q(\eta, \omega)e^{2\mathcal{R}e(\xi_2)L} < C$.

ii. Puisque les quantités $|A_1B_2-A_2B_1|$ et $|A_3B_2-A_3B_1|$ ne s'annulent en aucun ω ou η, nous en déduisons que sur l'ensemble borné $(\omega, \eta) \in]-\omega_0, \omega_0[\times]-\eta_0, \eta_0[$ la quantité $Q(\eta, \omega)$ est bornée et par suite nous avons pour tout $(\eta, \omega) \in]-\omega_0, \omega_0[\times]-\eta_0, \eta_0[$:

$$\frac{P(\eta, s)}{|A_1B_2 - A_2B_1|^2 |A_3B_2 - A_4B_1|^2} e^{2\mathcal{R}e(\xi_2)L} \leq K e^{2\mathcal{R}e(\xi_2)L},$$

avec K une constante.

Or le Lemme 14.3.1 nous indique que $e^{2\mathcal{R}e(\xi_2)L}$ tend vers 0 uniformément en η et ω quand σ tend vers l'infini. Si nous choisissons σ_0 tel que $Ke^{2\mathcal{R}e(\xi_2)L} \leq C$ pour tout $\sigma > \sigma_0$, les résultats i. et ii. nous donnent :

$$|M_{34}|\,|\underline{e}^{\xi_{12}L}|\,|M_{34}^{-1}|\,|M_{12}|\,|\underline{e}^{\xi_{12}L}|\,|M_{12}^{-1}| \leq C < 1 \text{ pour tout } \sigma > \sigma_0, (\omega, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous en déduisons que pour $\sigma > \sigma_0$, la norme de T est strictement inférieure à 1.

□

Le théorème suivant nous indique que l'algorithme (15.1), (15.2) converge.

Théorème 15.3.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega_-))$, $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-)$. *L'algorithme (15.1), (15.2) initialisé par (15.22) définit deux suites* $(\mathbf{U}_-^k, h_-^k)$ *et* $(\mathbf{U}_+^k, h_+^k)$ *convergentes respectivement dans* $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega_-)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega_-))$ *et* $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega_+)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega_+))$ *pour tout* $0 < T < +\infty$.

PREUVE : Soit $|\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1}|$ la norme euclidienne de $\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1}$. En utilisant (15.25) nous obtenons :

$$|\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1}(L, \eta, s)| \leq |T|\,|\widehat{\mathbf{U}}_-^{k-1}(L, \eta, s)|.$$

Or le Lemme 15.3.1 nous donne l'existence d'une constante $0 < C < 1$ et d'un σ_0 tels que $|\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1}(L, \eta, s)| \leq C|\widehat{\mathbf{U}}_-^{k-1}(L, \eta, s)|$ pour tout $\sigma > \sigma_0$ et par suite nous obtenons

$$|\widehat{\mathbf{U}}_-^{2k}(L, \eta, \sigma + i\omega)| \leq C^k |\widehat{\mathbf{U}}_-^0(L, \eta, \sigma + i\omega)|,$$

ce qui nous donne en utilisant (B-3) :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\mathbf{U}_-^{2k}(L,\cdot,t)\|_y^2\,dt &\leq \tilde{C}(T)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathbf{U}}_-^{2k}(L,\eta,\sigma+i\omega)|^2\,d\eta\,d\omega. \\ &\leq \tilde{C}(T)C^k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathbf{U}}_-^{0}(L,\eta,\sigma+i\omega)|^2\,d\eta\,d\omega \qquad (15.27) \\ &\leq \tilde{C}(T)C^k\int_0^T \|\mathbf{U}_-^{0}(L,\cdot,t)\|_y^2\,dt,\end{aligned}$$

cette dernière inégalité est obtenue par la relation de Parseval et par le principe de causalité (voir Théorème B-4.1). Nous en déduisons alors la convergence de $\mathbf{U}_-^{2k}(L,\cdot,\cdot)$ dans $L^2(0,T;L^2(\Gamma_L))$. Il nous reste alors à montrer le résultat de convergence de $\mathbf{U}_-^{2k}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$ et pour cela nous remarquons que par construction de l'algorithme nous avons également obtenu la convergence de $\mathbf{U}_+^{2k}(L,\cdot,\cdot)$ dans $L^2(0,T;L^2(\Gamma_L))$.

Nous appelons $\mathbf{U}^k_{\text{relev}}$ le relèvement de la donnée sur le bord du problème (15.23) c.-à-d. (voir Théorème A-3.2) $\mathbf{U}^k_{\text{relev}}$ est dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et vérifie $\mathbf{U}^k_{\text{relev}} = \mathbf{U}^k_+$ sur $\Gamma_L\times]0,T[$ et $\mathbf{U}^k_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_-. Nous construisons ensuite h^k_{relev} tel que $h^k_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_- et $\partial_t h^k_{\text{relev}} + \text{div}\mathbf{U}^k_{\text{relev}} = 0$ dans $\Omega_-\times]0,T[$. Ainsi $\mathbf{W}^k_r = (\mathbf{U}^{k+1}_- - \mathbf{U}^k_{\text{relev}}, h^{k+1}_- - h^k_{\text{relev}})^t$ vérifie $\mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}^k_r = -\mathcal{L}_{SW}(\mathbf{U}^k_{\text{relev}}, h^k_{\text{relev}})$ dans $\Omega_-\times]0,T[$, $\mathbf{W}^k_r(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_- et $\mathbf{U}^k_r(0,\cdot,\cdot) = 0$ sur $\Gamma_L\times]0,T[$.

Nous reprenons alors le calcul qui nous a permis d'obtenir (15.13) pour $\beta = 0$, c.-à-d. $\int_0^T \|\mathbf{U}^k_r\|_{x,y}(t) \leq K(T)\int_0^T \|\mathcal{L}_{SW}(\mathbf{U}^k_{\text{relev}}, h^k_{\text{relev}})\|^2_{x,y}(t)\,dt$. Ensuite en utilisant la continuité du relèvement de $\mathbf{U}^k_+(L,\cdot,\cdot)$ en $\mathbf{U}^k_{\text{relev}}$ de $\mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma_L\times]0,T[)$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\mathbf{U}^{k+1}_- - \mathbf{U}^k_{\text{relev}}\|^2_{x,y}(t)\,dt &\leq K(T)\int_0^T \|\mathcal{L}_{SW}(\mathbf{U}^k_{\text{relev}}, h^k_{\text{relev}})\|^2_{x,y}(t)dt \\ &\leq \tilde{K}(T)\int_0^T \|\mathbf{U}^k_+(L,\cdot,t)\|^2_y\,dt\end{aligned}$$

avec $K(T)$ et $\tilde{K}(T)$ deux constantes qui dépendent de T. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\mathbf{U}^{k+1}_-(\cdot,\cdot,t)\|^2_{x,y}\,dt &\leq \int_0^T \|(\mathbf{U}^{k+1}_- - \mathbf{U}^k_{\text{relev}})(\cdot,\cdot,t)\|_{x,y} + \int_0^T \|\mathbf{U}^k_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,t)\|^2_{x,y}\,dt \\ &\leq \tilde{\tilde{K}}(T)\int_0^T \|\mathbf{U}^k_+(L,\cdot,t)\|^2_y\,dt,\end{aligned}$$

de nouveau par la continuité du relèvement. Ainsi, puisque $\mathbf{U}^k_+(L,\cdot,\cdot)$ converge dans $L^2(0,T;L^2(\Gamma_L))$, nous obtenons la convergence de $\mathbf{U}^k_-$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$.

Nous réitérons le processus sur $\partial_x \mathbf{U}_+^{k+1}$ et $\partial_y \mathbf{U}_+^{k+1}$ et nous montrons grâce à (15.27) que $\mathbf{U}_+^k$ converge vers 0 dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_-))$ et h_-^{k+1} dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$. Le même raisonnement dans Ω_+ termine la preuve. $\square$

Chapitre 16

De l'algorithme optimal à l'algorithme optimisé

Comme nous l'avons vu dans la partie I, la méthode de Schwarz classique converge très lentement ; et il est intéressant de s'inspirer de la théorie des conditions aux limites absorbantes pour mettre en place des conditions de transmission qui conduisent à un algorithme de décomposition de domaine plus performant et qui converge même dans le cas sans recouvrement. Le non recouvrement des sous-domaines est intéressant car il est moins coûteux qu'un recouvrement et il est indispensable pour envisager un couplage d'équations.

Dans la Section 16.1 nous écrivons des conditions aux limites qui mènent à la convergence optimale de l'algorithme. Puisque ces conditions ne sont pas exploitables dans la pratique, nous les approcherons dans la Section 16.2 par des opérateurs différentiels. Nous considérerons le cas où ces opérateurs sont d'ordre 0 ou 1 et dans chacun de ces cas nous étudierons l'algorithme associé. Pour cela nous avons besoin de trois lemmes que nous énonçons et démontrons dans la Section 16.3.

Nous décomposons l'espace $\mathbb{R}^2$ en deux sous-domaines qui ne se recouvrent pas (voir Fig. 16.1) et dont l'interface se trouve en $x = 0$.

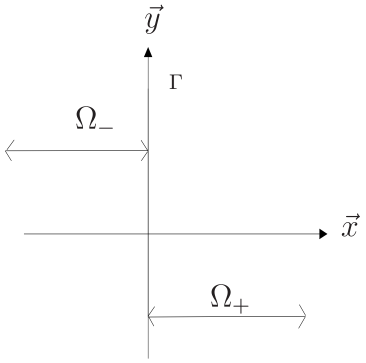


FIG. 16.1 – Décomposition du domaine $\mathbb{R}^2$

16.1 Algorithme optimal

Dans cette section nous proposons un algorithme de décomposition de domaine optimal, c.-à-d. nous choisissons les conditions de transmission de façon à avoir convergence en deux itérations (dans le cas d'un découpage en n sous-domaines en bandes nous aurons convergence en n itérations). La méthode s'inspire de la théorie des conditions aux limites absorbantes ; on pourra se reporter par exemple à [25] (L. Halpern) pour le traitement de systèmes incomplètement paraboliques.

Il est connu que si l'on décompose le domaine initial en deux sous-domaines, les quantités conservées au travers de l'interface commune sont la solution, et la quantité $-\nu\partial\mathbf{U}/\partial\vec{\mathbf{n}} + c^2 h\,\vec{\mathbf{n}}$ où $\vec{\mathbf{n}}$ désigne le vecteur normal à l'interface. Suivant l'idée mise en place pour l'équation de convection diffusion nous proposons l'algorithme :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\mathcal{L}_{sw}\,\mathbf{W}_-^{k+1} & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[\\
\mathbf{W}_-^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_- \\
-\nu\dfrac{\partial\mathbf{U}_-^{k+1}}{\partial x} + c^2(h_-^{k+1},0)^t - \Lambda^+\mathbf{U}_-^{k+1} & = & -\nu\dfrac{\partial\mathbf{U}_+^{k}}{\partial x} + c^2(h_+^{k},0)^t - \Lambda^+\mathbf{U}_+^{k} & \text{sur } \Gamma\times]0,T[
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\mathcal{L}_{sw}\,\mathbf{W}_+^{k+1} & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_+\times]0,T[\\
\mathbf{W}_+^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_+ \\
\nu\dfrac{\partial\mathbf{U}_+^{k+1}}{\partial x} - c^2(h_+^{k+1},0)^t - \Lambda^-\mathbf{U}_+^{k+1} & = & \nu\dfrac{\partial\mathbf{U}_-^{k}}{\partial x} - c^2(h_-^{k},0)^t - \Lambda^-\mathbf{U}_-^{k} & \text{sur } \Gamma\times]0,T[
\end{array}\right. \tag{16.1}$$

avec Λ^+ et Λ^- à définir.
Nous introduisons dans un premier temps les matrices :

$$D = \begin{pmatrix} \nu + c^2/s & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & i\eta c^2/s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\xi_{12}} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}, \tag{16.2}$$

avec ξ_i, $i = 1, 2$ définis en (14.5). Nous rappelons que les matrices M_{12} et M_{34} sont définies en (14.10). Le théorème suivant nous indique comment choisir les opérateurs Λ^+ et Λ^- de façon optimale.

Théorème 16.1.1 *Si le symbole de Fourier-Laplace de l'opérateur Λ^+ est*

$$-D\, M_{34}\underline{\xi_{12}}M_{34}^{-1} - H,$$

et si le symbole de Λ^- est

$$-D\, M_{12}\underline{\xi_{12}}M_{12}^{-1} + H,$$

alors l'algorithme (16.1) converge en deux itérations.

Preuve : Nous considérons l'algorithme (16.1) avec $\mathbf{F}_W = 0$ et $\mathbf{W}_0 = 0$, c.-à-d. nous considérons l'algorithme vérifié par les erreurs que nous appelons encore $\mathbf{W}_-^k$ et $\mathbf{W}_+^k$. Nous prenons la transformée de Fourier-Laplace des équations dans $\Omega_-\times]0,T[$ et $\Omega_+\times]0,T[$ et d'après le Chapitre 14 et les relations (14.9) nous avons :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbf{U}}_-^k(x,\eta,s) = M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}x}\boldsymbol{\alpha}^k \text{ pour } (x,\eta,s) \in]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
&\widehat{\mathbf{U}}_+^k(x,\eta,s) = M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}x}\boldsymbol{\beta}^k \text{ pour } (x,\eta,s) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
\text{et}\quad &\hat{h}_\pm^k = -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_\pm^k}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_\pm^k.
\end{aligned} \tag{16.3}$$

Nous écrivons les conditions aux limites de l'algorithme (16.1) en variables de Fourier-Laplace et nous remplaçons $\hat{h}_\pm^k$ par $-\partial_x\hat{u}_\pm^k/s - i\eta\hat{v}_\pm^k/s$, :

$$\left\{\begin{aligned}
&-D\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1}}{\partial x} - H\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1} - \hat{\Lambda}^+\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1} = -D\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_+^{k}}{\partial x} - H\widehat{\mathbf{U}}_+^{k} - \hat{\Lambda}^+\widehat{\mathbf{U}}_+^{k} \text{ en } \{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
&D\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_+^{k+1}}{\partial x} + H\widehat{\mathbf{U}}_+^{k+1} - \hat{\Lambda}^-\widehat{\mathbf{U}}_+^{k+1} = D\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_-^{k}}{\partial x} + H\widehat{\mathbf{U}}_-^{k} - \hat{\Lambda}^-\widehat{\mathbf{U}}_-^{k} \text{ en } \{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}.
\end{aligned}\right. \tag{16.4}$$

Par ailleurs, le Théorème 14.2.2 nous indique que les matrices M_{12} et M_{34} sont inversibles, ainsi les relations (16.3) nous donnent $\partial_x\widehat{\mathbf{U}}_+^k = -M_{34}\underline{\xi_{12}}M_{34}^{-1}\widehat{\mathbf{U}}_+^k$, et un raisonnement analogue pour $\partial_x\widehat{\mathbf{U}}_-^k$ nous donnent en $x = 0$:

$$\begin{aligned}
-D\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_+^k}{\partial x} - H\widehat{\mathbf{U}}_+^k &= (-DM_{34}\underline{\xi_{12}}M_{34}^{-1} - H)\widehat{\mathbf{U}}_+^k,\\
D\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_-^k}{\partial x} + H\widehat{\mathbf{U}}_-^k &= (-DM_{12}\underline{\xi_{12}}M_{12}^{-1} + H)\widehat{\mathbf{U}}_-^k.
\end{aligned}$$

Ainsi en choisissant $\hat{\Lambda}^+$ et $\hat{\Lambda}^-$ comme indiqués par le théorème, les seconds membres de (16.4) s'annulent. Les erreurs $\mathbf{W}_-^k$ et $\mathbf{W}_+^k$ sont alors solutions d'une équation sans second membre, avec des conditions aux limites homogènes et une condition initiale nulle c.-à-d. $\mathbf{W}_-^k$ et $\mathbf{W}_+^k$ sont nulles. Par conséquent dès la deuxième itération l'algorithme a convergé. □

16.2 Algorithme optimisé

Les opérateurs $\Lambda^{\pm}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels et ne peuvent être utilisés directement dans un algorithme. Comme dans la partie I, nous allons alors les approcher par des opérateurs différentiels. Nous proposons l'algorithme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{sw}\,\mathbf{W}_-^{k+1} & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[\\ \mathbf{W}_-^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_- \\ -\,\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_-^{k+1}}{\partial x} + c^2(h_-^{k+1},0)^t - \Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}_-^{k+1} & = & -\,\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_+^{k}}{\partial x} + c^2(h_+^{k},0)^t - \Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}_+^{k} & \text{sur } \Gamma\times]0,T[\end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{sw}\,\mathbf{W}_+^{k+1} & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_+\times]0,T[\\ \mathbf{W}_+^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_+^{k+1}}{\partial x} - c^2(h_+^{k+1},0)^t - \Lambda^-_{\text{app}}\mathbf{U}_+^{k+1} & = & \nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_-^{k}}{\partial x} - c^2(h_-^{k},0)^t - \Lambda^-_{\text{app}}\mathbf{U}_-^{k} & \text{sur } \Gamma\times]0,T[\end{cases} \tag{16.5}$$

avec $\Lambda^{\pm}_{\text{app}}$ des opérateurs différentiels à définir.

Nous considérerons dans un premier temps (Chapitre 17) la forme le plus simple pour ces opérateurs :

$$^0\Lambda^{\pm}{}_{\text{app}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix},$$

avec λ, μ, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ quatre réels. Nous appellerons la condition associée, condition d'ordre 0. Ensuite au Chapitre 18 , nous étudierons des conditions d'ordre 1, c.-à-d. pour lesquelles il intervient une dérivée en temps :

$$^1\Lambda^{\pm}_{\text{app}} = \begin{pmatrix} \lambda + \alpha\frac{\partial}{\partial t} & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix},$$

avec λ, μ, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ et α cinq réels. Pour étudier en détail les algorithmes associés à ces conditions nous avons besoin de trois lemmes que nous énonçons et démontrons dans la Section 16.3.

16.3 Lemmes préliminaires

Dans cette section nous énonçons et démontrons trois lemmes qui nous serviront à montrer sous quelles hypothèses les problèmes aux limites impliqués dans (16.5) possèdent une unique solution.

16.3.1 Relèvement pour le problème d'ordre 0

Nous construisons ici un relèvement pour les conditions aux limites de (16.5) quand $\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}$ a la forme :

$$ {}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix}, $$

avec λ, μ, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ réels. Ceci correspond à ce que nous appellerons des conditions d'ordre 0.

Lemme 16.3.1 *Soit* $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0)$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega_-)$ *et* $\mathbf{g}$ *dans* $\mathbf{H}^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$. *Il existe* $\mathbf{U}_r$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ *tel que :*

$$ \begin{cases} -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_r \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda^+_{app}\mathbf{U}_r = \mathbf{g} & \textit{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ \mathbf{U}_r(\cdot,\cdot,0) = \mathbf{U}_0 & \textit{dans } \Omega_-\times]0,T[. \end{cases} $$

où h_r *est défini par :*

$$ \begin{cases} \dfrac{\partial h_r}{\partial t} + \mathit{div}\,\mathbf{U}_r = 0 & \textit{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ h_r(\cdot,\cdot,0) = 0 & \textit{dans } \Omega_-. \end{cases} $$

PREUVE : Nous introduisons g_0^u et g_0^v dans $H^{3/2,3/4}(\Gamma\times]0,T[)$ vérifiant sur Γ :

$$ g_0^u(\cdot,0) = u_0(0,\cdot) \quad \text{et} \quad g_0^v(\cdot,0) = v_0(0,\cdot). $$

Puis si $(\mathbf{g})_2$ désigne la deuxième composante de $\mathbf{g}$, nous introduisons $g_1^v = (\mathbf{g})_2 + \tilde{\lambda} g_0^u + \tilde{\mu} g_0^v \in H^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$ et par le Théorème A-3.2, puisque v_0 est dans $H^1(\Omega_-)$, nous obtenons l'existence de v_r dans $H^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ tel que :

$$ \begin{cases} v_r(0,\cdot,\cdot) & = & g_0^v & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ -\nu\dfrac{\partial v_r}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) & = & g_1^v & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ v_r(\cdot,\cdot,0) & = & v_0 & \text{dans } \Omega_-. \end{cases} $$

Nous construisons à présent le relèvement u_r. Pour cela nous introduisons $g_1^u = (\mathbf{g})_1 + \lambda g_0^u + \mu g_0^v \in H^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$, puis $\tilde{g}_1^u$ tel que :

$$ \hat{\tilde{g}}_1^u = -\frac{s}{s\nu + c^2}\left(\hat{g}_1^u + \frac{c^2 i\eta}{s}\hat{g}_0^v\right). \tag{16.6} $$

Nous avons $|\hat{\tilde{g}}_1^u| \leq C(|\hat{g}_1^u| + |i\eta\hat{g}_0^v|)$ avec C une constante strictement positive. Et puisque g_0^v est dans $H^{3/2,3/4}(\Gamma\times]0,T[)$ nous avons $\partial_y g_0^v$ dans $H^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$ et par suite $\tilde{g}_1^u$ est dans $H^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$. Il existe donc u_r dans $H^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_r(0,\cdot,\cdot) & = & g_0^u & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) & = & \tilde{g}_1^u & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ u_r(\cdot,\cdot,0) & = & u_0 & \text{dans } \Omega_-. \end{array}\right.$$

Enfin nous notons $\mathbf{U}_r = (u_r, v_r)$ et nous définissons h_r comme étant la solution de $\partial_t h_r + \operatorname{div} \mathbf{U}_r = 0$ dans $\Omega_-\times]0,T[$ avec $h_r(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_-. Ceci nous donne en variables de Fourier-Laplace :

$$\hat{h}_r = -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_r \quad \forall (x,\eta,s) \in]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}.$$

Ainsi nous avons sur l'interface :

$$\begin{aligned} -\nu\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} + c^2\hat{h}_r &= -(\nu + \frac{c^2}{s})\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} - \frac{i\eta c^2}{s}\hat{v}_r \\ &= -(\nu + \frac{c^2}{s})\hat{\tilde{g}}_1^u - \frac{i\eta c^2}{s}\hat{g}_0^v. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de $\hat{\tilde{g}}_1^u$ (voir (16.6)), nous trouvons que $-\nu\partial_x u_r + c^2 h_r = g_1^u$ sur $\Gamma\times]0,T[$. Par suite nous avons :

$$-\nu\frac{\partial u_r}{\partial x} + c^2 h_r - \lambda u_r - \mu v_r = g_1^u - \lambda g_0^u - \mu g_0^v = (\mathbf{g})_1 \text{ sur } \Gamma\times]0,T[.$$

Nous avons également :

$$-\nu\frac{\partial v_r}{\partial x} - \tilde{\lambda} u_r - \tilde{\mu} v_r = g_1^v - \tilde{\lambda} g_0^u - \tilde{\mu} g_0^v = (\mathbf{g})_2 \text{ sur } \Gamma\times]0,T[.$$

□

16.3.2 Relèvement pour le problème d'ordre 1

Nous construisons ici un relèvement pour les conditions aux limites de (16.5) quand $\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}$ est de la forme :

$${}^1\hat{\Lambda}^+_{\text{app}} = \begin{pmatrix} \lambda + \alpha s & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix},$$

avec λ, μ, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ et α réels correspondant à ce que nous appellerons des conditions d'ordre 1.

Dans la suite $(\mathbf{g})_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de $\mathbf{g}$.

Lemme 16.3.2 *Soit* $\mathbf{g}$ *tel que* $(\mathbf{g})_1 = \tilde{g} - (\lambda + \alpha\partial_t)g_0^u$ *où* $\tilde{g} \in H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$ *et* $g_0^u \in H^{7/2,7/4}(\Gamma\times]0,T[)$*, et* $(\mathbf{g})_2 \in H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$*. Nous supposons que les relations de compatibilité suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} (\mathbf{g})_1(\cdot,0) &= 0 \text{ sur } \Gamma, \\ (\mathbf{g})_2(\cdot,0) &= 0 \text{ sur } \Gamma, \\ g_0^u(\cdot,0) &= 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial g_0^u}{\partial t}(\cdot,0) &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Il existe alors $\mathbf{U}_r = (u_r, v_r)$ *dans* $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ *tel que*

$$\begin{cases} -\nu\dfrac{\partial u_r}{\partial x} + c^2 h_r - \lambda u_r - \mu v_r - \alpha\dfrac{\partial u_r}{\partial t} &= (\mathbf{g})_1 \text{ sur } \Gamma\times]0,T[, \\ -\nu\dfrac{\partial v_r}{\partial x} - \tilde{\lambda}u_r - \tilde{\mu}v_r &= (\mathbf{g})_2 \text{ sur } \Gamma\times]0,T[, \\ \mathbf{U}_r(\cdot,\cdot,0) &= 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ \dfrac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial t}(\cdot,\cdot,0) &= 0 \text{ dans } \Omega_-. \end{cases}$$

où h_r *est défini par*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_r}{\partial t} + div\,\mathbf{U}_r &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ h_r(\cdot,\cdot,0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega_-. \end{cases}$$

Preuve : Soit g_0^v dans $H^{7/2,7/4}(\Gamma\times]0,T[)$ vérifiant les relations de compatibilité sur Γ :

$$\begin{cases} g_0^v(\cdot,0) &= 0, \\ \dfrac{\partial g_0^v}{\partial t}(\cdot,0) &= 0. \end{cases}$$

Nous introduisons $g_1^v = (\mathbf{g})_2 + \tilde{\lambda}g_0^u + \tilde{\mu}g_0^v \in \mathbf{H}^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$ avec g_0^u donné par le théorème. Grâce aux relations de compatibilité sur $(\mathbf{g})_2$, g_0^u et g_0^v nous avons $g_1^v(\cdot,0) = 0$ sur Γ. Par le Théorème A-3.2 nous obtenons alors l'existence de v_r dans $H^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ tel que

$$\begin{cases} v_r(0,\cdot,\cdot) &= g_0^v & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) &= \dfrac{-1}{\nu}g_1^v & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ v_r(\cdot,\cdot,0) &= 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial t}(\cdot,\cdot,0) &= 0 & \text{dans } \Omega_-. \end{cases}$$

Nous construisons à présent le relèvement u_r. Pour cela nous considérons $\tilde{g}_1^u$ dans $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$ défini par :

$$\tilde{g}_1^u = \tilde{g} + \mu g_0^v, \tag{16.7}$$

et grâce aux relations de compatibilité sur $(\mathbf{g})_1$, g_0^u, $\partial_t g_0^u$ et g_0^v nous avons $\tilde{g}_1^u(\cdot,0) = 0$. Ensuite nous introduisons (g_1^u, g_0^h) solution de :

$$\begin{cases} -\nu g_1^u + c^2 g_0^h = \tilde{g}_1^u & \text{sur } \Gamma\times]0,T[\\ \dfrac{\partial g_0^h}{\partial t} + g_1^u + \dfrac{\partial g_0^v}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[\\ g_0^h(\cdot,0) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Nous remarquons que puisque $\tilde{g}_1^u(\cdot,0) = 0$ la solution g_1^u, si elle existe, vérifie $g_1^u(\cdot,0) = 0$. Puis nous résolvons ce système par transformée de Fourier-Laplace et nous trouvons :

$$\hat{g}_1^u = -\frac{s}{s\nu + c^2}\left(\hat{\tilde{g}}_1^u + \frac{c^2 i\eta}{s}\hat{g}_0^v\right). \tag{16.8}$$

Nous avons $|\hat{g}_1^u| \leq C(|\hat{\tilde{g}}_1^u| + |i\eta\hat{g}_0^v|)$, avec C une constante strictement positive. Et puisque g_0^v est dans $H^{7/2,7/4}(\Gamma\times]0,T[)$, nous avons $\partial_y g_0^v$ dans $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$ et par suite g_1^u est dans $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$. Il existe donc u_r dans $H^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ tel que :

$$\begin{cases} u_r(0,\cdot,\cdot) & = & g_0^u & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) & = & g_1^u & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \\ u_r(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial t}(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-. \end{cases}$$

Enfin, nous notons $\mathbf{U}_r = (u_r, v_r)$ et nous définissons h_r comme étant la solution de $\partial_t h_r + \operatorname{div}\mathbf{U}_r = 0$ dans $\Omega_-\times]0,T[$ avec $h_r(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_-. Ceci nous donne en variables de Fourier-Laplace :

$$\hat{h}_r = -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_r \quad \forall (x,\eta,s) \in]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}.$$

Ainsi nous avons sur l'interface :

$$-\nu\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} + c^2\hat{h}_r = -\left(\nu + \frac{c^2}{s}\right)\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} - \frac{i\eta c^2}{s}\hat{v}_r = -\left(\nu + \frac{c^2}{s}\right)\hat{g}_1^u - \frac{i\eta c^2}{s}\hat{g}_0^v.$$

Et en utilisant la définition de $\hat{g}_1^u$ (voir (16.8)), nous trouvons que $-\nu\partial_x u_r + c^2 h_r = \tilde{g}_1^u$

sur $\Gamma\times]0,T[$. Par suite nous avons sur $\Gamma\times]0,T[$:

$$\begin{aligned} -\nu\frac{\partial u_r}{\partial x}+c^2h_r-\lambda u_r-\alpha\frac{\partial u_r}{\partial t}-\mu v_r &= \tilde{g}_1^u-\left(\lambda+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)g_0^u-\mu g_0^v \\ &= \tilde{g}-\left(\lambda+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)g_0^u \\ &= (\mathbf{g})_1. \end{aligned}$$

Et nous avons également :

$$-\nu\frac{\partial v_r}{\partial x}-\tilde{\lambda}u_r-\tilde{\mu}v_r=g_1^v-\tilde{\lambda}g_0^u-\tilde{\mu}g_0^v=(\mathbf{g})_2 \text{ sur } \Gamma\times]0,T[.$$

□

16.3.3 Lemme de positivité

Lemme 16.3.3 *Soit* $\mathbf{g}$ *dans* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Gamma))$ *et* $\mathbf{W}=(\mathbf{U},h)$ *la solution de :*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W} &= 0 \quad \textit{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}(\cdot,\cdot,0) &= 0 \quad \textit{dans } \Omega_-, \\ \mathbf{U} &= \mathbf{g} \quad \textit{sur } \Gamma\times]0,T[. \end{cases}$$

On note Λ^- *l'opérateur défini par*

$$\Lambda^-:\mathbf{g}\to\left(\nu\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x}-c^2\begin{pmatrix}h\\0\end{pmatrix}\right)_{|\Gamma}. \tag{16.9}$$

Si $\hat{\Lambda}^-(\eta,s)$ *désigne le symbole de Fourier-Laplace de cet opérateur, alors pour tout* $(\eta,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$*, la matrice* $\hat{\Lambda}^-(\eta,s)$ *est définie positive.*

Preuve : Nous reprenons le système écrit en variables de Fourier-Laplace (14.1) et nous multiplions la première équation par $\overline{\hat{u}}$. Nous intégrons ensuite selon la variable x sur $]-\infty,0[$. Après intégrations par parties nous obtenons pour $(\eta,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$:

$$\begin{gathered} s\|\hat{u}\|_x^2+\nu\eta^2\|\hat{u}\|_x^2-(f\hat{v},\hat{u})_x \\ -c^2\left(\hat{h},\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)_x+\nu\left\|\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right\|_x^2+\left(-\nu\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+c^2\hat{h}\right)\overline{\hat{u}}(0,\cdot,\cdot)=0. \end{gathered}$$

De même, nous multiplions la deuxième équation par $\overline{\hat{v}}$ et nous intégrons selon la variable x sur $]-\infty,0[$. Nous obtenons :

$$s\|\hat{v}\|_x^2+\nu\eta^2\|\hat{v}\|_x^2+(f\hat{u},\hat{v})_x+c^2i\eta(\hat{h},\hat{v})_x+\nu\left\|\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right\|_x^2-\nu\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\overline{\hat{v}}(0,\cdot,\cdot)=0.$$

Puis nous multiplions le conjugué de la troisième équation par $c^2\hat{h}$:

$$\overline{s}c^2\|\hat{h}\|_x^2(\eta,s) + c^2\left(\hat{h}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)_x - i\eta c^2(\hat{h},\hat{v})_x = 0$$

Nous additionnons ces trois égalités et nous obtenons :

$$s\|\widehat{\mathbf{U}}\|_x^2 + \overline{s}c^2\|\hat{h}\|_x^2 + \nu\left\|\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}}{\partial x}\right\|_x^2 + \nu\eta^2\|\widehat{\mathbf{U}}\|_x^2 +$$
$$^t\overline{\widehat{\mathbf{U}}}(0,\cdot,\cdot)\left(-\nu\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix}\hat{h}\\0\end{pmatrix}\right)(0,\cdot,\cdot) - (f\hat{v},\hat{u})_x + (f\hat{u},\hat{v})_x = 0.$$

Nous prenons alors la partie réelle de cette dernière égalité. Puisque f est réelle, nous avons $(f\hat{u},\hat{v})_x - (f\hat{v},\hat{u})_x = 2i\mathcal{I}m((f\hat{u},\hat{v})_x)$. En utilisant la définition (16.9) de l'opérateur Λ^- nous obtenons :

$$\mathcal{R}e(s)\left(\|\widehat{\mathbf{U}}\|_x^2(\eta,s) + c^2\|\hat{h}\|_x^2(\eta,s)\right) + \nu\left\|\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}}{\partial x}\right\|_x^2(\eta,s)$$
$$+\nu\eta^2\|\widehat{\mathbf{U}}\|_x^2(\eta,s) = \mathcal{R}e(^t\overline{\hat{\mathbf{g}}}\hat{\Lambda}^-\hat{\mathbf{g}})(\eta,s).$$

Et puisque $\mathcal{R}e(s) > 0$ nous en déduisons que pour tout $\mathbf{g}$ non identiquement nul, nous avons $\mathcal{R}e(^t\overline{\hat{\mathbf{g}}}\hat{\Lambda}^-\hat{\mathbf{g}}) > 0$. Ce qui montre que la matrice $\hat{\Lambda}^-(\eta,s)$ est définie positive en tout point $(\eta,s) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$. □

Chapitre 17

Algorithme avec des conditions d'ordre 0

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'algorithme (16.5) quand les opérateurs $\Lambda^{\pm}_{\text{app}}$ sont d'ordre 0, c.-à-d. quand ils s'écrivent sous la forme :

$$ {}^{0}\Lambda^{\pm}_{\text{app}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix}, $$

où $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}$, et $\tilde{\mu}$ sont réels.

Dans la Section 17.1, nous montrons que chacun des sous-problèmes impliqués dans (16.5) est bien posé, ce qui nous permettra de définir l'algorithme complet dans la Section 17.2. On pourra trouver dans [23] (B. Gustafsson et A. Sundström) ou [2] (V. I. Agoshkov, A. Quarteroni et F. Saleri) une étude de différents problèmes aux limites pour les équations de Saint-Venant avec un terme de convection.

17.1 Problèmes dans le demi-espace

Nous introduisons le problème aux limites suivant :

$$ \left\{ \begin{array}{lcll} \mathcal{L}_{sw}\,\mathbf{W} & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_- \times]0,T[, \\ \mathbf{W}(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + c^2 \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - {}^{0}\Lambda^{+}_{\text{app}}\mathbf{U} & = & \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \times]0,T[, \end{array} \right. \tag{17.1} $$

avec $\mathbf{F}_W = (F_1, F_2, 0)^t = (\mathbf{F}, 0)^t$.

Nous allons montrer sous quelles hypothèses sur ${}^{0}\Lambda^{+}_{\text{app}}$ ce problème est bien posé. Pour cela nous introduisons dans un premier temps la définition suivante :

Définition 17.1.1 *Une matrice* $M(\eta, s)$ *est dite coercive s'il existe une constante* γ *indépendante de* η *et de* s *telle que pour tout* $(\eta, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ *et pour tout* $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{R}e({}^t\overline{\hat{\mathbf{U}}} M \hat{\mathbf{U}}) > \gamma |\hat{\mathbf{U}}|^2$.

Le Théorème 17.1.1 nous donne un résultat d'existence et de régularité pour le problème (17.1).

Théorème 17.1.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega_-))$, $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-)$ *et* $\mathbf{g}$ *dans* $\mathbf{H}^{1/2,1/4}(\Gamma \times]0, T[)$. *Si le symbole de Fourier-Laplace de* ${}^0\Lambda^+_{app}$ *est coercif alors le problème aux limites (17.1) possède une unique solution* $(\mathbf{U}, h)$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_- \times]0, T[) \times H^{1,1}(\Omega_- \times]0, T[)$ *avec* $\partial_t h$ *dans* $H^{1,1/2}(\Omega \times]0, T[)$.

PREUVE : Nous considérons $\mathbf{W}_{\text{cauchy}}$, la solution du problème de Cauchy associé à (17.1), c.-à-d. $\mathbf{W}_{\text{cauchy}}$ est la solution aux équations de Saint-Venant dans $\mathbb{R}^2$. D'après le Théorème 13.2.2 du Chapitre 13, $\mathbf{U}_{\text{cauchy}}$ est dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega \times]0, T[)$ et h_{cauchy} dans $H^{1,1}(\Omega \times]0, T[)$ avec $\partial_t h_{\text{cauchy}}$ dans $H^{1,1/2}(\Omega_- \times]0, T[)$. Puis nous introduisons $\mathbf{W}_c = \mathbf{W} - (\mathbf{W}_{\text{cauchy}})_{|\Omega_-}$ qui est solution du problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW} \mathbf{W}_c & = & 0 & \text{dans } \Omega_- \times]0, T[, \\ \mathbf{W}_c(\cdot, \cdot, 0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu \dfrac{\partial \mathbf{U}_c}{\partial x} + c^2 \begin{pmatrix} h_c \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda^+_{\text{app}} \mathbf{U}_c & = & \mathbf{g}_c & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \end{cases} \tag{17.2}$$

avec $\mathbf{g}_c = \mathbf{g} - (-\nu \partial_x \mathbf{U}_{\text{cauchy}} + c^2 (h_{\text{cauchy}}, 0)^t - {}^0\Lambda^+_{\text{app}} \mathbf{U}_{\text{cauchy}})_{|\Gamma} \in \mathbf{H}^{1/2,1/4}(\Gamma \times]0, T[)$. La régularité de $\mathbf{g}_c$ s'obtient en utilisant le Théorème de trace A-3.2 : nous avons $(-\nu \partial_x \mathbf{U}_{\text{cauchy}})_{|\Gamma}$ dans $\mathbf{H}^{1/2,1/4}(\Gamma \times]0, T[)$ et $(\mathbf{U}_{\text{cauchy}})_{|\Gamma}$ dans $\mathbf{H}^{3/2,3/4}(\Gamma \times]0, T[)$. Ensuite puisque h_{cauchy} est solution de $\partial_t h_{\text{cauchy}} + \partial_x u_{\text{cauchy}} + \partial_y v_{\text{cauchy}} = 0$ nous en concluons que $(h_{\text{cauchy}})_{|\Gamma}$ est également dans $H^{1/2,1/4}(\Gamma \times]0, T[)$.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 14, la solution en Fourier-Laplace de l'équation $\mathcal{L}_{SW} \mathbf{W}_c = 0$ dans $\Omega_- \times]0, T[$ s'écrit pour tout $(x, \eta, s) \in]-\infty, 0[\times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{U}}_c(x, \eta, s) = M_{12} \underline{e}^{-\xi_{12} x} \boldsymbol{\alpha}, \\ \hat{h}_c(x, \eta, s) = -\dfrac{1}{s} \dfrac{\partial \hat{u}_c}{\partial x} - \dfrac{i\eta}{s} \hat{v}_c, \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{\alpha}$ que l'on détermine grâce à la condition aux limites sur Γ. Dans les variables initiales cette condition s'écrit :

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{U}_c}{\partial x} + c^2 \begin{pmatrix} h_c \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda^+_{\text{app}} \mathbf{U}_c = \mathbf{g}_c \text{ sur } \Gamma \times]0, T[,$$

c.-à-d. avec la définition (16.9) :

$$-(\Lambda^- + {}^0\Lambda^+_{\text{app}}) \mathbf{U}_c = \mathbf{g}_c \text{ sur } \Gamma \times]0, T[,$$

ou en Fourier-Laplace :

$$-(\hat{\Lambda}^- + {}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}})M_{12}\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{g}}_c. \tag{17.3}$$

Or d'après le Lemme 16.3.3, la matrice $\hat{\Lambda}^-(\eta, s)$ est définie positive pour tout $(\eta, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, et par hypothèse ${}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}(\eta, s)$ l'est aussi, nous en déduisons que la matrice $(\hat{\Lambda}^- + {}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}})(\eta, s)$ est également définie positive et elle est ainsi inversible. Par ailleurs, le Théorème 14.2.2 nous indique que la matrice M_{12} est inversible. Et donc la relation (17.3) définit un unique $\boldsymbol{\alpha}$. Par suite nous obtenons l'existence d'une unique solution au système écrit en variables de Fourier-Laplace.

Nous écrivons à présent une estimation d'énergie pour la solution en Fourier-Laplace du problème. Pour cela nous utilisons le Lemme 16.3.1, qui avec l'hypothèse $\mathbf{g}_c$ dans $\mathbf{H}^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$, nous donne l'existence de $\mathbf{U}_{\text{relev}}$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ tel que :

$$\begin{cases} -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_{\text{relev}}}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_{\text{relev}} \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}_{\text{relev}} = \mathbf{g}_c \text{ sur } \Gamma\times]0,T[, \\ \mathbf{U}_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \end{cases}$$

où h_{relev} est défini par $\partial_t h_{\text{relev}} + \operatorname{div} \mathbf{U}_{\text{relev}} = 0$ dans $\Omega_-\times]0,T[$ et $h_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_-. Si nous introduisons $(\mathbf{U}_r, h_r) = (\mathbf{U}_c - \mathbf{U}_{\text{relev}}, h_c - h_{\text{relev}})$, nous sommes alors amenés à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_r & = & \mathbf{F}^r_W & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_r(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_r \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}_r & = & 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \end{cases}$$

où $\mathbf{F}^r_W = (F^r_1, F^r_2, 0)^t = -\mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_{\text{relev}}$.

L'équation dans $\Omega_-\times]0,T[$ s'écrit en variables de Fourier-Laplace :

$$\begin{cases} -\nu\dfrac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2} + (s+\nu\eta^2)\hat{u}_r - f\hat{v}_r + c^2\dfrac{\partial \hat{h}_r}{\partial x} & = & \widehat{F}^r_1, \\ -\nu\dfrac{\partial^2 \hat{v}_r}{\partial x^2} + (s+\nu\eta^2)\hat{v}_r + f\hat{u}_r + c^2 i\eta\hat{h}_r & = & \widehat{F}^r_2, \\ s\hat{h}_r + i\eta\hat{v}_r + \dfrac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} & = & 0. \end{cases} \tag{17.4}$$

Nous reprenons les calculs de la démonstration du Lemme 16.3.3 c.-à-d. nous multiplions la première équation de (17.4) par $\overline{\hat{u}_r}$, la deuxième par $\overline{\hat{v}_r}$ puis nous multiplions le conjugué de la troisième équation par $c^2\hat{h}_r$. Puis nous intégrons la somme de ces résultats selon la variable x sur $]-\infty, 0[$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} s\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 + \overline{s}c^2\|\hat{h}_r\|_x^2 + \nu \left\| \frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} \right\|_x^2 + \nu\eta^2\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 - (f\hat{v}_r, \hat{u}_r)_x + (f\hat{u}_r, \hat{v}_r)_x \\ + {}^t\overline{\widehat{\mathbf{U}}}_r(0,\cdot,\cdot)\left(-\nu\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} \hat{h}_r \\ 0 \end{pmatrix}\right)(0,\cdot,\cdot) = (\widehat{\mathbf{F}}^r, \widehat{\mathbf{U}}_r)_x. \end{aligned}$$

Nous utilisons alors la condition aux limites en $x = 0$

$$-\nu\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} \hat{h}_r \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}\widehat{\mathbf{U}}_r = 0,$$

et nous trouvons :

$$\begin{aligned} (s+\nu\eta^2)\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 + \overline{s}c^2\|\hat{h}_r\|_x^2 + \nu \left\| \frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} \right\|_x^2 + 2i\mathcal{I}m((f\hat{u}_r, \hat{v}_r)_x) \\ + {}^t\overline{\widehat{\mathbf{U}}_r}\,{}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}\widehat{\mathbf{U}}_r(0,\cdot,\cdot) = (\widehat{\mathbf{F}}^r, \widehat{\mathbf{U}}_r)_x. \end{aligned}$$

Nous prenons ensuite la partie réelle de cette expression et nous utilisons la coercivité de ${}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}$ pour traiter le terme de bord : il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $\mathcal{R}e({}^t\overline{\widehat{\mathbf{U}}_r}\,{}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}\widehat{\mathbf{U}}_r(0,\eta,s)) > \gamma|\widehat{\mathbf{U}}_r|^2(0,\eta,s)$. Puis nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre et nous utilisons la relation (1.5). Nous trouvons pour $\epsilon_1 > 0$ à choisir :

$$\begin{aligned} (\sigma+\nu\eta^2)\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 + \sigma c^2\|\hat{h}_r\|_x^2 + \nu \left\| \frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} \right\|_x^2 + \gamma\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|^2(0,\cdot,\cdot) \\ \leq \frac{\epsilon_1}{2}\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 + \frac{1}{2\epsilon_1}\|\widehat{\mathbf{F}}\|_x^2. \end{aligned}$$

En choisissant $\epsilon_1 = \sigma + \nu\eta^2$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma+\nu\eta^2)}{2}\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 + \sigma c^2\|\hat{h}_r\|_x^2 + \nu \left\| \frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} \right\|_x^2 + \gamma|\widehat{\mathbf{U}}_r|^2(0,\cdot,\cdot) \\ \leq \frac{1}{2(\sigma+\nu\eta^2)}\|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2. \end{aligned}$$

Ceci nous conduit alors aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mathbf{U}}_r\|_x^2 &\leq \frac{1}{(\sigma+\nu\eta^2)^2}\|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2 && \forall(\eta,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
\left\|\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x}\right\|_x^2 &\leq \frac{1}{2\nu(\sigma+\nu\eta^2)}\|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2 && \forall(\eta,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
\|\hat{h}_r\|_x^2 &\leq \frac{1}{2c^2\sigma(\sigma+\nu\eta^2)}\|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2 && \forall(\eta,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Puis nous raisonnons comme pour le Théorème 15.1.1 du Chapitre 15 et ces dernières relations nous indiquent que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}_r, \frac{\partial\mathbf{U}_r}{\partial x}, \frac{\partial\mathbf{U}_r}{\partial y}, \frac{\partial^2\mathbf{U}_r}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\mathbf{U}_r}{\partial x\partial y} \text{ sont dans } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-)),\\
\text{et}\quad &h_r, \frac{\partial h_r}{\partial y} \text{ sont dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).
\end{aligned}\tag{17.5}$$

Ensuite, en utilisant l'équation en h_r nous obtenons :

$$\frac{\partial h_r}{\partial t} \text{ est dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).\tag{17.6}$$

Pour montrer le résultat du théorème il nous reste alors à montrer que $\partial_{xx}\mathbf{U}_r$ et $\partial_t\mathbf{U}_r$ sont dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-))$ et que $\partial_x h_r$ est dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$. Pour cela nous considérons la première équation de (17.4) et grâce aux résultats (17.5) et à l'hypothèse F_1^r dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$, nous obtenons que $s\hat{u}_r - \nu\partial_{xx}\hat{u}_r + c^2\partial_x\hat{h}_r$ est dans $L^2(]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Si nous notons $\|\cdot\|_{x,\eta,\omega}$ et $(\cdot,\cdot)_{x,\eta,\omega}$ respectivement la norme et le produit scalaire dans cet espace, nous obtenons par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
&\left\|s\hat{u}_r - \nu\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial\hat{h}_r}{\partial x}\right\|_{x,\eta,\omega}^2\\
&= \|s\hat{u}_r\|_{x,\eta,\omega}^2 + \left\|-\nu\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial\hat{h}_r}{\partial x}\right\|_{x,\eta,\omega}^2 + 2\mathcal{R}e\left(\left(s\hat{u}_r, -\nu\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial\hat{h}_r}{\partial x}\right)_{x,\eta,\omega}\right)\\
&= \|s\hat{u}_r\|_{x,\eta,\omega}^2 + \left\|-\nu\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial\hat{h}_r}{\partial x}\right\|_{x,\eta,\omega}^2 - 2\mathcal{R}e\left(\left(s\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}, -\nu\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x} + c^2\hat{h}_r\right)_{x,\eta,\omega}\right)\\
&\quad + 2\mathcal{R}e\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{s\hat{u}_r}(0,\eta,s)\left(-\nu\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}(0,\eta,s) + c^2\hat{h}_r(0,\eta,s)\right)d\eta\,d\omega\right) < \infty,
\end{aligned}\tag{17.7}$$

avec $s = \sigma + i\omega$. Par ailleurs :

$$-\mathcal{R}e\left((s\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}, -\nu\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} + c^2\hat{h}_r)_{x,\eta,\omega}\right) = \sigma\nu\left\|\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega} - c^2\mathcal{R}e\left(\left(\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}, \overline{s}\hat{h}_r\right)_{x,\eta,\omega}\right)$$

$$\text{et} \quad \left|\mathcal{R}e\left(\left(\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}, \overline{s}\hat{h}_r\right)_{x,\eta,\omega}\right)\right| \le \|\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x}\|_{x,\eta,\omega}\,\|s\hat{h}_r\|_{x,\eta,\omega}.$$

D'après (17.5) et (17.6) nous obtenons que $\left|\mathcal{R}e\left((\partial_x\hat{u}_r, \overline{s}\hat{h}_r)_{x,\eta,\omega}\right)\right|$ est bornée. D'autre part, l'équation en $\hat{v}_r$ permet d'affirmer que $s\hat{v}_r - \nu\partial_{xx}\hat{v}_r$ est dans $L^2(]-\infty, 0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Or nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left\|s\hat{v}_r - \nu\frac{\partial^2\hat{v}_r}{\partial x^2}\right\|^2_{x,\eta,\omega}\\
= \;&\|s\hat{v}_r\|^2_{x,\eta,\omega} + \nu^2\left\|\frac{\partial^2\hat{v}_r}{\partial x^2}\right\|^2_{x,\eta,\omega} - 2\mathcal{R}e\left((s\hat{v}_r, \nu\frac{\partial^2\hat{v}_r}{\partial x^2})_{x,\eta,\omega}\right)\\
= \;&\|s\hat{v}_r\|^2_{x,\eta,\omega} + \nu^2\left\|\frac{\partial^2\hat{v}_r}{\partial x^2}\right\|^2_{x,\eta,\omega} +\\
&2\mathcal{R}e\left(s\nu\left\|\frac{\partial\hat{v}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega} + \overline{s\hat{v}_r}(0,\eta,s)\left(-\nu\frac{\partial\hat{v}_r}{\partial x}(0,\eta,s)\right)\right) < \infty.
\end{aligned} \tag{17.8}$$

En additionnant (17.7) et (17.8) et en prenant en compte le fait que $\mathcal{R}e(s\partial_x\hat{u}_r, \hat{h}_r)$ est borné, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
&\|s\hat{u}_r\|^2_{x,\eta,\omega} + \left\|-\nu\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial\hat{h}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega} + 2\sigma\nu\left\|\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega}\\
&\quad + \|s\hat{v}_r\|^2_{x,\eta,\omega} + \nu^2\left\|\frac{\partial^2\hat{v}_r}{\partial x^2}\right\|^2_{x,\eta,\omega} + 2\sigma\nu\left\|\frac{\partial\hat{v}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega}\\
&+2\mathcal{R}e\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{s\hat{u}_r}(0,\eta,s)\left(-\nu\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}(0,\eta,s) + c^2\hat{h}_r(0,\eta,s)\right)d\eta\,d\omega\right)\\
&\quad +2\mathcal{R}e\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{s\hat{v}_r}(0,\eta,s)\left(-\nu\frac{\partial\hat{v}_r}{\partial x}(0,\eta,s)\right)d\eta\,d\omega\right) < \infty.
\end{aligned} \tag{17.9}$$

En utilisant la condition aux limites, les deux dernières lignes de cette expression s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&2\mathcal{R}e\left(\overline{s\,{}^t\widehat{\mathbf{U}}_r}(0,\eta,s)(-\nu\frac{\partial\widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x}+c^2(\hat{h}_r,0)^t)(0,\eta,s)\right)\\
&=2\mathcal{R}e\left(\overline{s\,{}^t\widehat{\mathbf{U}}_r}(0,\eta,s){}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}\widehat{\mathbf{U}}_r(0,\eta,s)\right)\\
&=2\mathcal{R}e\left(\overline{s}(\lambda|\hat{u}_r|^2(0,\eta,s)+\tilde{\mu}|\hat{v}_r|^2(0,\eta,s)+\mu\overline{\hat{u}_r}\hat{v}_r(0,\eta,s)+\tilde{\lambda}\hat{u}_r\overline{\hat{v}}_r(0,\eta,s))\right)\\
&=\sigma\lambda|\hat{u}_r|^2(0,\eta,s)+\sigma\tilde{\mu}|\hat{v}_r|^2(0,\eta,s)+2\mathcal{R}e\left(\overline{s}(\mu\overline{\hat{u}}_r\hat{v}_r(0,\eta,s)+\tilde{\lambda}\hat{u}_r\overline{\hat{v}}_r(0,\eta,s))\right).
\end{aligned}\tag{17.10}$$

Par ailleurs, nous avons $\left|2\mathcal{R}e\left(\overline{s}(\mu\overline{\hat{u}}_r\hat{v}_r+\tilde{\lambda}\hat{u}_r\overline{\hat{v}}_r)(0,\eta,s)\right)\right|\leq 2(|\mu|+|\tilde{\lambda}|)|s\hat{u}_r\hat{v}_r(0,\eta,s)|$ et

$$\begin{aligned}
s\hat{u}_r\hat{v}_r(0,\eta,s) &= \int_{-\infty}^0\frac{\partial(s\hat{u}_r\hat{v}_r)}{\partial x}(x,\eta,s)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^0 s\hat{u}_r\frac{\partial\hat{v}_r}{\partial x}(x,\eta,s)\,dx+\int_{-\infty}^0 s\hat{v}_r\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}(x,\eta,s)\,dx
\end{aligned}$$

c.-à-d. $$|s\hat{u}_r\hat{v}_r(0,\eta,s)|\leq\frac{1}{2\alpha_1}\int_{-\infty}^0|s\hat{u}_r|^2\,dx+\frac{\alpha_1}{2}\int_{-\infty}^0\left|\frac{\partial\hat{v}_r}{\partial x}\right|^2\,dx+\frac{1}{2\alpha_2}\int_{-\infty}^0|s\hat{v}_r|^2\,dx+\frac{\alpha_2}{2}\int_{-\infty}^0\left|\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}\right|^2\,dx,\tag{17.11}$$

avec α_1 et α_2 deux constantes strictement positives. Ainsi (17.9) devient :

$$\begin{gathered}
(1-\frac{|\mu|+|\tilde{\lambda}|}{\alpha_1})\|s\hat{u}_r\|^2_{x,\eta,\omega}+\left\|-\nu\frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial x^2}+c^2\frac{\partial\hat{h}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega}\\
+(2\sigma\nu-\alpha_2(|\mu|+|\tilde{\lambda}|))\left\|\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega}+\left(1-\frac{|\mu|+|\tilde{\lambda}|}{\alpha_2}\right)\|s\hat{v}_r\|^2_{x,\eta,\omega}\\
+\nu^2\left\|\frac{\partial^2\hat{v}_r}{\partial x^2}\right\|^2_{x,\eta,\omega}+(2\sigma\nu-\alpha_1(|\mu|+|\tilde{\lambda}|))\left\|\frac{\partial\hat{v}_r}{\partial x}\right\|^2_{x,\eta,\omega}\\
\sigma\lambda|\hat{u}_r|^2(0,\eta,s)+\sigma\tilde{\mu}|\hat{v}_r|^2(0,\eta,s)<\infty.
\end{gathered}$$

Nous remarquons dans un premier temps que si ${}^0\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}$ est coercive, alors λ et $\tilde{\mu}$ sont positives et par conséquent, les deux derniers termes de cette expression sont positifs. Nous prenons alors $\alpha_1\geq|\mu|+|\tilde{\lambda}|$ et $\alpha_2\geq|\mu|+|\tilde{\lambda}|$, puis si nous choisissons $\sigma>\sigma_0$ avec $\sigma_0=\max(\alpha_1,\alpha_2)(|\mu|+|\tilde{\lambda}|)/2\nu$ nous en déduisons que $s\hat{u}_r$ et $s\hat{v}_r$ sont dans $L^2(]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et par suite en utilisant (B-3) :

$$\int_0^T\left\|\frac{\partial\mathbf{U}_r}{\partial t}\right\|_{x,y}(t)\,dt\leq\frac{e^{2\sigma T}}{2\pi}\int_{-\infty}^L\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|s\hat{u}_r|^2(x,\eta,\omega)\,dx\,d\eta\,d\omega<\infty,$$

avec $\sigma > \sigma_0$ c.-à-d.

$$\frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial t} \text{ est dans } \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-)). \tag{17.12}$$

Puis en dérivant la troisième équation de (17.4) par x et en injectant le résultat dans la première nous obtenons :

$$-\left(\nu + \frac{c^2}{s}\right)\frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial x^2} - \frac{i\eta c^2}{s}\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial x} - f\hat{v}_r + (s+\nu\eta^2)\hat{u}_r = \widehat{F}_1^r,$$

et grâce à (17.5) et (17.12) nous avons $\hat{v}_r$, $i\eta\hat{v}_r$, $\eta^2\hat{u}_r$ et $s\hat{u}_r$ dans $L^2(]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Puisque $|i\eta c^2\hat{v}_r/s| < |i\eta c^2\hat{v}_r|/\sigma \in L^2(]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, nous obtenons alors que $(\nu + c^2/s)\partial_{xx}\hat{u}_r \in L^2(]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et par suite en considérant que la quantité :

$$\left|\nu + \frac{c^2}{s}\right| = \left(\frac{(\sigma\nu + c^2)^2 + \nu^2\omega^2}{\sigma^2+\omega^2}\right)^{1/2},$$

est bornée pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ nous en déduisons que :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \text{ est dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).$$

Par ailleurs la deuxième équation de (17.4) nous donne :

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \text{ est dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).$$

Enfin, en revenant à la troisième équation de (17.4) que nous dérivons par rapport à x nous obtenons $\partial_x\hat{h}_r = -\partial_{xx}\hat{u}_r/s - i\eta c^2\partial_x\hat{v}_r/s$ et par suite nous en déduisons que :

$$\frac{\partial h_r}{\partial x} \text{ est dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_-)).$$

Nous avons ainsi $\mathbf{U}_r$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et h_r dans $H^{1,1}(\Omega\times]0,T[)$.

Or $\mathbf{U}_r = \mathbf{U}_c - \mathbf{U}_{\text{cauchy}} - \mathbf{U}_{\text{relev}}$ avec $\mathbf{U}_{\text{relev}}$ et $(\mathbf{U}_{\text{cauchy}})_{|\Omega_-}$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et $h_r = h_c - h_{\text{cauchy}} - h_{\text{relev}}$ avec h_{relev} et $(h_{\text{cauchy}})_{|\Omega_-}$ dans $H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$. Nous en déduisons que $\mathbf{U}$ est dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et h est dans $H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$. Enfin, l'équation d'évolution en h nous donne $\partial_t h$ dans $H^{1,1/2}(\Omega_-\times]0,T[)$. □

17.2 Définition de l'algorithme d'ordre 0

Quand $\Lambda^{\pm}_{\text{app}}$ ont la forme :

$${}^0\Lambda^{\pm}_{\text{app}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix},$$

avec λ, μ, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ des réels, nous initialisons l'algorithme (16.5) comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}_-^0 & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[\\ \mathbf{W}_-^0(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_- \\ -\,\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_-^0}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_-^0 \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda_{\text{app}}^{+}\mathbf{U}_-^0 & = & \mathbf{g}_1 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}_+^0 & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_+\times]0,T[\\ \mathbf{W}_+^0(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_+^0}{\partial x} - c^2\begin{pmatrix} h_+^0 \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda_{\text{app}}^{-}\mathbf{U}_+^0 & = & \mathbf{g}_2 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[\end{array}\right. \tag{17.13}$$

avec $\mathbf{F}_W = (\mathbf{F},0)^t$ et $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ dans $\mathbf{H}^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$.

Théorème 17.2.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *et* $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0,h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$. *Si le symbole de* ${}^0\Lambda_{app}^{\pm}$ *est coercif, alors l'algorithme (16.5) avec* $\Lambda_{app}^{\pm} = {}^0\Lambda_{app}^{\pm}$ *initialisé par (17.13) définit une suite unique* $(\mathbf{U}_-^k, h_-^k)$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)\times H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h_-^k$ *dans* $H^{1,1/2}(\Omega_-\times]0,T[)$ *et* $(\mathbf{U}_+^k, h_+^k)$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_+\times]0,T[)\times H^{1,1}(\Omega_+\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h_+^k$ *dans* $H^{1,1/2}(\Omega_+\times]0,T[)$.

PREUVE : D'après le Théorème 17.1.1 le problème (17.13) définit un unique $(\mathbf{U}_-^0, h_-^0)$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)\times H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et un unique $(\mathbf{U}_+^0, h_+^0)$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_+\times]0,T[)\times H^{1,1}(\Omega_+\times]0,T[)$ avec $\partial_t h_\pm^0$ dans $H^{1,1/2}(\Omega_\pm\times]0,T[)$. Puis si $\mathbf{W}_-^k$ est solution de (16.5) à l'étape k dans Ω_-, alors d'après le Théorème A-3.2, nous avons sur $\Gamma\times]0,T[$:

$$-\nu\frac{\partial \mathbf{U}_-^k}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_-^k \\ 0 \end{pmatrix} - {}^0\Lambda_{\text{app}}^{+}\mathbf{U}_-^k \text{ dans } \mathbf{H}^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[).$$

Ainsi, de nouveau par le Théorème 17.1.1, le problème (16.5) dans Ω_+ définit un unique $(\mathbf{U}_+^{k+1}, h_+^{k+1})$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_+\times]0,T[)\times H^{1,1}(\Omega_+\times]0,T[)$ avec $\partial_t h_+^{k+1}$ dans $H^{1,1/2}(\Omega_+\times]0,T[)$. Et un raisonnement analogue dans Ω_+ termine la preuve. □

Chapitre 18

Algorithme avec des conditions d'ordre 1

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'algorithme (16.5) dans le cas où les opérateurs $\Lambda^{\pm}_{\mathrm{app}}$ ont la forme :

$$^1\Lambda^{\pm}_{\mathrm{app}} = \begin{pmatrix} \lambda + \alpha \dfrac{\partial}{\partial t} & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix},$$

où λ, μ, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ et α sont des réels.

Dans la Section 18.1, nous montrons que chacun des sous-problèmes impliqués dans (16.5) est bien posé, ce qui nous permettra de définir l'algorithme complet dans la Section 18.2.

18.1 Problème dans le demi-espace

Nous nous intéressons au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W} & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_- \times]0,T[, \\ \mathbf{W}(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + c^2 \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - {}^1\Lambda^+_{\mathrm{app}}\mathbf{U} & = & \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \times]0,T[, \end{cases} \tag{18.1}$$

avec $\mathbf{F}_W = (F_1, F_2, 0)^t = (\mathbf{F}, 0)^t$.

Le théorème suivant nous indique sous quelles hypothèses sur $^1\Lambda^+_{\mathrm{app}}$ ce problème possède une unique solution. Ici nous considérons des données initiales avec une régularité plus forte que celle des données du Théorème 17.1.1 (conditions d'ordre 0), afin de pouvoir définir la trace de $\partial_t u$ sur Γ.

Théorème 18.1.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$, $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)^t$ *dans* $\mathbf{H}^3(\Omega_-) \times H^3(\Omega_-)$ *et* $\tilde{\mathbf{U}}_0 = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)^t = \mathbf{F}(\cdot,\cdot,0) - (-\nu\triangle\mathbf{U}_0 + c^2\nabla h_0 + (-fv_0, fu_0)^t) \in \mathbf{H}^1(\Omega_-)$. *Soit* $\mathbf{g}$ *tel que* $(\mathbf{g})_1 = \tilde{g} - (\lambda + \alpha\partial_t)g_0^u$, *avec* $\tilde{g}$ *dans* $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$ *et* g_0^u *dans* $H^{7/2,7/4}(\Gamma\times]0,T[)$ *et* $(\mathbf{g})_2$ *dans* $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$. *Nous supposons que les relations de compatibilité suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \tilde{g}(\cdot,0) & = & -\nu\dfrac{\partial u_0}{\partial x}(0,\cdot) + c^2 h_0(0,\cdot) - \mu v_0(0,\cdot) \ \textit{sur}\ \Gamma, \\ g_0^u(\cdot,0) & = & u_0(0,\cdot) \ \textit{sur}\ \Gamma, \\ \dfrac{\partial g_0^u}{\partial t}(\cdot,0) & = & \tilde{u}_0(0,\cdot) \ \textit{sur}\ \Gamma, \\ (\mathbf{g})_2(\cdot,0) & = & -\nu\dfrac{\partial v_0}{\partial x}(0,\cdot) - \tilde{\lambda}u_0(0,\cdot) - \tilde{\mu}v_0(0,\cdot) \ \textit{sur}\ \Gamma. \end{cases}$$

Si le symbole de ${}^1\Lambda_{app}^+$ *est coercif et si* α *est positif, alors* $(\mathbf{U}, h)$ *la solution de (18.1) est dans* $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[) \times H^{3,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h$ *dans* $H^{3,3/2}(\Omega_-\times]0,T[)$.

PREUVE : Nous reprenons la démonstration du Théorème 17.1.1. Nous introduisons $\mathbf{W}_c = \mathbf{W} - (\mathbf{W}_{\text{cauchy}})_{|\Omega_-}$ où $(\mathbf{U}_{\text{cauchy}}, h_{\text{cauchy}}) \in \mathbf{H}^{4,2}(\Omega\times]0,T[) \times H^{3,2}(\Omega\times]0,T[)$ est la solution du problème de Cauchy associé à (18.1) (voir Théorème 13.2.3). Nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_c & = & 0 & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_c(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_c}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_c \\ 0 \end{pmatrix} - {}^1\Lambda_{\text{app}}^+\mathbf{U}_c & = & \mathbf{g}_c & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \end{cases}$$

avec $\mathbf{g}_c = \mathbf{g} - (-\nu\partial_x\mathbf{U}_{\text{cauchy}} + c^2\begin{pmatrix} h_{\text{cauchy}} \\ 0 \end{pmatrix} - {}^1\Lambda_{\text{app}}^+\mathbf{U}_{\text{cauchy}})_{|\Gamma}$.

Au cours de la démonstration du Théorème 17.1.1, nous avions montré dans un premier temps que le problème en Fourier-Laplace avec $\Lambda_{\text{app}}^+ = {}^0\Lambda_{\text{app}}^+$ possède une unique solution et cette démonstration reposait sur la coercivité de ${}^0\Lambda_{\text{app}}^+$. Sous la même hypothèse sur ${}^1\Lambda_{\text{app}}^+$, nous obtenons le même résultat pour le problème (18.1).

Nous cherchons à présent à relever la donnée $\mathbf{g}_c$ et pour cela nous allons appliquer le Lemme 16.3.2. Nous vérifions ici que ses hypothèses sont vérifiées. En utilisant l'équation et les conditions initiales nous avons (voir Chapitre 13 pour les notations) :

$$\begin{aligned} \partial_t\mathbf{U}(\cdot,\cdot,0) &= \nu\triangle\mathbf{U}_0 - c^2\nabla h_0 - \tilde{D}\mathbf{U}_0 + \mathbf{F}(\cdot,\cdot,0), \\ \partial_t\mathbf{U}_{\text{cauchy}}(\cdot,\cdot,0) &= \nu\triangle\mathbf{U}_0 - c^2\nabla h_0 - \tilde{D}\mathbf{U}_0 + \mathbf{F}(\cdot,\cdot,0), \end{aligned}$$

et par suite $\partial_t \mathbf{U}_c(\cdot,\cdot,0)=0$ dans Ω_-. De même nous avons $\partial_t h_c(\cdot,\cdot,0)=0$. D'autre part, le théorème de trace A-3.2 nous donne $(-\nu\partial_x v_{\text{cauchy}}-\tilde{\lambda}u_{\text{cauchy}}-\tilde{\mu}v_{\text{cauchy}})_\Gamma$ dans $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$, ainsi $(\mathbf{g}_c)_2$ est dans $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$. La condition initiale sur $(\mathbf{g})_2$ nous donne par ailleurs $(\mathbf{g}_c)_2(\cdot,0)=0$ sur Γ. Nous écrivons également :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{g}_c)_1 &= \tilde{g}-(\lambda+\alpha\frac{\partial}{\partial t})g_0^u-(-\nu\partial_x u_{\text{cauchy}}+c^2h_{\text{cauchy}}-\mu v_{\text{cauchy}}-(\lambda+\alpha\frac{\partial}{\partial t})u_{\text{cauchy}})_{|\Gamma}\\
&= \tilde{\tilde{g}}-(\lambda+\alpha\frac{\partial}{\partial t})\tilde{g}_0^u,
\end{aligned}$$

avec $\tilde{\tilde{g}}=\tilde{g}-(-\nu\partial_x u_{\text{cauchy}}+c^2h_{\text{cauchy}}-\mu v_{\text{cauchy}})_{|\Gamma}\in H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$ et $\tilde{g}_0^u=g_0^u-(u_{\text{cauchy}})_{|\Gamma}\in H^{7/2,7/4}(\Gamma\times]0,T[)$. Ces quantités vérifient au temps $t=0$ les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{g}}(\cdot,0) &= \tilde{g}(\cdot,0)-(-\nu\frac{\partial u_{\text{cauchy}}}{\partial x}+c^2h_{\text{cauchy}}-\mu v_{\text{cauchy}})(0,\cdot,0)=0\\
&= (-\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}+c^2h_0-\mu v_0)(0,\cdot)-(-\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}+c^2h_0-\mu v_0)(0,\cdot)\\
&= 0\\
\tilde{g}_0^u(\cdot,0) &= g_0^u(\cdot,0)-u_{\text{cauchy}}(0,\cdot,0)\\
&= 0\\
\frac{\partial\tilde{g}_0}{\partial t}(\cdot,0) &= \frac{\partial g_0}{\partial t}(\cdot,0)-\frac{\partial u_{\text{cauchy}}}{\partial t}(0,\cdot,0)\\
&= \tilde{u}_0(0,\cdot)-(F_1(0,\cdot,0)-(-\nu\triangle u_0+c^2\frac{\partial h_0}{\partial x}-fv_0)(0,\cdot))\\
&= 0,
\end{aligned}$$

cette dernière égalité est obtenue en utilisant la définition de $\tilde{u}_0$ donnée dans le théorème.

Nous pouvons alors appliquer le Lemme 16.3.2 et introduire un relèvement $\mathbf{U}_{\text{relev}}$ dans $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ et h_{relev} défini par $\partial_t h_{\text{relev}}+\operatorname{div}\mathbf{U}_{\text{relev}}=0$ dans $\Omega_-\times]0,T[$ et $h_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0)=0$ dans Ω_- vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l}
-\nu\dfrac{\partial\mathbf{U}_{\text{relev}}}{\partial x}+c^2\begin{pmatrix}h_{\text{relev}}\\0\end{pmatrix}-{}^1\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}_{\text{relev}}=\mathbf{g}_c\text{ sur }\Gamma\times]0,T[,\\
\mathbf{U}_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0)=0\text{ dans }\Omega_-,\\
\dfrac{\partial\mathbf{U}_{\text{relev}}}{\partial t}(\cdot,\cdot,0)=0\text{ dans }\Omega_-.
\end{array}\right.$$

Ainsi en introduisant $(\mathbf{U}_r, h_r) = (\mathbf{U}_c - \mathbf{U}_{\text{relev}}, h_c - h_{\text{relev}})$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_r & = & \mathbf{F}_W^r & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}_r(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_r \\ 0 \end{pmatrix} - {}^1\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}_r & = & 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \end{cases} \tag{18.2}$$

avec $\mathbf{F}_W^r = ({F_1}^r, {F_2}^r, 0)^t = (\mathbf{F}^r, 0)^t = -\mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_{\text{relev}}$.

Nous écrivons alors des estimations *a priori* pour les équations en $\hat{u}_r$, $\hat{v}_r$ et $\hat{h}_r$. Comme pour la démonstration du Théorème 17.1.1 et puisque le symbole de ${}^1\Lambda^+_{\text{app}}$ est coercif nous obtenons également les relations suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \left\|\widehat{\mathbf{U}}_r\right\|_x^2 & \leq & \dfrac{1}{(\sigma+\nu\eta^2)^2}\|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2, \\ \left\|\dfrac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x}\right\|_x^2 & \leq & \dfrac{1}{2\nu(\sigma+\nu\eta^2)}\|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2, \\ \|\hat{h}_r\|_x^2 & \leq & \dfrac{1}{2c^2\sigma(\sigma+\nu\eta^2)}\|\widehat{\mathbf{F}}^r\|_x^2. \end{array}$$

En considérant que $\mathbf{F}$ est dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-))$, nous trouvons comme pour le Théorème 17.1.1 que $\mathbf{U}$ et h ont la régularité indiquée en (17.5) et (17.6).

Puis nous reprenons les calculs (17.7) et (17.8) et nous obtenons (17.9). Mais ici les termes de bords deviennent :

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{R}e\left(\overline{s\,{}^t\widehat{\mathbf{U}}_r}(0,\eta,s)(-\nu\frac{\partial \widehat{\mathbf{U}}_r}{\partial x} + c^2(\hat{h}_r,0)^t)(0,\eta,s)\right) \\ & = 2\mathcal{R}e\left(\overline{s\,{}^t\widehat{\mathbf{U}}_r}(0,\eta,s)^1\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}\widehat{\mathbf{U}}_r(0,\eta,s)\right) \\ & = 2\mathcal{R}e\left(\overline{s}((\lambda+\alpha s)|\hat{u}_r|^2(0,\eta,s) + \tilde{\mu}|\hat{v}_r|^2(0,\eta,s) + \mu\overline{\hat{u}_r}\hat{v}_r(0,\eta,s) + \tilde{\lambda}\hat{u}_r\overline{\hat{v}_r}(0,\eta,s))\right) \\ & = (\sigma(\lambda+\alpha\sigma)+\alpha\omega^2)|\hat{u}_r|^2(0,\eta,s) + \sigma\tilde{\mu}|\hat{v}_r|^2(0,\eta,s) + \\ & \qquad 2\mathcal{R}e\left(\mu\overline{\hat{u}_r}\hat{v}_r(0,\eta,s) + \tilde{\lambda}\hat{u}_r\overline{\hat{v}_r}(0,\eta,s)\right). \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse $\alpha \geq 0$ nous obtenons en suivant le raisonnement du Théorème 17.1.1 que $\mathbf{U}$ est dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_-\times]0,T[)$ et h dans $H^{1,1}(\Omega_-\times]0,T[)$.

Nous remarquons ensuite que puisque $\partial_t\mathbf{W}_c(\cdot,\cdot,0) = 0$ et $\partial_t\mathbf{W}_{\text{relev}}(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_-, nous avons également $\partial_t\mathbf{W}_r(\cdot,\cdot,0) = 0$ dans Ω_-. Nous reprenons alors le raisonnement précédent que nous appliquons au système (18.2) que nous avons dérivé par rapport au temps :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}_{rr} & = \dfrac{\partial \mathbf{F}^r_W}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega_- \times]0,T[, \\ \mathbf{W}_{rr}(\cdot,\cdot,0) & = 0 \quad \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_{rr}}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h_{rr} \\ 0 \end{pmatrix} - {}^1\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}_{rr} & = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0,T[, \end{cases}$$

avec $(\mathbf{U}_{rr}, h_{rr}) = (\partial_t \mathbf{U}_r, \partial_t h_r)$ et $\partial_t \mathbf{F}^r$ dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-))$.

Nous obtenons ainsi que $\partial_t \mathbf{U}_r$ est dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_- \times]0,T[)$ et que $\partial_t h_r$ est dans $H^{1,1}(\Omega_- \times]0,T[)$.

De même nous dérivons le système (18.2) une (resp. deux) fois par rapport à y et puisque $\partial_y \mathbf{F}^r$ (resp. $\partial_{yy}\mathbf{F}^r$) est dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-))$ nous obtenons que $\partial_y \mathbf{U}_r$ et $\partial_{yy}\mathbf{U}_r$ sont dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_- \times]0,T[)$ et $\partial_{yy}h_r$ est dans $H^{1,1}(\Omega_- \times]0,T[)$.

Pour obtenir le résultat du théorème il reste alors à montrer d'une part que $\partial_{x^3}\mathbf{U}_r$, $\partial_{x^3y}\mathbf{U}_r$ et $\partial_{x^4}\mathbf{U}_r$ sont dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega_-))$ et d'autre part que $\partial_{xx}h_r$, $\partial_{x^3}h_r$ et $\partial_{xxy}h_r$ sont dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$. Pour montrer ces résultats nous remarquons que puisque $\partial_t \mathbf{U}_r - \nu\partial_{xx}\mathbf{U}_r - \nu\partial_{yy}\mathbf{U}_r + c^2\nabla h_r + (-fv_r, fu_r)^t = \mathbf{F}^r$ avec $\mathbf{F}^r$ dans $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega_- \times]0,T[)$, alors $G_1 = -\nu\partial_{xx}u_r + c^2\partial_x h_r$ est dans $H^{2,1}(\Omega_- \times]0,T[)$ et $G_2 = -\nu\partial_{xx}v_r + c^2\partial_y h_r$ est dans $H^{2,1}(\Omega_- \times]0,T[)$.

En écrivant que $\partial_x G_2$ et $\partial_{xy}G_2$ sont dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$ et en considérant la régularité de h_r (à savoir $\partial_{xy}h_r$ et $\partial_{xyy}h_r$ sont dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$), nous trouvons que $\partial_{x^3}v_r$ et $\partial_{x^3y}v_r$ sont dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$.
Par ailleurs, en revenant aux variables de Fourier-Laplace et puisque $\hat{h}_r = -(\partial_x \hat{u}_r + c^2 i\eta\hat{v}_r)/s$ nous avons $\partial_{xx}\widehat{G_1} = -(\nu + c^2/s)\partial_{x^4}\hat{\hat{u}}_r - c^2(i\eta/s)\partial_{x^3}\hat{v}_r$ dans $L^2(]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Or nous avons $|c^2(i\eta/s)\partial_{x^3}\hat{v}_r| \leq c^2|i\eta\partial_{x^3}\hat{v}_r|/\sigma$ et $\partial_{x^3y}v_r$ est dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$, ainsi $-(\nu + c^2/s)\partial_{x^4}\hat{u}_r$ est dans $L^2(]-\infty,0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et puisque $|\nu + c^2/s|$ est une quantité bornée, nous en concluant que $\partial_{x^4}u_r$ est dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$. Nous appliquons le même raisonnement à $\partial_x G_1$ et $\partial_{xy}G_1$ et nous obtenons que $\partial_{x^3}u_r$ et $\partial_{x^3y}u_r$ sont dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$.
A présent la régularité de h_r (c.-à-d. $\partial_{xx}h_r$, $\partial_{x^3}h_r$, $\partial_{xxy}h_r$ sont dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$) s'obtient en écrivant que $\partial_x G_1$, $\partial_{xx}G_1$ et $\partial_{xy}G_1$ sont dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$ et en considérant la régularité de u_r.
Enfin, nous obtenons que $\partial_{x^4}v_r$ est dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$ en dérivant G_2 deux fois par rapport à x.

Ainsi nous avons montré que $\mathbf{U}_r$ est dans $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ et que h_r est dans $H^{3,2}(\Omega_-\times]0,T[)$. Et puisque $(\mathbf{U}_r, h_r) = (\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\text{relev}} - \mathbf{U}_{\text{cauchy}}, h - h_{\text{relev}} - h_{\text{cauchy}})$ avec $\mathbf{U}_{\text{relev}}$, $\mathbf{U}_{\text{cauchy}}$ dans $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ et h_{relev}, h_{cauchy} dans $H^{3,2}(\Omega_-\times]0,T[)$, nous en déduisons le résultat du théorème. $\square$

18.2 Définition de l'algorithme d'ordre 1

Soit $\mathbf{W}^{\text{init}} = (\mathbf{U}^{\text{init}}, h^{\text{init}})$ un élément quelconque de $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)\times H^{3,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ tel que $\mathbf{W}^{\text{init}}(\cdot,\cdot,0) = \mathbf{W}_0$ et $\partial_t\mathbf{U}^{\text{init}}(\cdot,\cdot,0) = \tilde{\mathbf{U}}_0$ avec $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbf{H}^3(\Omega)\times H^3(\Omega)$ et $\tilde{\mathbf{U}}_0$ défini par $\tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{F}(\cdot,\cdot,0) - (-\nu\triangle\mathbf{U}_0 + c^2\nabla h_0 + (-fv_0, fu_0)^t) \in \mathbf{H}^1(\Omega_-)$. Nous définissons :

$$\mathbf{g}_1 = \left(-\nu\frac{\partial\mathbf{U}^{\text{init}}}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h^{\text{init}} \\ 0\end{pmatrix} - {}^1\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}^{\text{init}}\right)_{|\Gamma},$$

$$\mathbf{g}_2 = \left(\nu\frac{\partial\mathbf{U}^{\text{init}}}{\partial x} - c^2\begin{pmatrix} h^{\text{init}} \\ 0\end{pmatrix} - {}^1\Lambda^-_{\text{app}}\mathbf{U}^{\text{init}}\right)_{|\Gamma}.$$

Quand $\Lambda^\pm_{\text{app}} = {}^1\Lambda^\pm_{\text{app}}$ nous initialisons l'algorithme (16.5) comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}^0_- & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[, \\ \mathbf{W}^0_-(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_-, \\ -\nu\dfrac{\partial\mathbf{U}^0_-}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h^0_- \\ 0\end{pmatrix} - {}^1\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U}^0_- & = & \mathbf{g}_1 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{SW}\,\mathbf{W}^0_+ & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_+\times]0,T[, \\ \mathbf{W}^0_+(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \nu\dfrac{\partial\mathbf{U}^0_+}{\partial x} - c^2\begin{pmatrix} h^0_+ \\ 0\end{pmatrix} - {}^1\Lambda^-_{\text{app}}\mathbf{U}^0_+ & = & \mathbf{g}_2 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \end{cases} \tag{18.3}$$

avec $\mathbf{F}_W = (\mathbf{F}, 0)^t$.

Théorème 18.2.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega\times]0,T[)$, $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^3(\Omega)\times H^3(\Omega)$. *Si le symbole de* ${}^1\Lambda^\pm_{app}$ *est coercif et si* α *est positif, alors l'algorithme (16.5) avec* $\Lambda^\pm_{app} = {}^1\Lambda^\pm_{app}$ *et initialisé par (18.3) définit une suite unique* $(\mathbf{U}^k_-, h^k_-)$ *dans* $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[)\times H^{3,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h^k_-$ *dans* $H^{3,3/2}(\Omega_-\times]0,T[)$ *et* $(\mathbf{U}^k_+, h^k_+)$ *dans* $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_+\times]0,T[)\times H^{3,2}(\Omega_+\times]0,T[)$ *avec* $\partial_t h^k_+$ *dans* $H^{3,3/2}(\Omega_+\times]0,T[)$.

PREUVE : Puisque $\mathbf{W}^{\text{init}}$ est dans $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega\times]0,T[)\times H^{3,2}(\Omega\times]0,T[)$ avec $\mathbf{W}^{\text{init}}(\cdot,\cdot,0) = \mathbf{W}_0$ et $\partial_t\mathbf{U}^{\text{init}}(\cdot,\cdot,0) = \tilde{\mathbf{U}}_0$, d'après le Théorème A-3.2, nous avons $\tilde{g} = (-\nu\partial_x u^{\text{init}} +$

$c^2h^{\mathrm{init}}-\mu v^{\mathrm{init}})_{|\Gamma}$ dans $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$, $g_0^u = (u^{\mathrm{init}})_{|\Gamma}$ dans $H^{7/2,7/4}(\Gamma\times]0,T[)$ et $\tilde{g}_2 = (-\nu\partial_x v^{\mathrm{init}} - \tilde{\lambda}u^{\mathrm{init}} - \tilde{\mu}v^{\mathrm{init}})_{|\Gamma}$ dans $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,T[)$, avec $\tilde{g}(\cdot,0) = (-\nu\partial_x u_0 + c^2h_0 - \mu v_0)(0,\cdot)$, $g_0^u(\cdot,0) = u_0(0,\cdot)$, $\partial_t g_0^u(\cdot,0) = \tilde{u}_0(0,\cdot)$ et $\tilde{g}_2(\cdot,0) = (-\nu\partial_x v_0 - \tilde{\lambda}u_0 - \tilde{\mu}v_0)$.
Ainsi $\mathbf{g} = (\tilde{g} - (\lambda + \alpha\partial_t)g_0^u, \tilde{g}_2)^t$ vérifie les hypothèses du Théorème 18.1.1 et le problème (18.3) dans Ω_+ définit un unique $(\mathbf{U}_-^0, h_-^0)$ dans $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_-\times]0,T[) \times H^{3,2}(\Omega_-\times]0,T[)$ avec $\partial_t h_-^0$ dans $H^{3,3/2}(\Omega_-\times]0,T[)$. Un raisonnement analogue dans le sous-espace Ω_+ nous donne l'existence et l'unicité de $(\mathbf{U}_+^0, h_+^0)$ dans $\mathbf{H}^{4,2}(\Omega_+\times]0,T[)\times H^{3,2}(\Omega_+\times]0,T[)$ avec $\partial_t h_+^0$ dans $H^{3,3/2}(\Omega_+\times]0,T[)$.
Puis nous appliquons le même raisonnement aux sous-problèmes de (16.5) pour obtenir la fin de la preuve du théorème. □

Chapitre 19

Etude de la convergence de l'algorithme

Dans ce chapitre nous donnons des résultats de convergence pour l'algorithme (16.5) dans le cas particulier où les opérateurs $\Lambda^{\pm}_{\text{app}}$ sont diagonaux. La généralisation à des opérateurs plus généraux reste à faire.

19.1 Convergence de l'algorithme avec des conditions d'ordre 0

Le théorème suivant nous donne un résultat de convergence pour l'algorithme (16.5) quand les conditions de transmission sont d'ordre 0 et quand les opérateurs $\Lambda^{\pm}_{\text{app}}$ sont diagonaux.

Théorème 19.1.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. *Si*

$$\Lambda^{+}_{app} = \Lambda^{-}_{app} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

avec p *et* q *deux réels strictement positifs, alors les suites* $(\mathbf{U}^{k+1}_{-}, h^{k+1}_{-})$ *et* $(\mathbf{U}^{k+1}_{+}, h^{k+1}_{+})$ *définies par l'algorithme (16.5) initialisé par (17.13), convergent respectivement dans* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_-)) \times L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$ *et* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_+)) \times L^2(0,T;L^2(\Omega_+))$.

PREUVE : Nous introduisons tout d'abord les opérateurs $\mathcal{B}_+$ et $\mathcal{B}_-$ définis par :

$$\mathcal{B}_+(\mathbf{U},h) = -\nu\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda^{+}_{\text{app}}\mathbf{U},$$

$$\mathcal{B}_-(\mathbf{U},h) = \nu\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - c^2\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - \Lambda^{+}_{\text{app}}\mathbf{U}.$$

Ces opérateurs vérifient les relations :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_+(\mathbf{U},h)+\mathcal{B}_-(\mathbf{U},h) &= -2\Lambda^+_{\text{app}}\mathbf{U},\\
\mathcal{B}_+(\mathbf{U},h)-\mathcal{B}_-(\mathbf{U},h) &= 2\left(-\nu\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}+c^2\begin{pmatrix} h\\ 0\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Dans la suite ${}^t\mathbf{X}$ désigne la transposée du vecteur ou de la matrice $\mathbf{X}$. Puisque par hypothèse p et q sont strictement positifs, la matrice Λ^+_{app} est inversible et le terme $({}^t\mathbf{U})\left(-\nu\partial_x\mathbf{U}+c^2\begin{pmatrix} h\\ 0\end{pmatrix}\right)$ s'écrit :

$$-\frac{1}{4}\left({}^t(\mathcal{B}_++\mathcal{B}_-)(\mathbf{U},h)\right)\ {}^t(\Lambda^+_{\text{app}})^{-1}(\mathcal{B}_+-\mathcal{B}_-)(\mathbf{U},h).$$

Et si $\Lambda^+_{\text{app}}=\begin{pmatrix} q & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}$ avec p et q deux réels strictement positifs, nous avons :

$$\begin{aligned}
&{}^t((\mathcal{B}_++\mathcal{B}_-)(\mathbf{U},h))\ {}^t(\Lambda^+_{\text{app}})^{-1}(\mathcal{B}_+-\mathcal{B}_-)(\mathbf{U},h)\\
=\ &(\mathcal{B}^1_++\mathcal{B}^1_-,\mathcal{B}^2_++\mathcal{B}^2_-)\begin{pmatrix}(\mathcal{B}^1_+-\mathcal{B}^1_-)/q\\ (\mathcal{B}^2_+-\mathcal{B}^2_-)/p\end{pmatrix}\\
=\ &\frac{1}{q}((\mathcal{B}^1_+)^2-(\mathcal{B}^1_-)^2)+\frac{1}{p}((\mathcal{B}^2_+)^2-(\mathcal{B}^2_-)^2)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}^i_\pm$ représente la $i^{ème}$ coordonnée du vecteur $\mathcal{B}_\pm(\mathbf{U},h)$. Nous avons ainsi montré que :

$$({}^t\mathbf{U})\left(-\nu\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}+c^2\begin{pmatrix} h\\ 0\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{4q}((\mathcal{B}^1_+)^2-(\mathcal{B}^1_-)^2)-\frac{1}{4p}((\mathcal{B}^2_+)^2-(\mathcal{B}^2_-)^2).\quad(19.1)$$

Pour montrer que l'algorithme (16.5) converge nous introduisons à présent l'algorithme de l'erreur. Si nous notons $\tilde{\mathbf{W}}^k_\pm=\mathbf{W}_{c|\Omega_\pm}-\mathbf{W}^k_\pm$ l'erreur dans $\Omega_\pm$ (avec $\mathbf{W}_c$ la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$ (voir Théorème 13.2.3)), nous avons

$$\begin{cases}
\mathcal{L}_{sw}\,\tilde{\mathbf{W}}^{k+1}_- = 0 & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[,\\
\tilde{\mathbf{W}}^{k+1}_-(\cdot,\cdot,0) = 0 & \text{dans } \Omega_-,\\
-\nu\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-}{\partial x}+c^2(\tilde{h}^{k+1}_-,0)^t-\Lambda^+_{\text{app}}\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_- = -\nu\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{U}}^{k}_+}{\partial x}+c^2(\tilde{h}^{k}_+,0)^t-\Lambda^+_{\text{app}}\tilde{\mathbf{U}}^{k}_+ & \text{sur } \Gamma\times]0,T[,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\mathcal{L}_{sw}\,\tilde{\mathbf{W}}^{k+1}_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+\times]0,T[,\\
\tilde{\mathbf{W}}^{k+1}_+(\cdot,\cdot,0) = 0 & \text{dans } \Omega_+,\\
\nu\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_+}{\partial x}-c^2(\tilde{h}^{k+1}_+,0)^t-\Lambda^-_{\text{app}}\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_+ = \nu\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{U}}^{k}_-}{\partial x}-c^2(\tilde{h}^{k}_-,0)^t-\Lambda^-_{\text{app}}\tilde{\mathbf{U}}^{k}_- & \text{sur } \Gamma\times]0,T[.
\end{cases}\quad(19.2)$$

Nous multiplions alors l'équation d'évolution en $\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}$ dans Ω_- par $\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}$, celle en $\tilde{h}_-^{k+1}$ par $\tilde{h}_-^{k+1}$ puis nous intégrons la somme de ces résultats sur Ω_-. En notant $\|\cdot\|_{\Omega_-}$ la norme $L^2(\Omega_-)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}+c^2\|\tilde{h}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-})+\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}\\&+\int_\Gamma({}^t\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1})\left(-\nu\frac{\partial\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}}{\partial x}+c^2\begin{pmatrix}\tilde{h}_-^{k+1}\\0\end{pmatrix}\right)d\gamma=0.\end{aligned}$$

Et d'après (19.1) nous avons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}+c^2\|\tilde{h}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-})+\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}\\&+\frac{1}{4}\int_\Gamma\frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1},\tilde{h}_-^{k+1})|^2+\frac{1}{p}|\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1},\tilde{h}_-^{k+1})|^2d\gamma\\&=\frac{1}{4}\int_\Gamma\frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1},\tilde{h}_-^{k+1})|^2+\frac{1}{p}|\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1},\tilde{h}_-^{k+1})|^2d\gamma.\end{aligned}$$

Or la condition aux limites sur $\Gamma\times]0,T[$ du problème dans Ω_- s'écrit $\mathcal{B}_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1},\tilde{h}_-^{k+1})=\mathcal{B}_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k},\tilde{h}_+^{k})$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}+c^2\|\tilde{h}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-})+\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}\\&+\frac{1}{4}\int_\Gamma\frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1},\tilde{h}_-^{k+1})|^2+\frac{1}{p}|\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1},\tilde{h}_-^{k+1})|^2d\gamma\\&=\frac{1}{4}\int_\Gamma\frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k},\tilde{h}_+^{k})|^2+\frac{1}{p}|\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k},\tilde{h}_+^{k})|^2d\gamma.\end{aligned}\tag{19.3}$$

En réitérant le raisonnement dans Ω_+ nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}\|^2_{\Omega_+}+c^2\|\tilde{h}_+^{k+1}\|^2_{\Omega_+})+\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}\|^2_{\Omega_+}\\&+\frac{1}{4}\int_\Gamma\frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1},\tilde{h}_+^{k+1})|^2+\frac{1}{p}|\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1},\tilde{h}_+^{k+1})|^2d\gamma\\&=\frac{1}{4}\int_\Gamma\frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k},\tilde{h}_-^{k})|^2+\frac{1}{p}|\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k},\tilde{h}_-^{k})|^2d\gamma.\end{aligned}\tag{19.4}$$

Si nous introduisons

$$\begin{aligned}
E^{k+1} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-} + c^2\|\tilde{h}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}) + \nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-} \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}\|^2_{\Omega_+} + c^2\|\tilde{h}_+^{k+1}\|^2_{\Omega_+} + \nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}\|^2_{\Omega_+}, \\
F^{k+1} &= \frac{1}{4}\int_\Gamma \frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1})|^2 + |\frac{1}{p}\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1})|^2 d\gamma, \\
G^{k+1} &= \frac{1}{4}\int_\Gamma \frac{1}{q}|\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}, \tilde{h}_+^{k+1})|^2 + \frac{1}{p}|\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}, \tilde{h}_+^{k+1})|^2 d\gamma,
\end{aligned}$$

l'addition de (19.3) et (19.4) s'écrit :

$$E^{k+1} + F^{k+1} + G^{k+1} = F^k + G^k,$$

et en sommant cette relation pour tous les $k \in \{0, \cdots, K\}$ nous obtenons après simplifications des termes redondants :

$$\sum_{k=1}^{K+1} E^k + F^{K+1} + G^{K+1} = F^0 + G^0.$$

En faisant tendre K vers l'infini nous obtenons que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} E^k$ converge et que par conséquent E^k tend vers 0.
Nous obtenons alors la convergence de l'erreur $(\tilde{\mathbf{U}}_-^k, \tilde{h}_-^k)$ vers 0 dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_-))\times L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$ et de l'erreur $(\tilde{\mathbf{U}}_+^k, \tilde{h}_+^k)$ vers 0 dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_+))\times L^2(0,T;L^2(\Omega_+))$.
□

19.2 Convergence de l'algorithme avec des conditions d'ordre 1

Nous donnons à présent un résultat de convergence pour l'algorithme (16.5) quand les conditions de transmission sont d'ordre 1.

Théorème 19.2.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{H}^{2,1}(\Omega\times]0,T[)$, $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{U}_0, h_0)$ *dans* $\mathbf{H}^3(\Omega) \times H^3(\Omega)$. *Si*

$$\Lambda^+_{app} = \Lambda^-_{app} = \begin{pmatrix} \lambda + \alpha\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu} \end{pmatrix},$$

avec λ, $\tilde{\mu}$ *et* α *trois réels strictement positifs avec* $\alpha c^2 < \lambda\nu$ *alors les suites* $(\mathbf{U}_-^{k+1}, h_-^{k+1})$ *et* $(\mathbf{U}_+^{k+1}, h_+^{k+1})$ *définies par l'algorithme (16.5) initialisé par (17.13), convergent respectivement dans* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_-))\times L^2(0,T;L^2(\Omega_-))$ *et* $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_+))\times L^2(0,T;L^2(\Omega_+))$.

Preuve : Nous introduisons les opérateurs suivants :

$$\mathcal{B}^1_+(\mathbf{U},h) = -\nu\frac{\partial u}{\partial x} + c^2 h - \lambda u - \alpha\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\mathcal{B}^1_-(\mathbf{U},h) = \nu\frac{\partial u}{\partial x} - c^2 h - \lambda u - \alpha\frac{\partial u}{\partial t}.$$

En multipliant la somme et la différence de $\mathcal{B}^1_+(\mathbf{U},h)$ et $\mathcal{B}^1_-(\mathbf{U},h)$ nous obtenons $(\mathcal{B}^1_+(\mathbf{U},h))^2 - (\mathcal{B}^1_-(\mathbf{U},h))^2 = 4(-\nu\partial_x u + c^2 h)(-\lambda u - \alpha\partial_t u)$, puis

$$u\left(-\nu\frac{\partial u}{\partial x} + c^2 h\right) = -\frac{1}{4\lambda}((\mathcal{B}^1_+(\mathbf{U},h))^2 - (\mathcal{B}^1_-(\mathbf{U},h))^2) - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}\left(-\nu\frac{\partial u}{\partial x} + c^2 h\right).$$

Nous introduisons également

$$\mathcal{B}^2_+(\mathbf{U},h) = -\nu\frac{\partial v}{\partial x} - \tilde{\mu}v,$$
$$\mathcal{B}^2_-(\mathbf{U},h) = \nu\frac{\partial v}{\partial x} - \tilde{\mu}v.$$

et nous obtenons $(\mathcal{B}^2_+(\mathbf{U},h))^2 - (\mathcal{B}^2_-(\mathbf{U},h))^2 = 4(-\nu\partial_x v)(-\tilde{\mu}v)$. Nous reprenons la démonstration du Théorème 19.1.1 et nous écrivons une estimation d'énergie sur l'algorithme de l'erreur définie par (19.2) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-\|^2_{\Omega_-} + c^2\|\tilde{h}^{k+1}_-\|^2_{\Omega_-}\right) + \nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-\|^2_{\Omega_-}$$
$$+ \int_\Gamma ({}^t\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-)\left(-\nu\frac{\partial\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-}{\partial x} + c^2\begin{pmatrix}\tilde{h}^{k+1}_-\\ 0\end{pmatrix}\right)d\gamma = 0,$$

et en utilisant la définition des $\mathcal{B}_\pm$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-\|^2_{\Omega_-} + c^2\|\tilde{h}^{k+1}_-\|^2_{\Omega_-}) + \nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-\|^2_{\Omega_-}\\ + \int_\Gamma -\frac{1}{4\lambda}((\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-,\tilde{h}^{k+1}_-))^2 - (\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-,\tilde{h}^{k+1}_-))^2)d\gamma\\ + \int_\Gamma -\frac{\alpha}{\lambda}\left(-\nu\frac{\partial\tilde{u}^{k+1}_-}{\partial x} + c^2\tilde{h}^{k+1}_-\right)\frac{\partial\tilde{u}^{k+1}_-}{\partial t}d\gamma\\ + \int_\Gamma -\frac{1}{4\tilde{\mu}}((\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-,\tilde{h}^{k+1}_-))^2 - (\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}^{k+1}_-,\tilde{h}^{k+1}_-))^2)\,d\gamma = 0.\end{aligned}\tag{19.5}$$

Par ailleurs, nous multiplions l'équation $\partial_t\tilde{u}^{k+1}_- - \nu\triangle\tilde{u}^{k+1}_- + c^2\partial_x\tilde{h}^{k+1}_- - f\tilde{v}^{k+1}_- = 0$ par $\partial_t\tilde{u}^{k+1}_-$ et nous intégrons le résultat sur Ω_-. Nous obtenons :

$$\left\|\frac{\partial\tilde{u}^{k+1}_-}{\partial t}\right\|^2_{\Omega_-} + \left(-\nu\triangle\tilde{u}^{k+1}_- + c^2\frac{\partial\tilde{h}^{k+1}_-}{\partial x}, \frac{\partial\tilde{u}^{k+1}_-}{\partial t}\right)_{\Omega_-} - \left(f\tilde{v}^{k+1}_-, \frac{\partial\tilde{u}^{k+1}_-}{\partial t}\right)_{\Omega_-} = 0,$$

et par intégration par parties nous trouvons finalement :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right\|^2_{\Omega_-} + \nu\left(\nabla\tilde{u}_-^{k+1}, \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \tilde{u}_-^{k+1})\right)_{\Omega_-} - c^2\left(\tilde{h}_-^{k+1}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right)\right)_{\Omega_-} \\ + \int_\Gamma \left(-\nu\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x} + c^2\tilde{h}_-^{k+1}\right)\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}d\gamma - f\left(\tilde{v}_-^{k+1}, \frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right)_{\Omega_-} = 0\end{aligned}$$

Nous pouvons récrire (19.5) grâce au terme de bord de l'expression précédente :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-} + \frac{\nu\alpha}{\lambda}\|\nabla\tilde{u}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-} + c^2\|\tilde{h}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}\right) + \nu\|\nabla\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-} \\ &+ \int_\Gamma -\frac{1}{4\lambda}((\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 - (\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2)d\gamma + \frac{\alpha}{\lambda}\left\|\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right\|^2_{\Omega_-} \\ &-\frac{\alpha c^2}{\lambda}\left(\tilde{h}_-^{k+1}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right)\right)_{\Omega_-} - \frac{\alpha}{\lambda}f\left(\tilde{v}_-^{k+1}, \frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right)_{\Omega_-} \\ &+ \int_\Gamma -\frac{1}{4\tilde{\mu}}\left((\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 - (\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2\right)d\gamma = 0.\end{aligned} \tag{19.6}$$

Par ailleurs nous écrivons les relations suivantes qui s'obtiennent premièrement par intégration par parties selon la variable temporelle, puis par l'utilisation de l'équation d'évolution $\partial_t\tilde{h}_-^{k+1} = -\partial_x\tilde{u}_-^{k+1} - \partial_y\tilde{v}_-^{k+1}$:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left(\tilde{h}_-^{k+1}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right)\right)_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma \\ =\ & -\int_{\Omega_-}\int_0^t \frac{\partial\tilde{h}_-^{k+1}}{\partial t}\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}(x,y,\sigma)\,d\sigma dxdy + \int_{\Omega_-}\tilde{h}^{k+1}\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}(x,y,t)dxdy \\ =\ & \int_0^t\left\|\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma + \int_0^t\int_{\Omega_-}\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{v}_-^{k+1}}{\partial y}(x,y,\sigma)dxdyd\sigma + \\ & \int_{\Omega_-}\tilde{h}_-^{k+1}(x,y,t)\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}(x,y,t)dxdy \\ \leq\ & \left(1+\frac{\epsilon_1}{2}\right)\int_0^t\left\|\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\epsilon_1}\int_0^t\left\|\frac{\partial\tilde{v}_-^{k+1}}{\partial y}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma \\ & + \frac{\epsilon_2}{2}\|\tilde{h}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}(t) + \frac{1}{2\epsilon_2}\left\|\frac{\partial\tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_-}(t).\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est obtenue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par la relation (1.5) avec ϵ_1 et ϵ_2 deux réels strictement positifs. Nous écrivons également pour ϵ_3 strictement positif :

$$f\left(\tilde{v}_-^{k+1}, \frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right)_{\Omega_-} \leq \frac{f^2\epsilon_3}{2}\|\tilde{v}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}(t) + \frac{1}{2\epsilon_3}\left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right\|^2_{\Omega_-}(t).$$

En intégrant en temps (19.6) et en utilisant les deux relations précédentes nous trouvons :

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\Big(\|\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}(t) + \frac{\alpha}{\lambda}(\nu - c^2\frac{1}{\epsilon_2})\left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_-}(t) + \frac{\nu\alpha}{\lambda}\left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial y}\right\|^2_{\Omega_-}(t) \\
+c^2(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\epsilon_2)\|\tilde{h}^{k+1}\|^2_{\Omega_-}(t)\Big) \\
+\left(\nu - \frac{\alpha c^2}{\lambda}(1 + \frac{\epsilon_1}{2})\right)\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma + \nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial y}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma + \\
\nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{v}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma + (\nu - \frac{\alpha c^2}{\lambda}\frac{1}{2\epsilon_1})\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{v}_-^{k+1}}{\partial y}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma \\
+\frac{\alpha}{\lambda}(1 - \frac{1}{2\epsilon_3})\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right\|^2_{\Omega_-}(\sigma)\,d\sigma - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{f^2\epsilon_3}{2}\int_0^t \|\tilde{v}_-^{k+1}\|^2_{\Omega_-}(\sigma)d\sigma \\
+\frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde{\mu}}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 d\gamma \\
\leq \frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde{\mu}}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 d\gamma.
\end{gathered}$$

Nous choisissons à présent ϵ_1 tel que $\epsilon_1 \geq \alpha c^2/2\nu\lambda$, et ϵ_3 tel que $\epsilon_3 \geq 1/2$, ainsi les quantités $C_1 = \nu - \alpha c^2/2\lambda\epsilon_1$ et $C_3 = \alpha(1 - 1/2\epsilon_3)/\lambda$ sont positives. Puis sous la condition $\alpha c^2 < \lambda\nu$, nous pouvons choisir ϵ_2 tel que $c^2/\nu \leq \epsilon_2 \leq \lambda/\alpha$ c.-à-d. tel que les quantités $C_2 = \alpha(\nu - c^2/\epsilon_2)/\lambda$ et $\tilde{C}_2 = c^2(1 - \alpha\epsilon_2/\lambda)$ soient strictement positives. Si nous utilisons la condition aux limites sur $\Gamma\times]0, T[$ du problème dans

Ω_- : $\mathcal{B}_+(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}) = \mathcal{B}_+(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}, \tilde{h}_+^{k})$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\|\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}\|_{\Omega_-}^2(t) + C_2\left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega_-}^2(t) + \frac{\nu\alpha}{\lambda}\left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega_-}^2(t) \\
&\qquad + \tilde{C}_2\|\tilde{h}_-^{k+1}\|_{\Omega_-}^2(t)\Big) \\
&+\left(\nu - \frac{\alpha c^2}{\lambda}\left(1+\frac{\epsilon_1}{2}\right)\right)\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega_-}^2(\sigma)\,d\sigma + \nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega_-}^2(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad +\nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{v}_-^{k+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega_-}^2(\sigma)\,d\sigma + C_1\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{v}_-^{k+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega_-}^2(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad +C_3\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_-^{k+1}}{\partial t}\right\|_{\Omega_-}^2(\sigma)\,d\sigma - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{f^2\epsilon_3}{2}\int_0^t \|\tilde{v}_-^{k+1}\|_{\Omega_-}^2(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad +\frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_-^1(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde{\mu}}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_-^2(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k+1}, \tilde{h}_-^{k+1}))^2 d\gamma \\
&\quad \leq \frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_+^1(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k}, \tilde{h}_+^{k}))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde{\mu}}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_+^2(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k}, \tilde{h}_+^{k}))^2 d\gamma.
\end{aligned}$$

Un calcul analogue dans Ω_+ nous donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\|\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}\|_{\Omega_+}^2(t) + C_2\left\|\frac{\partial \tilde{u}_+^{k+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega_+}^2(t) + \frac{\nu\alpha}{\lambda}\left\|\frac{\partial \tilde{u}_+^{k+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega_+}^2(t) \\
&\qquad + \tilde{C}_2\|\tilde{h}_+^{k+1}\|_{\Omega_+}^2(t)\Big) \\
&+\left(\nu - \frac{\alpha c^2}{\lambda}\left(1+\frac{\epsilon_1}{2}\right)\right)\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_+^{k+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega_+}^2(\sigma)\,d\sigma + \nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_+^{k+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega_+}^2(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad +\nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{v}_+^{k+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega_+}^2(\sigma)\,d\sigma + C_1\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{v}_+^{k+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega_+}^2(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad +C_3\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde{u}_+^{k+1}}{\partial t}\right\|_{\Omega_+}^2(\sigma)\,d\sigma - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{f^2\epsilon_3}{2}\int_0^t \|\tilde{v}_+^{k+1}\|_{\Omega_+}^2(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad +\frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_+^1(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}, \tilde{h}_+^{k+1}))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde{\mu}}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_+^2(\tilde{\mathbf{U}}_+^{k+1}, \tilde{h}_+^{k+1}))^2 d\gamma \\
&\quad \leq \frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_-^1(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k}, \tilde{h}_-^{k}))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde{\mu}}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}_-^2(\tilde{\mathbf{U}}_-^{k}, \tilde{h}_-^{k}))^2 d\gamma.
\end{aligned}$$

Nous introduisons ensuite les quantités :

$$\begin{aligned}
E^k_\pm &= \frac{1}{2}\Big(\|\tilde u^k_\pm\|^2_{\Omega_\pm}(t) + \frac{\nu\alpha}{\lambda}\left\|\frac{\partial \tilde u^k_\pm}{\partial y}\right\|^2_{\Omega_\pm}(t) \\
&\quad + \tilde C_2\|\tilde h^k_\pm\|^2_{\Omega_\pm}(t)\Big) + \nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde u^k_\pm}{\partial y}\right\|^2_{\Omega_\pm}(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad + \nu\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde v^k_\pm}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_\pm}(\sigma)\,d\sigma + C_1\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde v^k_\pm}{\partial y}\right\|^2_{\Omega_\pm}(\sigma)\,d\sigma \\
&\quad + C_3\int_0^t \left\|\frac{\partial \tilde u^k_\pm}{\partial t}\right\|^2_{\Omega_\pm}(\sigma)\,d\sigma \\
H^k_\pm(t) &= \left\|\frac{\partial \tilde u^k_\pm}{\partial x}\right\|^2_{\Omega_\pm}(t) + \left\|\tilde v^k_\pm\right\|^2_{\Omega_\pm}(t) \\
F^k(t) &= \frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^1_-(\tilde{\mathbf{U}}^k_-,\tilde h^k_-))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde\mu}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^2_-(\tilde{\mathbf{U}}^k_-,\tilde h^k_-))^2 d\gamma \\
G^k(t) &= \frac{1}{4\lambda}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^1_+(\tilde{\mathbf{U}}^k_+,\tilde h^k_+))^2 d\gamma + \frac{1}{4\tilde\mu}\int_0^t\int_\Gamma (\mathcal{B}^2_+(\tilde{\mathbf{U}}^k_+,\tilde h^k_+))^2 d\gamma,
\end{aligned}$$

nous avons alors :

$$\begin{aligned}
&E^k_+ + E^k_- + \frac{1}{2}\min(1,C_2)\left(H^k_- + H^k_+\right)(t) + F^k + G^k \\
&\le F^{k-1} + G^{k-1} + \max\left(\frac{\alpha}{\lambda}\frac{f^2\epsilon_3}{2}, -\nu + \frac{\alpha c^2}{\lambda}\left(1+\frac{\epsilon_1}{2}\right)\right)\int_0^t (H^k_- + H^k_+)(\sigma)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

En additionnant cette relation sur tous le $k \in \{1,\cdots,K+1\}$ et en simplifiant les termes redondants, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{K+1}(E^k_- + E^k_+) + \frac{1}{2}\min(1,C_2)\sum_{k=1}^{K+1}\left(H^k_- + H^k_+\right)(t) + F^{K+1} + G^{K+1} \\
&\le F^0(T) + G^0(T) + \max\left(\frac{\alpha}{\lambda}\frac{f^2\epsilon_3}{2}, -\nu + \frac{\alpha c^2}{\lambda}\left(1+\frac{\epsilon_1}{2}\right)\right)\sum_{k=1}^{K+1}\int_0^t (H^k_- + H^k_+)(\sigma)\,d\sigma.
\end{aligned} \tag{19.7}$$

Si nous posons $\phi(t) = \sum_{k=1}^{K+1}\int_0^t (H^k_- + H^k_+)(\sigma)\,d\sigma$, puisque $E^k_\pm$, F^{K+1} et G^{K+1} sont positifs nous avons avec C une constante positive :

$$\phi'(t) \le C(\tilde F^0 + \tilde G^0 + \phi(t)),$$

où $\tilde F^0 = F^0(T)$ et $\tilde G^0 = G^0(T)$. Par le lemme de Gronwall nous obtenons $\phi(t) \le \tilde C(T)(\tilde F^0 + \tilde G^0)$ et par suite le second membre de (19.7) est borné par une constante indépendante de K et en faisant tendre K vers l'infini dans le membre de gauche nous obtenons que la série $\sum_{k=1}^{K+1}(E_-^k+E_+^k)+\frac{1}{2}\min(1,C_2)\sum_{k=1}^{K+1}\left(H_-^k+H_+^k\right)(t)$ converge et par conséquent $E_\pm^k$ et $H_\pm^k$ tendent vers 0. Nous obtenons alors la convergence de $\tilde{\mathbf{U}}_\pm^k$ dans $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega_\pm))$ et de $\tilde{h}_\pm^k$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega_\pm))$. □

19.3 Calcul du taux de convergence

Dans le Chapitre 20 nous allons expliciter les opérateurs $\Lambda_{\text{app}}^{\pm}$ intervenant dans l'algorithme (16.5) par des considérations physiques. Malheureusement tous les éléments de ces opérateurs ne pourront être déterminés de cette façon, les autres seront alors choisis par optimisation du taux de convergence. C'est pourquoi dans cette section nous écrivons le taux de convergence de l'algorithme (16.5).

Comme dans la section précédente, nous considérons l'algorithme de l'erreur (19.2) mais cette fois-ci nous considérons également le cas où les deux sous-domaines se recouvrent, c.-à-d. $\Omega_- =]-\infty, L[\times\mathbb{R}$ et $\Omega_+ =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ avec $L \geq 0$.

Nous prenons la transformée de Fourier-Laplace de cet algorithme et nous trouvons que

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbf{U}}_-^k(x,\eta,s) = M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}x}\boldsymbol{\alpha}^k \text{ pour } (x,\eta,s) \in]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
&\widehat{\mathbf{U}}_+^k(x,\eta,s) = M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}x}\boldsymbol{\beta}^k \text{ pour } (x,\eta,s) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{C},\\
\text{et}\quad &\hat{h}_\pm^k = -\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_\pm^k}{\partial x} - \frac{i\eta}{s}\hat{v}_\pm^k.
\end{aligned}$$

Si nous notons Λ^+ et Λ^- les opérateurs dont les symboles de Fourier-Laplace sont respectivement $\hat{\Lambda}^+ = -D\,M_{34}\underline{\xi_{12}}M_{34}^{-1} - H$ et $\hat{\Lambda}^- = -D\,M_{12}\underline{\xi_{12}}M_{12}^{-1} + H$ (voir (16.2)) les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned}
-(\hat{\Lambda}^- + \hat{\Lambda}_{\text{app}}^+)\widehat{\mathbf{U}}_-(L,\cdot,\cdot) &= (\hat{\Lambda}^+ - \hat{\Lambda}_{\text{app}}^+)\widehat{\mathbf{U}}_+(L,\cdot,\cdot),\\
-(\hat{\Lambda}^+ + \hat{\Lambda}_{\text{app}}^-)\widehat{\mathbf{U}}_+(0,\cdot,\cdot) &= (\hat{\Lambda}^- - \hat{\Lambda}_{\text{app}}^-)\widehat{\mathbf{U}}_-(0,\cdot,\cdot),
\end{aligned}\right.$$

et nous les écrivons sous la forme

$$\begin{aligned}
&-(\hat{\Lambda}^- + \hat{\Lambda}_{\text{app}}^+)M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}L}\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = (\hat{\Lambda}^+ - \hat{\Lambda}_{\text{app}}^+)M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}L}\boldsymbol{\beta}^k,\\
&-(\hat{\Lambda}^+ + \hat{\Lambda}_{\text{app}}^-)M_{34}\boldsymbol{\beta}^{k+1} = (\hat{\Lambda}^- - \hat{\Lambda}_{\text{app}}^-)M_{12}\boldsymbol{\alpha}^k.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors l'itération :

$$\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = \underline{e}^{\xi_{12}L}M_{12}^{-1}(\hat{\Lambda}^- + \hat{\Lambda}_{\text{app}}^+)^{-1}(\hat{\Lambda}^+ - \hat{\Lambda}_{\text{app}}^+)M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{34}^{-1}(\hat{\Lambda}^+ + \hat{\Lambda}_{\text{app}}^-)^{-1}(\hat{\Lambda}^- - \hat{\Lambda}_{\text{app}}^-)M_{12}\boldsymbol{\alpha}^{k-1}.$$

Nous notons $\tilde{T}$ la matrice d'itération de la suite $(\boldsymbol{\alpha}^k)_k$. Sur l'interface, l'algorithme converge de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{U}}_-^{k+1}(L,\eta,s) &= M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}L}\boldsymbol{\alpha}^{k+1} \\
&= M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}L}\tilde{T}\boldsymbol{\alpha}^{k-1} \\
&= M_{12}\underline{e}^{-\xi_{12}L}\tilde{T}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{12}^{-1}\widehat{\mathbf{U}}_-^{k-1}(L,\eta,s) \\
&= T\widehat{\mathbf{U}}_-^{k-1}(L,\eta,s),
\end{aligned}$$

avec $T = (\hat{\Lambda}^- + \hat{\Lambda}^+_{\text{app}})^{-1}(\hat{\Lambda}^+ - \hat{\Lambda}^+_{\text{app}})M_{34}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{34}^{-1}(\hat{\Lambda}^+ + \hat{\Lambda}^-_{\text{app}})^{-1}(\hat{\Lambda}^- - \hat{\Lambda}^-_{\text{app}})M_{12}\underline{e}^{\xi_{12}L}M_{12}^{-1}$.

Le taux de convergence de l'algorithme est alors défini par :

$$\rho = \max(|\lambda_i|^{1/2}, \lambda_i \text{ valeur propre de } TT^\star). \tag{19.8}$$

Chapitre 20

Approximation des conditions de transmission exactes

Dans la Section 16.1 nous avons introduit les opérateurs non différentiels $\hat{\Lambda}^+$ et $\hat{\Lambda}^-$ définis par :

$$\hat{\Lambda}^+ = -D\, M_{34} \underline{\xi_{12}} M_{34}^{-1} - H,$$

$$\hat{\Lambda}^- = -D\, M_{12} \underline{\xi_{12}} M_{12}^{-1} + H,$$

et nous avons montré qu'ils conduisent à la convergence en deux itérations de l'algorithme (16.1). Puisque nous ne pouvons pas utiliser ces opérateurs de façon pratique dans un algorithme, nous allons les approcher par des opérateurs différentiels.
Pour cela nous considérons le développement en viscosité petite des matrices $\hat{\Lambda}^+$ et $\hat{\Lambda}^-$, et nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{s}\sqrt{f^2+s^2} - \frac{f^2}{s^2}\sqrt{s\nu} + \frac{\sqrt{f^2+s^2}}{2s^2c}(3f^2+s^2)\nu + \mathcal{O}(\nu^{3/2}) & -\frac{f}{s}\sqrt{s\nu} + f\frac{\sqrt{f^2+s^2}}{cs}\nu + \mathcal{O}(\nu^{3/2}) \\ \frac{f}{s}\sqrt{s\nu} - f\frac{\sqrt{f^2+s^2}}{cs}\nu + \mathcal{O}(\nu^2) & \sqrt{s\nu} + \mathcal{O}(\nu^{3/2}) \end{pmatrix}.$$

Nous développons alors ce résultat en $|f| << 1$ et nous obtenons au premier ordre :

$$\hat{\Lambda}^+_{\text{app}} = \begin{pmatrix} c + \frac{s\nu}{2c} & 0 \\ 0 & \sqrt{s\nu} \end{pmatrix}.$$

20.1 Approximation d'ordre 1/2

L'approximation d'ordre 1/2 par rapport à ν de la matrice $\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}$ nous donne :

$$\hat{\Lambda}^+_{app1/2} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

avec p une constante positive à choisir. Ceci conduit alors aux conditions aux limites du côté Ω_- :

$$\begin{cases} -\nu\dfrac{\partial u_-^{k+1}}{\partial x} + c^2 h_-^{k+1} - cu_-^{k+1} = -\nu\dfrac{\partial u_+^k}{\partial x} + c^2 h_+^k - cu_+^k, \\ -\nu\dfrac{\partial v_-^{k+1}}{\partial x} - pv_-^{k+1} = -\nu\dfrac{\partial v_+^k}{\partial x} - pv_+^k. \end{cases}$$

Et du côté Ω_+ :

$$\begin{cases} \nu\dfrac{\partial u_-^{k+1}}{\partial x} - c^2 h_-^{k+1} - cu_-^{k+1} = \nu\dfrac{\partial u_+^k}{\partial x} - c^2 h_+^k - cu_+^k, \\ \nu\dfrac{\partial v_-^{k+1}}{\partial x} - pv_-^{k+1} = \nu\dfrac{\partial v_+^k}{\partial x} - pv_+^k. \end{cases}$$

Puisque les constantes p et $q = c$ sont positives, le Théorème 17.2.1 nous indique que l'algorithme associé à ces conditions est bien posé, et le Théorème 19.1.1 nous indique qu'il converge.

20.2 Approximation d'ordre 1

L'approximation d'ordre 1 par rapport à ν de la matrice $\hat{\Lambda}^+_{\text{app}}$ nous donne :

$$\hat{\Lambda}^+_{app1} = \begin{pmatrix} c + \dfrac{s\nu}{2c} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

avec p une constante positive. Nous obtenons la condition aux limites suivante dans Ω_- :

$$\begin{cases} -\nu\dfrac{\partial u_-^{k+1}}{\partial x} + c^2 h_-^{k+1} - cu_-^{k+1} - \dfrac{\nu}{2c}\dfrac{\partial u_-^{k+1}}{\partial t} = -\nu\dfrac{\partial u_+^k}{\partial x} + c^2 {h_+}^k - cu_+^k - \dfrac{\nu}{2c}\dfrac{\partial u_+^k}{\partial t} \\ -\nu\dfrac{\partial v_-^{k+1}}{\partial x} - pv_-^{k+1} = -\nu\dfrac{\partial v_+^k}{\partial x} - p{v_+}^k. \end{cases}$$

Et du côté Ω_+ :

$$\begin{cases} \nu\dfrac{\partial u_+^{k+1}}{\partial x} - c^2 h_+^{k+1} - cu_+^{k+1} - \dfrac{\nu}{2c}\dfrac{\partial u_+^{k+1}}{\partial t} = \nu\dfrac{\partial u_-^k}{\partial x} - c^2 {h_-}^k - cu_-^k - \dfrac{\nu}{2c}\dfrac{\partial u_-^k}{\partial t} \\ \nu\dfrac{\partial v_+^{k+1}}{\partial x} - pv_+^{k+1} = \nu\dfrac{\partial v_-^k}{\partial x} - pv_-^k. \end{cases}$$

Puisque les constantes p, $q = c$ et $\alpha = \nu/2c$ sont positives, le Théorème 18.3 nous indique que l'algorithme ainsi construit est bien posé. Et puisque la condition $\nu c^2/2c < c\nu$ est réalisée, le Théorème 19.2.1 nous indique que l'algorithme converge.

Chapitre 21

Schéma numérique

Dans ce chapitre nous décrivons le schéma numérique qui sera utilisé dans le Chapitre 22 pour discrétiser les équations de Saint-Venant sur $\Omega\times]0,T[$:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial u}{\partial t} & = & fv-\dfrac{c^2}{H}\dfrac{\partial h}{\partial x}+\nu\triangle u+\dfrac{\tau^x}{\rho_0 H},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -fu-\dfrac{c^2}{H}\dfrac{\partial h}{\partial y}+\nu\triangle v+\dfrac{\tau^y}{\rho_0 H},\\ \dfrac{\partial h}{\partial t} & = & -H\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right),\end{array}\right.$$

Des conditions aux limites de non glissement (Dirichlet) $u=v=0$ sont appliquées sur le bord de Ω. Dans la Section 21.1, nous donnons le schéma numérique utilisé pour discrétiser le problème global dans le domaine Ω. Puis dans la Section 21.2 nous détaillons la discrétisation de l'algorithme de décomposition de domaine que nous avons introduit aux Chapitres 16, 17 et 18 en particulier nous détaillons la discrétisation des conditions de transmission.

21.1 Discrétisation du problème global

Nous considérons $\mathcal{T}=(M_{i,j})_{0\leq i\leq N_x;0\leq j\leq N_y}$ un maillage régulier de Ω, avec $M_{i,j}$ la maille définie par $M_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, où nous avons introduit :

- ∘ $(x_i)_{0\leq i\leq N_x+1}$ la discrétisation de l'intervalle $[0,L_x]$ avec $x_0=0$, $x_{N_x+1}=L_x$ et $x_{i+1}-x_i=\Delta x=L_x/N_x$, pour $0\leq i\leq N_x$.
- ∘ $(y_j)_{0\leq j\leq N_{y+1}}$, la discrétisation de l'intervalle $[0,L_y]$ avec $y_0=0$, $y_{N_y}+1=L_y$ et $y_{j+1}-y_j=\Delta y=L_y/N_y$, $0\leq j\leq N_y$.

Nous travaillons ici avec la grille décalée appelée C dans la classification d'Arakawa (voir [3] (A. Arakawa et V.R. Lamb)), c.-à-d. une grille où les inconnues u, v

et h sont réparties sur la maille $M_{i,j}$ selon la Figure 21.1. La Figure 21.2 décrit la répartition des inconnues sur l'ensemble de la grille.

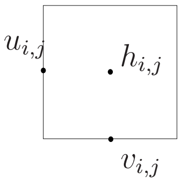


FIG. 21.1 – Maille $M_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

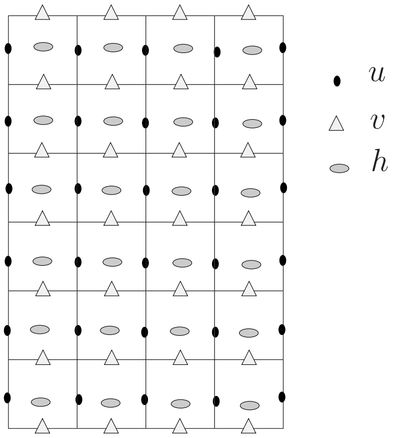


FIG. 21.2 – Maillage de Ω

Un schéma numérique classique pour traiter les équations de Saint-Venant linéarisées est un schéma aux différences finies semi-implicite en temps stabilisé par le filtre de Asselin suivant (voir [4] R. Asselin) :

$$\tilde{z}^{n-1} = z^{n-1} + \gamma(\tilde{z}^{n-2} - 2z^{n-1} + z^n), \tag{21.1}$$

avec γ une constante positive, et z^n l'approximation au temps n de u, v ou h.
Ici nous interprétons ce schéma aux différences finies par un calcul de flux au travers d'interfaces. Ce schéma est équivalent à celui des différences finies à l'intérieur du domaine. Cependant cette approche nous permettra de mettre en place facilement les conditions limites que nous avons à traiter dans le cadre de la décomposition de domaine.

21.1.1 Equation d'évolution en u

Pour discrétiser la dimension temporelle de l'équation (21) sur l'intervalle $]0, T[$, nous introduisons la suite :

$$(t_n)_{0 \leq n \leq N_t} \text{ avec } t_0 = 0,\ t_{N_t} = T \text{ et } t_{n+1} - t_n = \Delta t = T/N_t \text{ pour } 0 \leq n \leq N_t - 1.$$

Pour obtenir un schéma semi-implicite en temps (c.-à-d. implicite en u et explicite en v et h), nous décalons les variables u, v, et h sur la grille en temps : les inconnues discrètes sont notées $u^n_{i,j}$, $v^n_{i,j}$ et $h^n_{i,j}$; elles sont respectivement des approximations de la solution (u, v, h) sur les volumes $K^u_{i,j,n}$, $K^v_{i,j,n}$ $K^h_{i,j,n}$ avec :

$$K^u_{i,j,n} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_n, t_{n+1}],$$

$$K^v_{i,j,n} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}],$$

$$K^h_{i,j,n} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}].$$

La Figure 21.3 montre ces volumes dans l'espace $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t})$ par rapport à la maille $M_{i,j}$ indiquée en pointillés.

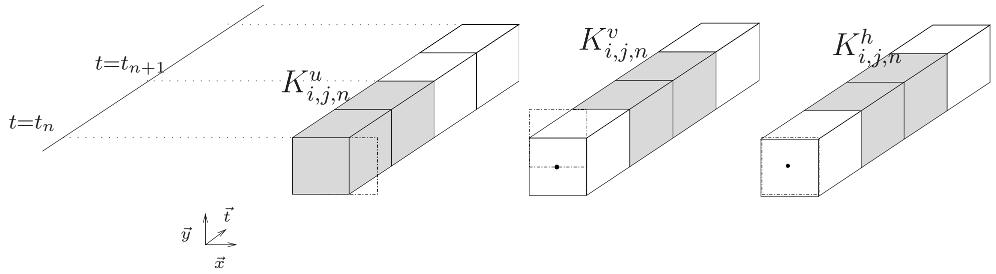


FIG. 21.3 – Décalage de la grille en temps (équation en u)

Schéma à l'intérieur du domaine

Nous intégrons l'équation (21) sur le volume $V^u_{i,j,n} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$ avec $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y - 1$ et $0 \leq n \leq T-1$ (voir Figure 21.4) :

$$\int_{V^u_{i,j,n}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{c^2}{H}\frac{\partial h}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdydt = \int_{V^u_{i,j,n}} F^x \, dxdydt.$$

où $F^x = \tau^x / \rho_0 H$.

Après intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (u(x,y,t_{n+3/2}) - u(x,y,t_{n+1/2}))\, dxdy - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} fv \, dxdydt \\
&+ \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[\left(\frac{c^2}{H} h - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x_{i+1/2}, y, t) - \left(\frac{c^2}{H} h - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x_{i-1/2}, y, t) \right] dydt \\
&-\nu \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_{j+1}, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_j, t) \right] dxdt = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} F^x \, dxdydt.
\end{aligned} \tag{21.2}$$

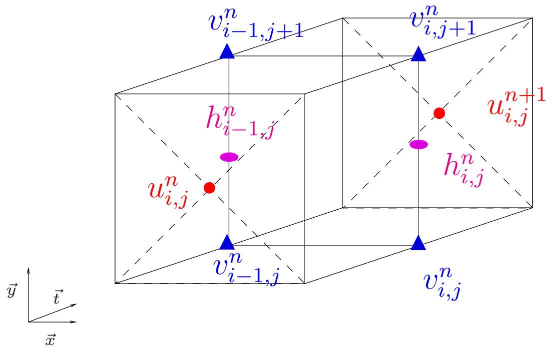


FIG. 21.4 – Volume d'intégration pour l'équation d'évolution en u : $V^u_{i,j,n} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$

Nous détaillons le terme en fv :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} fv\,dxdydt = \int_{x_{i-1/2}}^{x_i}\int_{y_j}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} fv\,dxdydt$$
$$+\int_{x_{i-1/2}}^{x_i}\int_{y_{j+1/2}}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} fv\,dxdydt$$
$$+\int_{x_i}^{x_{i+1/2}}\int_{y_j}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} fv\,dxdydt + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j+1/2}}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} fv\,dxdydt.$$

Or sur $[x_{i-1/2}, x_i]\times[y_j, y_{j+1/2}]\times[t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$ v est approché par $v^n_{i-1,j}$, sur $[x_{i-1/2}, x_i]\times[y_{j+1/2}, y_j] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$ v est approché par $v^n_{i-1,j+1}$ *etc...* Le terme en fv devient alors :

$$\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta y}{2}\Delta t f_{i,j}(v^n_{i,j} + v^n_{i,j+1} + v^n_{i-1,j} + v^n_{i-1,j+1}).$$

Par ailleurs le terme $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}}[\partial_y u(x, y_{j+1}, t) - \partial_y u(x, y_j, t)]\,dx\,dt$ sera approché par

$$\Delta x\frac{\Delta t}{2}(u^n_{i,j+1} - u^n_{i,j} + u^{n+1}_{i,j+1} - u^{n+1}_{i,j}) - \Delta x\frac{\Delta t}{2}(u^n_{i,j} - u^n_{i,j-1} + u^{n+1}_{i,j} - u^{n+1}_{i,j-1})$$
$$= \Delta x\frac{\Delta t}{2}(u^n_{i,j+1} + u^n_{i,j-1} - 2u^n_{i,j} + u^{n+1}_{i,j+1} + u^{n+1}_{i,j-1} - 2u^{n+1}_{i,j}).$$

Nous procédons de manière identique pour les autres termes de (21.2) et nous divisons le résultat par $\Delta x\,\Delta y\,\Delta t$. Nous trouvons pour $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y - 1$

et $0 \leq n \leq T-1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-\frac{1}{4}f_{i,j}(v_{i,j}^{n}+v_{i,j+1}^{n}+v_{i-1,j}^{n}+v_{i-1,j+1}^{n})+\frac{c^2}{H}\frac{1}{\Delta x}(h_{i,j}^{n}-h_{i-1,j}^{n})\\
&\quad-\frac{\nu}{2\Delta x^2}(u_{i+1,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n})-\frac{\nu}{2\Delta x^2}(u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1})\\
&-\frac{\nu}{2\Delta y^2}(u_{i,j+1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}-2u_{i,j}^{n})-\frac{\nu}{2\Delta y^2}(u_{i,j+1}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1})=(F_{i,j}^{x})^{n+1/2},
\end{aligned}$$

avec $(F_{i,j}^{x})^{n+1/2}=\dfrac{1}{\Delta x\Delta y\Delta t}\displaystyle\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j+1/2}}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}}F^{x}(x,y,t)\,dxdtdt.$

Schéma aux bords Est/Ouest

Comme le montre la Figure 21.2, sur les bords Est/Ouest les nœuds où sont calculés les $u_{i,j}^{n}$ coïncident avec les nœuds de la frontière. Les conditions de type Dirichlet : $u=0$, s'écrivent alors :

$$u_{0,j}^{n}=0,\quad u_{N_x+1,j}^{n}=0\quad \text{pour } 0\leq j\leq N_y,\ 0\leq n\leq N_T-1.$$

Schéma aux bords Nord/Sud

Sur les bords Nord/Sud, la condition aux limites de Dirichlet est plus délicate à traiter car les nœuds où sont calculés les $u_{i,j}^{n}$ ne correspondent pas aux nœuds de la frontière (voir la Figure 21.2).

Nous traitons ici le cas de la frontière Nord (celui de la frontière Sud se traite de manière identique). Pour cela nous notons u_{δ,N_y}^{n} l'approximation de u au temps n sur le bord Nord (voir la Figure 21.5). La condition de Dirichlet au temps $n+1/2$ s'écrit alors $(u_{\delta,N_y}^{n+1}+u_{\delta,N_y}^{n})/2=0$.

Nous reprenons alors l'expression (21.2) pour $j=N_y$. Le terme

$$-\nu\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_{N_y+1},t)\,dxdt,$$

est alors approché par

$$-\nu\Delta x\frac{\Delta t}{2}\Big(\frac{u_{\delta,N_y}^{n}-u_{i,N_y}^{n}}{\Delta y/2}+\frac{u_{\delta,N_y}^{n+1}-u_{i,N_y}^{n+1}}{\Delta y/2}\Big)=\frac{\nu\Delta x\Delta t}{\Delta y}(u_{i,N_y}^{n}+u_{i,N_y}^{n+1}).$$

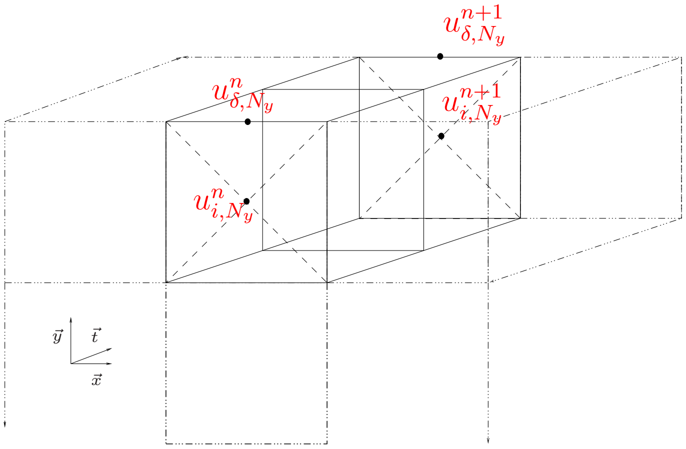


FIG. 21.5 – Discrétisation de la condition aux limites du bord Nord

Finalement pour $1 \leq i \leq N_x$ nous trouvons :

$$\frac{u^{n+1}_{i,N_y} - u^n_{i,N_y}}{\Delta t} - \frac{1}{4} f_{i,N_y}(v^n_{i,N_y} + v^n_{i,N_y+1} + v^n_{i-1,N_y} + v^n_{i-1,N_y+1}) + \frac{c^2}{H}\frac{1}{\Delta x}(h^n_{i,N_y} - h^n_{i-1,N_y})$$

$$-\frac{\nu}{2\Delta x^2}(u^n_{i+1,N_y} + u^n_{i-1,N_y} - 2u^n_{i,N_y}) - \frac{\nu}{2\Delta x^2}(u^{n+1}_{i+1,N_y} + u^{n+1}_{i-1,N_y} - 2u^{n+1}_{i,N_y})$$

$$-\frac{\nu}{2\Delta y^2}(u^n_{i,N_y-1} - 3u^n_{i,N_y}) - \frac{\nu}{2\Delta y^2}(u^{n+1}_{i,N_y-1} - 3u^{n+1}_{i,N_y}) = (F^x_{i,N_y})^{n+1/2}.$$

21.1.2 Equation d'évolution en v

Dans le but de réinterpréter le schéma semi-implicite en temps pour l'équation d'évolution en v (21) nous décalons la grille en temps selon la Figure 21.6.

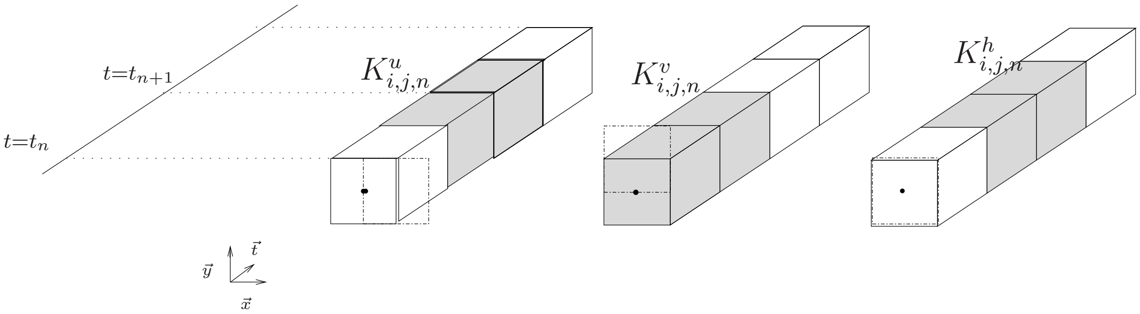


FIG. 21.6 – Décalage de la grille en temps (équation en v)

Schéma à l'intérieur du domaine

En intégrant l'équation (21) sur le volume $V^u_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$, nous trouvons pour $1 \le i \le N_x - 1$ et $1 \le j \le N_y$:

$$\begin{aligned}\frac{v^{n+1}_{i,j} - v^n_{i,j}}{\Delta t} &+ \frac{1}{4} f_{i,j}(u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j-1} + u^n_{i+1,j} + u^n_{i,j-1}) + \frac{c^2}{H}\frac{1}{\Delta y}(h^n_{i,j} - h^n_{i,j-1}) \\ &-\frac{\nu}{2\Delta x^2}(v^n_{i+1,j} + v^n_{i-1,j} - 2v^n_{i,j}) - \frac{\nu}{2\Delta x^2}(v^{n+1}_{i+1,j} + v^{n+1}_{i-1,j} - 2v^{n+1}_{i,j}) \\ -\frac{\nu}{2\Delta y^2}&(v^n_{i,j+1} + v^n_{i,j-1} - 2v^n_{i,j}) - \frac{\nu}{2\Delta y^2}(v^{n+1}_{i,j+1} + v^{n+1}_{i,j-1} - 2v^{n+1}_{i,j}) = (F^y_{i,j})^{n+1/2},\end{aligned} \tag{21.3}$$

avec $(F^y_{i,j})^{n+1/2} = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} F^y(x, y, t)\, dxdydt.$

Schéma aux bords Nord/Sud

Comme pour les bords Est/Ouest de l'équation en u, les conditions aux limites de Dirichlet $v = 0$ se traitent de façon directe au niveau des bords Nord/Sud (voir Figure 21.2).

Schéma aux bords Est/Ouest

Suivant le raisonnement qui a été fait pour le bord Nord de l'équation en u, sur le bord Est la condition de Dirichlet $v = 0$ se discrétise de la manière suivante pour $1 \le j \le N_y$:

$$\begin{aligned}\frac{v^{n+1}_{N_x,j} - v^n_{N_x,j}}{\Delta t} &+ \frac{1}{4} f_{N_x,j}(u^n_{N_x,j} + u^n_{N_x,j-1} + u^n_{N_x+1,j} + u^n_{N_x+1,j-1}) \\ &+\frac{c^2}{H}\frac{1}{\Delta y}(h^n_{N_x,j} - h^n_{N_x,j-1}) - \frac{\nu}{2\Delta x^2}(v^n_{N_x-1,j} - 3v^n_{N_x,j}) \\ -\frac{\nu}{2\Delta x^2}&(v^{n+1}_{N_x-1,j} - 3v^{n+1}_{N_x,j}) - \frac{\nu}{2\Delta y^2}(v^n_{N_x,j+1} + v^n_{N_x,j-1} - 2v^n_{N_x,j}) \\ &-\frac{\nu}{2\Delta y^2}(v^{n+1}_{N_x,j+1} + v^{n+1}_{N_x,j-1} - 2v^{n+1}_{N_x,j}) = (F^y_{N_x,j})^{n+1/2}.\end{aligned}$$

21.1.3 Equation d'évolution en h

Suivant la même méthode que pour les équations en u et en v, nous discrétisons l'équation (21) en l'intégrant sur le volume $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$, pour

$0 \leq i \leq N_x$, $0 \leq j \leq N_y$ et $0 \leq n \leq N_t - 1$ et nous trouvons :

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n}}{\Delta t} + H\left(\frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^{n} - v_{i,j}^{n}}{\Delta y}\right) = 0.$$

Notons que cette équation ne nécessite pas de conditions aux limites.

21.2 Discrétisation de l'algorithme de décomposition de domaine

Dans cette section nous explicitons le schéma utilisé pour discrétiser l'algorithme de décomposition de domaine (16.5). Nous décomposons Ω en deux sous-domaines :

$$\begin{aligned}\Omega_- &= \{(x,y),\, 0 \leq x \leq x_{interf} + L,\, 0 \leq y \leq Y\},\\ \Omega_+ &= \{(x,y),\, x_{interf} \leq x \leq X,\, 0 \leq y \leq Y\},\end{aligned}$$

avec $L \geq 0$ la taille du recouvrement et x_{interf} l'abscisse de l'interface.
Nous maillons chacun de ces domaines comme nous l'avons fait pour Ω : Ω_- est décomposé en $N_x^1 \times N_y^1$ mailles de surface $\Delta x \times \Delta y$ et Ω_+ est décomposé en $N_x^2 \times N_y^2$ mailles de surface $\Delta x \times \Delta y$.
Nous nous intéressons ici au problème du point de vue du domaine Ω_-, le problème dans Ω_+ se traitant de façon identique. Il s'agit alors de discrétiser le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathbf{W}_1 & = & \mathbf{F}_W & \text{dans } \Omega_-\times]0,T[,\\ \mathbf{W}_1(\cdot,\cdot,0) & = & \mathbf{W}_0 & \text{dans } \Omega_-,\\ -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \dfrac{c^2}{H}(h_1,0)^t - \Lambda_{app}^{+}\mathbf{U}_1 & = & -\nu\dfrac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \dfrac{c^2}{H}(h_2,0)^t - \Lambda_{app}^{+}\mathbf{U}_2 & \text{sur } \Gamma\times]0,T[, \end{cases}$$

où $(\mathbf{U}_2, h_2)$ est solution des équations de Saint-Venant dans Ω_+ et où Λ_{app}^{+} est un opérateur de la forme :

$$\Lambda_{app}^{+}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda u + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mu v \\ \tilde{\lambda} u + \tilde{\mu} v \end{pmatrix},$$

avec $\mathbf{U} = (u,v)$ et λ, α, μ, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ cinq réels.

Dans la Section 21.2.1 nous considérons l'équation d'évolution en u. Nous montrons premièrement comment discrétiser la condition aux limites :

$$-\nu\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{c^2}{H}h_1 - \lambda u_1 - \alpha\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu v_1 = g, \tag{21.4}$$

sur le bord Est de Ω_- et au niveau des coins. Puis nous montrons comment extraire la quantité $-\nu\partial_x u_2 + c^2 h_2/H - \lambda u_2 - \alpha\partial_t u_2 - \mu v_2$ du domaine Ω_+.

Dans la Section 21.2.2 nous considérons l'équation d'évolution en v. Nous montrons comment discrétiser la condition aux limites :

$$-\nu \frac{\partial v_1}{\partial x} - \tilde{\lambda} u_1 - \tilde{\mu} v_1 = g, \tag{21.5}$$

au niveau du bord Est de Ω_- et au niveau des coins, puis nous montrons comment extraire la quantité $-\nu \partial_x v_2 - \tilde{\lambda} u_2 - \tilde{\mu} v_2$ du domaine Ω_+.

21.2.1 Equation en u

Schéma au bord Est du domaine Ω_-

Au niveau du bord Est du domaine Ω_-, nous traitons l'équation d'évolution en u en l'intégrant sur le volume $\tilde{V}^u_{N_x^1,j,n} = [x_{N_x^1+1/2}, x_{N_x^1+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$ pour $0 \leq j \leq N_y - 1$ et $0 \leq n \leq N_t$ (voir la Figure 21.7).

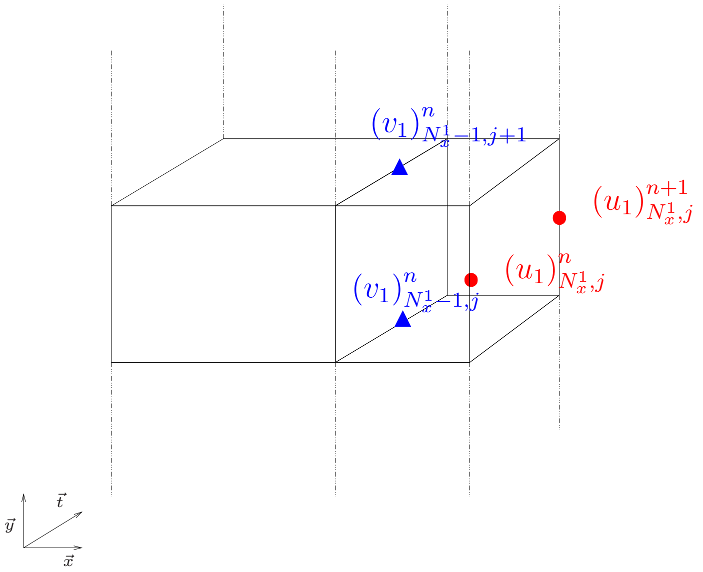


FIG. 21.7 – Discrétisation de la condition de transmission du bord Est

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{N_x^1+1/2}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} (u_1(x,y,t_{n+3/2}) - u_1(x,y,t_{n+1/2}))\,dxdy - \int_{x_{N_x^1+1/2}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} f v_1\,dxdydt\\
&+\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[\left(\frac{c^2}{H}h_1 - \nu\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)(x_{N_x^1+1},y,t) - \left(\frac{c^2}{H}h_1 - \nu\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)(x_{N_x^1+1/2},y,t)\right] dydt\\
&-\nu\int_{x_{N_x^1+1/2}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y_{j+1},t) - \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y_j,t)\right] dxdt = \int_{x_{N_x^1+1/2}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} F^x\,dxdydt.
\end{aligned}\tag{21.6}$$

Nous utilisons alors la condition aux limites (21.4) que nous écrivons $-\nu\partial_x u_1 + c^2h_1/H = \lambda u_1 + \alpha\partial_t u_1 + \mu v_1 + g$ en $x = x_{N_x^1+1}$ et nous écrivons :

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left(\frac{c^2}{H}h_1 - \nu\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)(x_{N_x^1+1},y,t) = \int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left(\lambda u_1 + \alpha\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mu v_1 + g\right)(x_{N_x^1+1},y,t).$$

Ce terme est approché par :

$$\begin{aligned}
\lambda\Delta y\frac{\Delta t}{2}((u_1)^n_{N_x^1+1,j} + (u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j}) &+ \alpha\Delta y((u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j} - (u_1)^n_{N_x^1+1,j})\\
&+\mu\frac{\Delta y}{2}\Delta t((v_1)^n_{N_x^1,j} + (v_1)^n_{N_x^1,j+1}) + \Delta y\Delta t g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j},
\end{aligned}$$

avec $g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} = \int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} g(y,t)\,dydt$. En approchant de la même manière les autres termes de (21.6), et en multipliant le résultat par $2/(\Delta x\Delta y\Delta t)$ nous obtenons alors pour $1 \le j \le N_y - 1$ et $0 \le n \le N_t$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j} - (u_1)^n_{N_x^1+1,j}}{\Delta t} - \frac{1}{2}f_{N_x^1+1,j}\left((v_1)^n_{N_x^1,j} + (v_1)^n_{N_x^1,j+1}\right) - \frac{2c^2}{H}\frac{1}{\Delta x}(h_1)^n_{N_x^1,j}\\
&\quad+\frac{\nu}{\Delta x^2}\left((u_1)^n_{N_x^1+1,j} - (u_1)^n_{N_x^1,j}\right) + \frac{\nu}{\Delta x^2}\left((u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j} - (u_1)^{n+1}_{N_x^1,j}\right)\\
&\quad-\frac{\nu}{2\Delta y^2}\left((u_1)^n_{N_x^1+1,j+1} + (u_1)^n_{N_x^1+1,j-1} - 2(u_1)^n_{N_x^1+1,j}\right)\\
&\quad-\frac{\nu}{2\Delta y^2}\left((u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j+1} + (u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j-1} - 2(u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j}\right)\\
&\quad+\frac{\lambda}{\Delta x}((u_1)^n_{N_x^1+1,j} + (u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j}) + \frac{2\alpha}{\Delta x\Delta t}((u_1)^{n+1}_{N_x^1+1,j} - (u_1)^n_{N_x^1+1,j})\\
&\quad+\frac{\mu}{\Delta x}((v_1)^n_{N_x^1,j} + (v_1)^n_{N_x^1,j+1}) = (F^x_{N_x^1+1,j})^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta x}g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}.
\end{aligned}$$

Schéma aux coins

Pour le traitement du coin Nord/Est par exemple, nous reprenons le calcul précédent et nous appliquons le raisonnement du bord Nord. Nous obtenons pour $1 \leq j \leq N_y - 1$:

$$\begin{gathered}
\frac{(u_1)^{n+1}_{N^1_x+1,N_y} - (u_1)^n_{N^1_x+1,N_y}}{\Delta t} - \frac{1}{2} f_{N^1_x,N^1_y}(v_1)^n_{N^1_x,N^1_y} - \frac{2c^2}{H}\frac{1}{\Delta x}(h_1)^n_{N^1_x,N^1_y} \\
+\frac{\nu}{\Delta x^2}((u_1)^n_{N^1_x+1,N^1_y} - (u_1)^n_{N^1_x,N^1_y}) + \frac{\nu}{\Delta x^2}((u_1)^{n+1}_{N^1_x+1,N^1_y} - (u_1)^{n+1}_{N^1_x,N^1_y}) \\
-\frac{\nu}{2\Delta y^2}((u_1)^n_{N^1_x+1,N^1_y-1} - 3(u_1)^n_{N^1_x+1,N^1_y}) - \frac{\nu}{2\Delta y^2}((u_1)^{n+1}_{N^1_x+1,N_y-1} - 3(u_1)^{n+1}_{N^1_x+1,N_y}) \\
+\frac{\lambda}{\Delta x}((u_1)^n_{N^1_x+1,N^1_y} + (u_1)^{n+1}_{N^1_x+1,N^1_y}) + \frac{2\alpha}{\Delta x \Delta t}((u_1)^{n+1}_{N^1_x+1,N^1_y} - (u_1)^n_{N^1_x+1,N^1_y}) \\
+\frac{\mu}{\Delta x}(v_1)^n_{N^1_x,N^1_y} = (F^x_{N^1_x+1,N^1_y})^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta x} g^{n+1/2}_{N^1_x+1,N^1_y}.
\end{gathered} \tag{21.7}$$

Le raisonnement est identique pour le coin Sud/Est.

Extraction de la condition de transmission : bord Ouest de Ω_+

Pour mettre en place la condition aux limites associée à l'équation en u de l'algorithme (16.5), il reste à discrétiser le second membre de la condition aux limites, c.-à-d. nous avons à calculer pour $1 \leq j \leq N_y - 1$:

$$g^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} = \frac{1}{\Delta y\, \Delta t} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left(-\nu \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{c^2}{H} h_2 - \lambda u_2 - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu v_2 \right) (x_{N^1_x+1,j}, y, t)\, dy\, dt.$$

Nous intégrons l'équation (21) sur le volume $[x_{N^1_x+1}, x_{N^1_x+3/2}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$ du domaine Ω_+.

$$\begin{gathered}
\int_{x_{N^1_x+1}}^{x_{N^1_x+3/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (u_2(x, y, t_{n+3/2}) - u_2(x, y, t_{n+1/2}))\, dxdy \\
- \int_{x_{N^1_x+1}}^{x_{N^1_x+3/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} f v_2 dxdydt \\
+ \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[\left(\frac{c^2}{H} h_2 - \nu \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) (x_{N^1_x+3/2}, y, t) - \left(\frac{c^2}{H} h_2 - \nu \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) (x_{N^1_x+1}, y, t) \right] dydt \\
-\nu \int_{x_{N^1_x+1}}^{x_{N^1_x+3/2}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[\frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y_{j+1}, t) - \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y_j, t) \right] dxdt \\
= \int_{x_{N^1_x+1}}^{x_{N^1_x+3/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} F^x\, dxdydt.
\end{gathered}$$

Nous en déduisons alors que la terme $(\Delta y\,\Delta t)^{-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}}\left(-\nu\partial_x u_2+c^2h_2/Hh_2\right)(x_{N_x^1+1},y,t)]\,dydt$ est approché par :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2}\Bigg[\frac{(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j}-(u_2)^{n}_{N_x^1+1,j}}{\Delta t}+-\frac{1}{2}f_{N_x^1+1,j}((v_2)^n_{N_x^1+1,j+1}+(v_2)^n_{N_x^1+1,j})\\
&\qquad\frac{2c^2}{H\Delta x}(h_2)^n_{N_x^1+1,j}-\frac{\nu}{\Delta x^2}((u_2)^n_{N_x^1+2,j}-(u_2)^n_{N_x^1+1,j})\\
&-\frac{\nu}{\Delta x^2}((u_2)^{n+1}_{N_x^1+2,j}-(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j})-\frac{\nu}{\Delta y^2}(u_2)^n_{N_x^1+1,j+1}+(u_2)^n_{N_x^1+1,j-1}-2(u_2)^n_{N_x^1+1,j}\\
&\qquad-\frac{\nu}{\Delta y^2}(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j+1}+(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j-1}-2(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j}-(F^x_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}\Bigg]
\end{aligned}
$$

et nous obtenons alors l'expression de $g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}$ pour $1\le j\le N_y-1$:

$$
\begin{aligned}
g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}&=\frac{\Delta x}{2}\Bigg[\frac{(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j}-(u_2)^{n}_{N_x^1+1,j}}{\Delta t}+\frac{2c^2}{H\Delta x}(h_2)^n_{N_x^1+1,j}\\
&-\frac{\nu}{\Delta x^2}((u_2)^n_{N_x^1+2,j}-(u_2)^n_{N_x^1+1,j})-\frac{\nu}{\Delta x^2}((u_2)^{n+1}_{N_x^1+2,j}-(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j})\\
&-\frac{\nu}{\Delta y^2}((u_2)^n_{N_x^1+2,j+1}+(u_2)^n_{N_x^1+1,j-1}-2(u_2)^n_{N_x^1+1,j})\\
&-\frac{\nu}{\Delta y^2}((u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j+1}+(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j-1}-2(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j})\\
&-\frac{1}{2}f_{N_x^1+1,j}((v_2)^n_{N_x^1+1,j+1}+(v_2)^n_{N_x^1+1,j})-(F^x_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}\Bigg]-\frac{\lambda}{2}((u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j}+(u_2)^n_{N_x^1+1,j})\\
&-\alpha\frac{(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,j}-(u_2)^{n}_{N_x^1+1,j}}{\Delta t}-\mu((v_2)^n_{N_x^1,j}+(v_2)^n_{N_x^1,j+1}).
\end{aligned}
$$

Extraction de la condition de transmission : coin Nord/Ouest

Au niveau du coin Nord/Ouest en reprenant le même raisonnement que dans les paragraphes précédents, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
g^{n+1/2}_{N_x^1+1,N_y} = \frac{\Delta x}{2}\Bigg[& \frac{(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,N_y} - (u_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y}}{\Delta t} + \frac{2c^2}{H\Delta x}(h_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y} \\
& -\frac{\nu}{\Delta x^2}((u_2)^{n}_{N_x^1+2,N_y} - (u_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y}) - \frac{\nu}{\Delta x^2}((u_2)^{n+1}_{N_x^1+2,N_y} - (u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,N_y}) \\
& -\frac{\nu}{\Delta y^2}((u_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y-1} - 3(u_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y}) \\
& -\frac{\nu}{\Delta y^2}((u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,N_y-1} - 3(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,N_y}) \\
& -\frac{1}{2}f_{N_x^1+1,N_y}((v_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y+1} + (v_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y}) - (F^x_{N_x^1+1,N_y})^{n+1/2}\Bigg] \\
& -\frac{\lambda}{2}((u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,N_y} + (u_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y}) \\
& -\alpha\frac{(u_2)^{n+1}_{N_x^1+1,N_y} - (u_2)^{n}_{N_x^1+1,N_y}}{\Delta t} - \mu((v_2)^{n}_{N_x^1,N_y} + (v_2)^{n}_{N_x^1,N_y+1}).
\end{aligned}
$$

21.2.2 Equation en v

Schéma au bord Est du domaine Ω_-

Nous traitons à présent la discrétisation de la condition aux limites (21.5) c.-à-d. la condition aux limites pour l'équation en v.
La Figure 21.8 représente une coupe du volume d'intégration au temps $n + 1/2$. Nous notons $(v_1)^{n+1/2}_\delta$ la valeur de v sur le bord au temps $n + 1/2$, et la condition aux limites $-\nu\partial_x v_1 - \tilde{\lambda} u_1 - \tilde{\mu} v_1 = g$ s'écrit :

$$
-\frac{2\nu}{\Delta x}((v_1)^{n+1/2}_\delta - (v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j}) = \frac{\tilde{\lambda}}{2}((u_1)^{n}_{N_x^1+1,j} + (u_1)^{n}_{N_x^1+1,j-1}) + \tilde{\mu}(v_1)^{n+1/2}_\delta + g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}.
$$

Ceci nous donne :

$$
\begin{aligned}
(v_1)^{n+1/2}_\delta \quad = \quad & -\frac{\Delta x}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x} g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} - \frac{\Delta x}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x}\frac{\tilde{\lambda}}{2}((u_1)^{n}_{N_x^1+1,j} + (u_1)^{n}_{N_x^1+1,j-1}) \\
& + \frac{\nu}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x}((v_1)^{n+1}_{N_x^1,j} + (v_1)^{n}_{N_x^1,j}).
\end{aligned} \tag{21.8}
$$

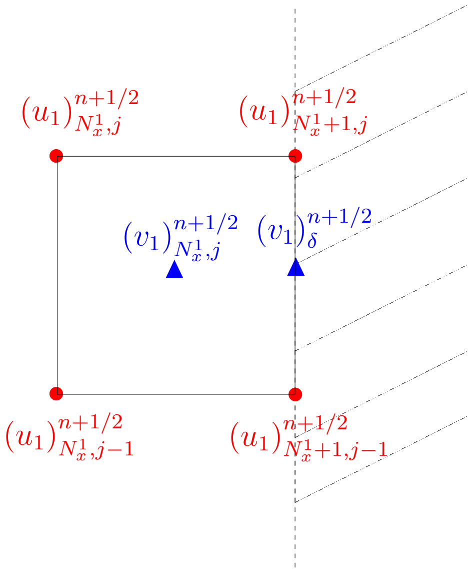


FIG. 21.8 – Discrétisation de la condition de transmission du bord Est

A présent nous intégrons l'équation (21) sur le volume $[x_{N_x^1}, x_{N_x^1+1}]\times[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]\times[t_{n+1/2}, t_{n+3/2}]$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{N_x^1}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (v_1(x,y,t_{n+3/2}) - v_1(x,y,t_{n+1/2}))\,dxdy \\
&\qquad + \int_{x_{N_x^1}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} f u_1\,dxdydt \\
&\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[(-\nu\frac{\partial v_1}{\partial x})(x_{N_x^1+1},y,t) - \left(-\nu\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)(x_{N_x^1},y,t)\right] dydt \\
&+ \int_{x_{N_x^1}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left[(-\nu\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{c^2}{H}h_1)(x,y_{j+1},t) - \left(-\nu\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{c^2}{H}h_1\right)(x,y_j,t)\right] dxdt \\
&\qquad = \int_{x_{N_x^1}}^{x_{N_x^1+1}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} F^y\,dxdydt.
\end{aligned} \tag{21.9}$$

Nous introduisons la condition aux limites $-\nu\partial_x v_1 = \tilde{\lambda} u_1 + \tilde{\mu} v_1 + g$ et en divisant l'approximation de cette expression par $\Delta x \Delta y \Delta t$, nous trouvons pour $0 \leq j \leq N_y$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(v_1)^{n+1}_{N^1_x,j} - (v_1)^n_{N^1_x,j}}{\Delta t} + \frac{1}{4} f_{N^1_x,j}((u_1)^n_{N^1_x,j} + (u_1)^n_{N^1_x+1,j-1} + (u_1)^n_{N^1_x+1,j} + (u_1)^n_{N^1_x,j-1}) \\
&+ \frac{c^2}{H}\frac{1}{\Delta y}(h^n_{N^1_x,j} - h^n_{N^1_x,j-1}) + \frac{\nu}{2\Delta x^2}((v_1)^{n+1}_{N^1_x,j} - (v_1)^{n+1}_{N^1_x-1,j}) + \frac{\nu}{2\Delta x^2}((v_1)^n_{N^1_x,j} - (v_1)^n_{N^1_x-1,j}) \\
&- \frac{\nu}{2\Delta y^2}((v_1)^n_{N^1_x,j+1} + (v_1)^n_{N^1_x,j-1} - 2(v_1)^n_{N^1_x,j}) - \frac{\nu}{2\Delta y^2}((v_1)^{n+1}_{N^1_x,j+1} + (v_1)^{n+1}_{N^1_x,j-1} - 2(v_1)^{n+1}_{N^1_x,j}) \\
&+ \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} (\tilde{\lambda} u_1 + \tilde{\mu} v_1 + g)(x_{N^1_x+1}, y, t)\ dydt = (F^y_{N^1_x,j})^{n+1/2},
\end{aligned}$$

avec $(F^y_{N^1_x,j})^{n+1/2} = \dfrac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t}\displaystyle\int_{x_{N^1_x}}^{x_{N^1_x+1}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} F^y(x,y,t)\,dxdydt$. Or par (21.8) nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} (\tilde{\lambda} u_1 + \tilde{\mu} v_1 + g)(x_{N^1_x+1}, y, t)\ dydt \\
&= \Delta y \Delta t \Bigg[\frac{\tilde{\lambda}}{2}((u_1)^n_{N_x+1,j} + (u_1)^n_{N_x+1,j-1}) - \frac{\tilde{\mu}\Delta x}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x} g^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} \\
&- \frac{\tilde{\mu}\Delta x}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x}\frac{\tilde{\lambda}}{2}((u_1)^n_{N^1_x+1,j} + (u_1)^n_{N^1_x+1,j-1}) + \frac{\nu\tilde{\mu}}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x}((v_1)^{n+1}_{N^1_x,j} + (v_1)^n_{N^1_x,j}) + g^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} \Bigg] \\
&= \Delta y \Delta t \Bigg[\frac{\tilde{\lambda}\nu}{(2\nu + \tilde{\mu}\Delta x)}((u_1)^n_{N_x+1,j} + (u_1)^n_{N_x+1,j-1}) + \frac{\nu\tilde{\mu}}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x}((v_1)^{n+1}_{N^1_x,j} + (v_1)^n_{N^1_x,j}) \\
&+ \frac{2\nu}{2\nu + \tilde{\mu}\Delta x} g^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} \Bigg]
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la condition aux limites pour $1 \leq j \leq N_y^1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(v_1)^{n+1}_{N_x^1,j} - (v_1)^n_{N_x^1,j}}{\Delta t} + \frac{1}{4} f_{N_x^1,j}((u_1)^n_{N_x^1,j} + (u_1)^n_{N_x^1+1,j-1} + (u_1)^n_{N_x^1+1,j} + (u_1)^n_{N_x^1,j-1}) \\
&\quad + \frac{c^2}{H}\frac{1}{\Delta y}(h^n_{N_x^1,j} - h^n_{N_x^1,j-1}) + \frac{\nu}{2\Delta x^2}((v_1)^{n+1}_{N_x^1,j} - (v_1)^{n+1}_{N_x^1-1,j}) \\
&\quad + \frac{\nu}{2\Delta x^2}((v_1)^n_{N_x^1,j} - (v_1)^n_{N_x^1-1,j}) \\
&- \frac{\nu}{2\Delta y^2}((v_1)^n_{N_x^1,j+1} + (v_1)^n_{N_x^1,j-1} - 2(v_1)^n_{N_x^1,j}) - \frac{\nu}{2\Delta y^2}((v_1)^{n+1}_{N_x^1,j+1} + (v_1)^{n+1}_{N_x^1,j-1} - 2(v_1)^{n+1}_{N_x^1,j}) \\
&\quad + \frac{\tilde{\lambda}\nu}{\Delta x(2\nu + \tilde{\mu}\Delta x)}((u_1)^n_{N_x+1,j} + (u_1)^n_{N_x+1,j-1}) + \frac{\nu\tilde{\mu}}{\Delta x(2\nu + \tilde{\mu}\Delta x)}((v_1)^{n+1}_{N_x^1,j} + (v_1)^n_{N_x^1,j}) \\
&\quad = (F^y_{N_x^1,j})^{n+1/2} - \frac{2\nu}{\Delta x(2\nu + \tilde{\mu}\Delta x)} g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}.
\end{aligned} \tag{21.10}$$

Extraction de la condition de transmission

Nous discrétisons à présent le second membre de la condition aux limites en v c.-à-d. nous cherchons à extraire la quantité $-\nu\partial_x v_2 - \tilde{\lambda}u_2 - \tilde{\mu}v_2$ du domaine Ω_+. Pour cela introduisons dans un premier temps la quantité $(G^v_{i,j})^{n+1/2}$, $1 \leq i \leq N_x^1$, $1 \leq j \leq N_y$ définie par :

$$\begin{aligned}
(G^v_{i,j})^{n+1/2} &= \frac{(v_1)^{n+1}_{i,j} - (v_1)^n_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{4} f_{i,j}(u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j-1} + u^n_{i+1,j} + u^n_{i,j-1}) \\
&+ \frac{c^2}{H}\frac{1}{\Delta y}(h^n_{i,j} - h^n_{i,j-1}) - \frac{\nu}{2\Delta y^2}((v_1)^n_{i,j+1} + (v_1)^n_{i,j-1} - 2(v_1)^n_{i,j}) \\
&- \frac{\nu}{2\Delta y^2}((v_1)^{n+1}_{i,j+1} + (v_1)^{n+1}_{i,j-1} - 2(v_1)^{n+1}_{i,j}),
\end{aligned}$$

ainsi (21.10) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&(G^v_{N_x^1,j})^{n+1/2} + \frac{\nu}{\Delta x^2}((v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j} - (v_1)^{n+1/2}_{N_x^1-1,j}) \\
&+ \frac{\tilde{\lambda}\nu}{\Delta x(2\nu + \tilde{\mu}\Delta x)}((u_1)^n_{N_x+1,j} + (u_1)^n_{N_x+1,j-1}) \\
&+ \frac{2\nu\tilde{\mu}}{\Delta x(2\nu + \tilde{\mu}\Delta x)}(v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j} = (F^y_{N_x^1,j})^{n+1/2} - \frac{2\nu}{\Delta x(2\nu + \tilde{\mu}\Delta x)} g^{n+1/2}_{N_x^1,j}.
\end{aligned} \tag{21.11}$$

Or si nous supposons que $(v_1)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}$ existe, nous récrivons la discrétisation de l'équation à l'intérieur du domaine (voir (21.3)) pour $1 \leq j \leq N_y^1$:

$$(G^v_{N_x^1,j})^{n+1/2} - \frac{\nu}{\Delta x^2}((v_1)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} + (v_1)^{n+1/2}_{N_x^1-1,j} - 2(v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j}) = (F^y_{N_x^1,j})^{n+1/2}. \tag{21.12}$$

En soustrayant (21.12) à (21.11) nous trouvons :

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{\Delta x^2}((v_1)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}-(v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j})+\frac{2\nu\tilde{\mu}}{\Delta x(2\nu+\tilde{\mu}\Delta x)}(v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j}\\ &+\frac{\tilde{\lambda}\nu}{\Delta x(2\nu+\tilde{\mu}\Delta x)}((u_1)^n_{N_x+1,j}+(u_1)^n_{N_x+1,j-1})=-\frac{2\nu}{\Delta x(2\nu+\tilde{\mu}\Delta x)}g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}.\end{aligned}$$

Nous multiplions cette expression par $-\Delta x(2\nu+\tilde{\mu}\Delta x)/2\nu$, puis en réarrangeant les termes, nous trouvons la discrétisation 'différences finies' de la condition (21.10) :

$$\begin{aligned}&-\frac{\nu}{\Delta x}((v_1)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}-(v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j})-\frac{\tilde{\mu}}{2}((v_1)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}+(v_1)^{n+1/2}_{N_x^1,j})\\ &-\frac{\tilde{\lambda}}{2}((u_1)^n_{N_x+1,j}+(u_1)^n_{N_x+1,j-1})=g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}.\end{aligned}$$

Nous extrairons donc dans Ω_+ la quantité équivalente. Si nous supposons que $(v_2)_{N_x^1,j}$ existe, le second membre g que nous devons extraire de Ω_+ est :

$$\begin{aligned}g=&-\frac{\nu}{\Delta x}((v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}-(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1,j})-\frac{\tilde{\mu}}{2}((v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}+(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1,j})\\ &-\frac{\tilde{\lambda}}{2}((u_2)^n_{N_x^1+1,j}+(u_2)^n_{N_x^1+1,j-1}),\end{aligned}\tag{21.13}$$

Or l'équation dans Ω_+ se discrétise comme suit :

$$(G^v_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}-\frac{\nu}{\Delta x^2}((v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+2,j}+(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1,j}-2(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j})=(F^y_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}&-\frac{\nu}{\Delta x}((v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}-(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1,j})\\ =\ &\Delta x(G^v_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}-\frac{\nu}{\Delta x}((v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+2,j}-(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j})-\Delta x(F^y_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}.\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}((v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}+(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1,j})\\ =\ &-\frac{1}{2}((v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+2,j}-3(v_2)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j})+\frac{\Delta x^2}{2\nu}(G^v_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}-\frac{\Delta x^2}{2\nu}(F^y_{N_x^1+1,j})^{n+1/2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent écrire la quantité à extraire de Ω_+ définie en (21.13) :

$$g = \Delta x(1 - \frac{\tilde{\mu}\Delta x}{2\nu})((G^v_{N^1_x+1,j})^{n+1/2} - (F^y_{N^1_x+1,j})^{n+1/2}) - \frac{\nu}{\Delta x}((v_2)^{n+1/2}_{N^1_x+2,j} - (v_2)^{n+1/2}_{N^1_x+1,j})$$
$$+\frac{\tilde{\mu}}{2}((v_2)^{n+1/2}_{N^1_x+2,j} - 3(v_2)^{n+1/2}_{N^1_x+1,j}) - \frac{\tilde{\lambda}}{2}((u_2)^n_{N^1_x+1,j} + (u_2)^n_{N^1_x+1,j-1}).$$

Chapitre 22

Résultats numériques

Dans ce chapitre nous exposons les résultats numériques que nous obtenons en mettant en œuvre les algorithmes introduits aux Chapitres 15, 16, 17 et 18. Dans la Section 22.1 nous présentons l'expérience physique sur laquelle nous allons travailler. Puis dans les Sections 22.2 et 22.3 nous résolvons ce problème par la méthode de Schwarz classique d'une part et par la méthode optimisée d'autre part et nous comparons les performances de ces deux méthodes.

22.1 Présentation de l'expérience

22.1.1 Données physiques

Nous mettons en œuvre l'expérience introduite dans [29] (T. G. Jensen et D. A. Kopriva), c.-à-d. nous travaillons sur le domaine Ω qui est rectangulaire de dimensions $L_x \times L_y$ avec $L_x = 15000$ km et $L_y = 3000$ km, et les données physiques sont les suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \nu & = & 500 \text{ m}^2/\text{s}, \\ \rho_0 & = & 1000 \text{ kg/m}^3, \\ H & = & 1 \text{ m}, \\ c & = & 3 \text{ m/s}. \end{array}$$

Pour la force de Coriolis nous faisons l'hypothèse du $\beta-$plan (voir par exemple [22] (A. E. Gill) ou [39] (J. Pedlosky)) c.-à-d.

$$f = f_0 + \beta y,$$

avec $\beta = 2 \cdot 10^{-11} \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ et puisque nous nous plaçons au niveau de l'équateur nous avons $f_0 = 0$.

Le forçage pris en compte dans ce modèle est le vent $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ qui est purement zonal (c.-à-d. $\tau_y = 0$) et vaut :

$$\tau_x = \frac{\tau_0}{2}(1 + \tanh(\frac{x_0 - x}{L})) \tag{22.1}$$

où $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-2}\mathrm{N/m}^2$, $x_0 = 3000\ km$ et $L = 300\ km$. Le profil de cette quantité est donné sur la Figure 22.1. Nous remarquons que la tension du vent vaut environ $\tau_0/2$ sur les 2500 premiers kilomètres du bassin, puis cette tension est quasi nulle à partir du kilomètre 3500 jusqu'au bout du bassin. Ainsi l'action de cette force extérieure n'agit que sur les 3000 premiers kilomètres du bassin.

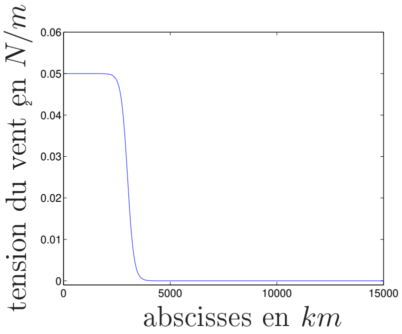


FIG. 22.1 – Profil du vent dans le bassin

Il s'agit d'une configuration idéalisée permettant d'étudier le déclenchement et la propagation d'ondes équatoriales.

22.1.2 Discrétisation du problème

La constante du filtre d'Asselin défini en (21.1) vaut $\gamma = 0.02$. Par ailleurs les pas d'espace et de temps valent :

$$\begin{aligned}\Delta x &= 25\,\mathrm{km},\\ \Delta y &= 15\,\mathrm{km},\\ \Delta t &= 30\,\mathrm{min}.\end{aligned}$$

Ceci signifie que $N_x = 600$ et $N_y = 200$ (voir Chapitre 21) et nous travaillerons sur l'intervalle de temps $T = 200$ jours, soit $200 \times 24 \times 2 = 9600$ pas de temps.

22.1.3 Comportement de la solution

Les Figures 22.2 et 22.3 montrent des isovaleurs de la solution (hauteur d'eau) aux temps $t = 10$, 30, 60, 100, 130, 150 et 200 jours. On se reportera à [29] (T. G. Jensen, D. A. Kopriva) pour la description complète du phénomène.

Au temps $t = 0$ le vent défini sur la Figure 22.1 est appliqué alors que l'océan est au repos. Le forçage du vent crée une anomalie de hauteur d'eau, de l'ordre de 10 mètres, qui se propage vers l'Est sous forme d'une onde de Kelvin. En considérant les résultats des jours 10 et 30, nous pouvons mesurer la vitesse de ces ondes : elles se propagent à une vitesse proche de $c = 3m/s$, c'est à dire la vitesse théorique attendue dans le cas sans viscosité et sans forçage. Un peu avant le jour 60, l'onde atteint le bord Est du bassin, s'y réfléchit et se décompose en quatre ondes : deux ondes de Kelvin côtières (l'une vers le Nord, l'autre vers le Sud) et deux ondes de Rossby se dirigeant vers l'Ouest, de part et d'autre de l'équateur. Après environ 100 jours, les ondes de Kelvin côtières atteignent les bords Nord et Sud du bassin, et se propagent alors vers l'Ouest le long de ces bords.

22.2 Résolution par méthode de décomposition de domaine

Dans cette section nous résolvons les équations de Saint-Venant (12.14) par méthode de décomposition de domaine avec des conditions de transmission de type Dirichlet (voir Chapitre 15) ou des conditions plus physiques (voir Chapitres 16, 20).

22.2.1 Mise en œuvre pratique

Nous expliquons dans un premier temps comment appliquer une méthode de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes sur un grand intervalle de temps. Puis nous détaillons les algorithmes de décomposition de domaine que nous mettons en œuvre.

Fenêtres en temps

Nous travaillons sur un intervalle de temps de longueur 200 jours et puisque le pas de temps vaut $\Delta t = 30\,min$, nous devons itérer sur $200 \times 24 \times 2 = 4800$ pas de temps. Le principe de la méthode de relaxation d'ondes consiste à résoudre le problème dans chaque sous-domaine sur tout l'intervalle de temps mais si celui-ci est trop grand, l'algorithme peut perdre de son efficacité et on a tout intérêt à décomposer l'intervalle de temps en plusieurs petits intervalles. Concrètement nous écrivons $[0,T] = \cup_{i=0,N-1}[T_i, T_{i+1}]$ avec $T_0 = 0$ et $T_N = T$, puis nous appliquons notre algorithme de décomposition de domaine sur chaque sous-intervalle ; nous résolvons premièrement $\mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}^0 = \mathbf{F}$ dans $\Omega\times]0, T_1[$ avec $\mathbf{W}^0(\cdot,\cdot,0) = \mathbf{W}_0$ dans Ω puis pour tout $i \geq 1$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}_{SW}\mathbf{W}^i & = & \mathbf{F} & \text{sur } \Omega\times]T_i, T_{i+1}[, \\ \mathbf{W}^i(\cdot,\cdot,T_i) & = & \mathbf{W}^{i-1}(\cdot,\cdot,T_{i-1}) & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{22.2}$$

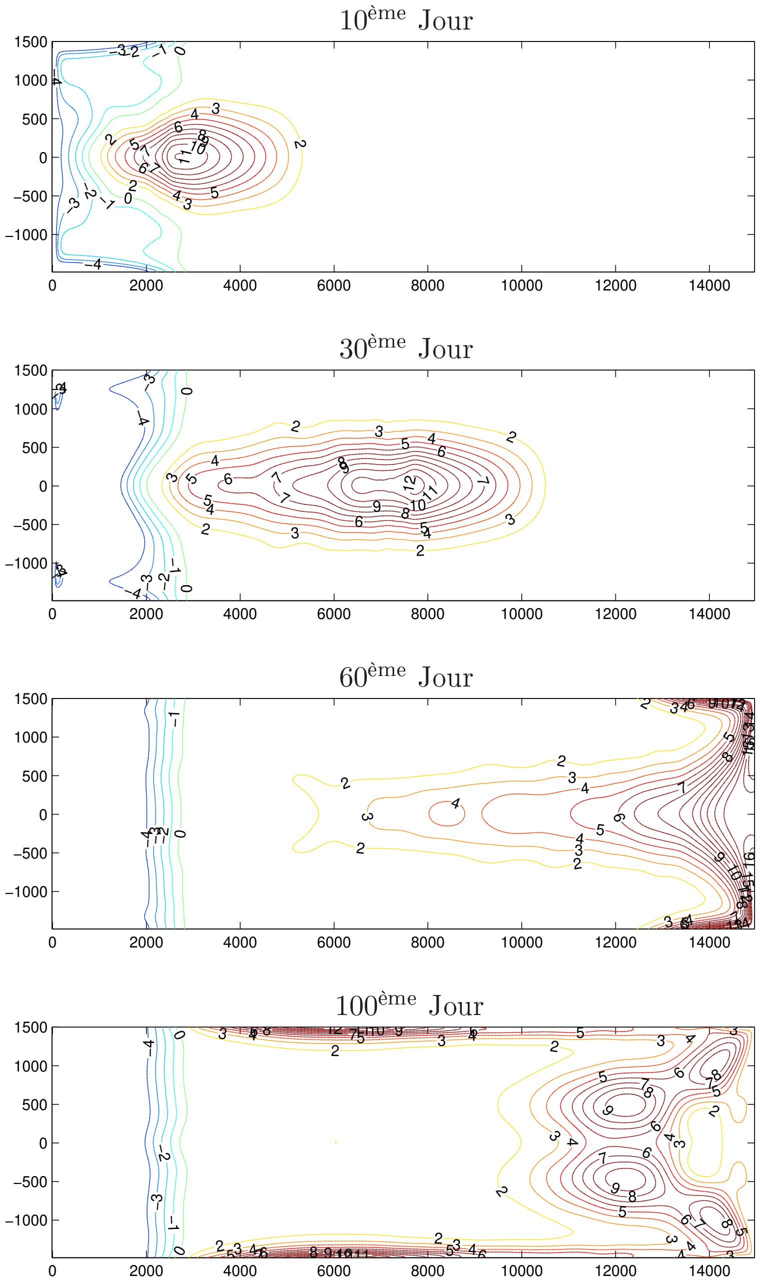
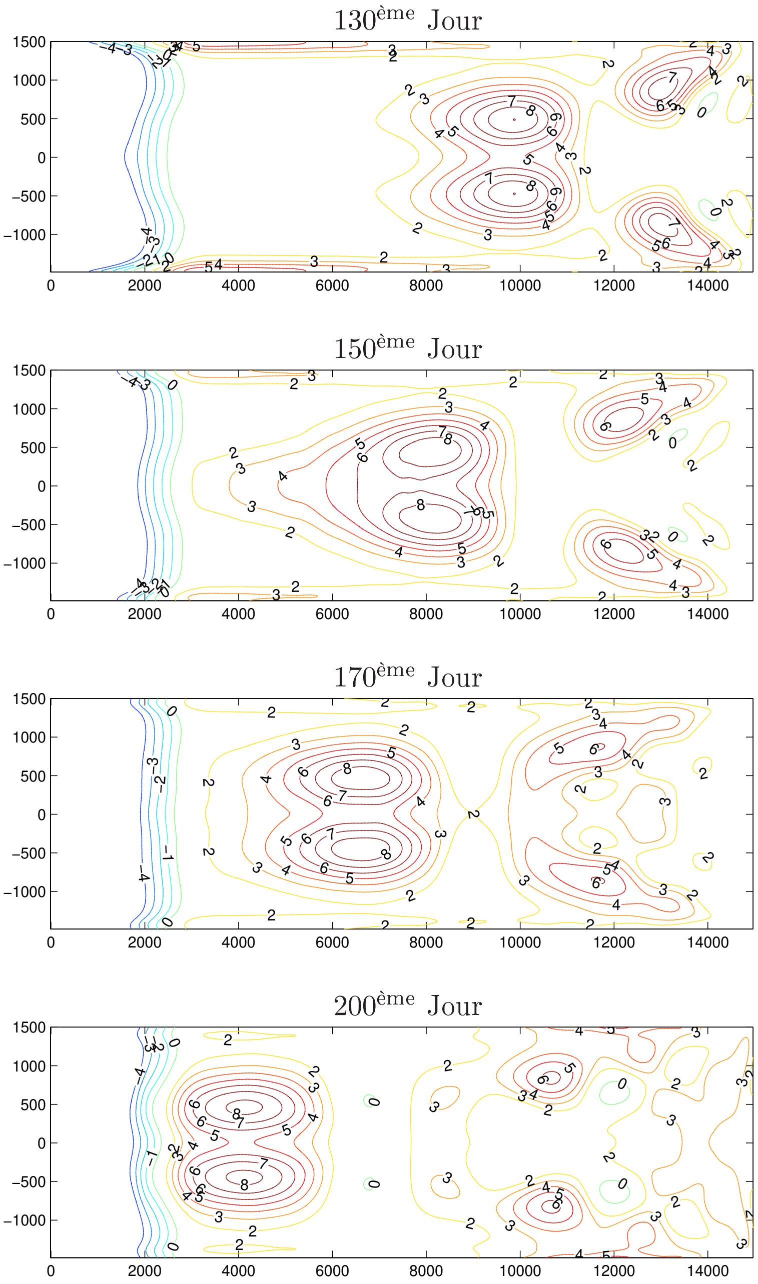


FIG. 22.2 – Hauteur d'eau aux temps t=10, 30, 60 et 100 jours


130$^{\text{ème}}$ Jour

150$^{\text{ème}}$ Jour

170$^{\text{ème}}$ Jour

200$^{\text{ème}}$ Jour

Fig. 22.3 – Hauteur d'eau aux temps t=130, 150, 170 et 200 jours

Ici nous prendrons $T_{i+1} - T_i = 10$ jours c.-à-d. nous travaillons sur 20 fenêtres de 10 jours.

Algorithmes de décomposition de domaine

Nous décomposons ici Ω en deux sous-domaines Ω_- et Ω_+ et l'interface commune se trouve en $x = 7500\,\text{km}$ c.-à-d. au milieu du domaine. Nous mettons en œuvre l'algorithme de Schwarz classique introduit dans le Chapitre 15 et l'algorithme avec des conditions d'ordre 1 introduit dans les Chapitres 16, 17 et 18. Ce dernier algorithme nécessite le choix d'une constante p. Cette constante est choisie par optimisation du taux de convergence défini en (19.8).

Par ailleurs, chaque algorithme de décomposition de domaine appliqué au problème (22.2) est initialisé par (voir la Section 18.2) $\mathbf{W}^{\text{init}}(\cdot,\cdot,t) = \mathbf{W}^{i-1}(\cdot,\cdot,T^{i-1})$ pour tout t dans $]T_i, T_{i+1}[$.

22.2.2 Résultats

Les Figures 22.4 et 22.5 montrent l'évolution du logarithme en base 10 de l'erreur $L^2(\Omega)$ sur u à la fin de la fenêtre en temps j en fonction des itérations pour $j =$ 10, 20, 30, 50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190 et 200 jours. L'erreur est la différence entre la solution de l'algorithme de décomposition de domaine et la solution calculée sur le domaine entier. Nous considérons un recouvrement de longueur une ou deux mailles, c.-à-d. du point de vue de la variable v un recouvrement de longueur 0 ou 1 maille (voir Figure 21.1).

Entre les jours 0 et 30 la solution est lisse et donc facile à raccorder. En effet, nous voyons que la vitesse de convergence des deux méthodes se fait de plus en plus lente entre les jours 10 et 30, moment auquel les ondes atteignent la frontière fictive. Puis la vitesse de convergence reste identique pour chaque fenêtre de temps. Dans le cas de deux mailles de recouvrement, nous remarquons que la méthode optimisée converge beaucoup plus rapidement que la méthode de Schwarz classique : elle nécessite pour converger 3 à 6 fois moins d'itérations suivant la précision choisie. Dans le cas d'une maille de recouvrement, la méthode optimisée est bien sûr un peu moins rapide qu'avec deux mailles.

22.3 Expérience à deux itérations

Dans les simulations numériques réalisées actuellement par les océanographes physiciens, les algorithmes de couplage entre par exemple un modèle grande échelle et un modèle plus local sont des méthodes assez frustres. En pratique, on a un recouvrement total du modèle grande échelle sur le modèle local. Le modèle grande échelle réalise une simulation, et les valeurs de sa solution aux frontières du modèle

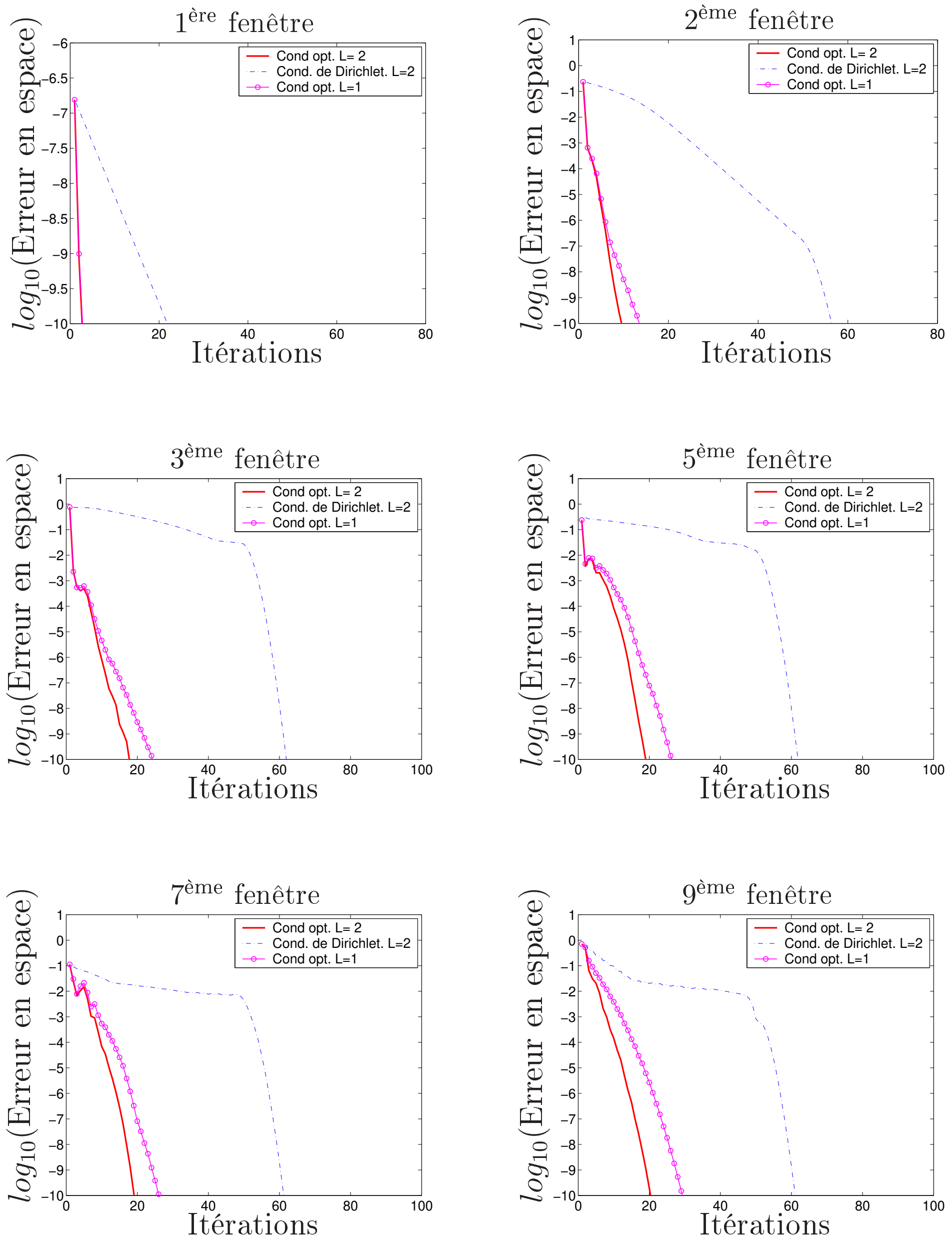
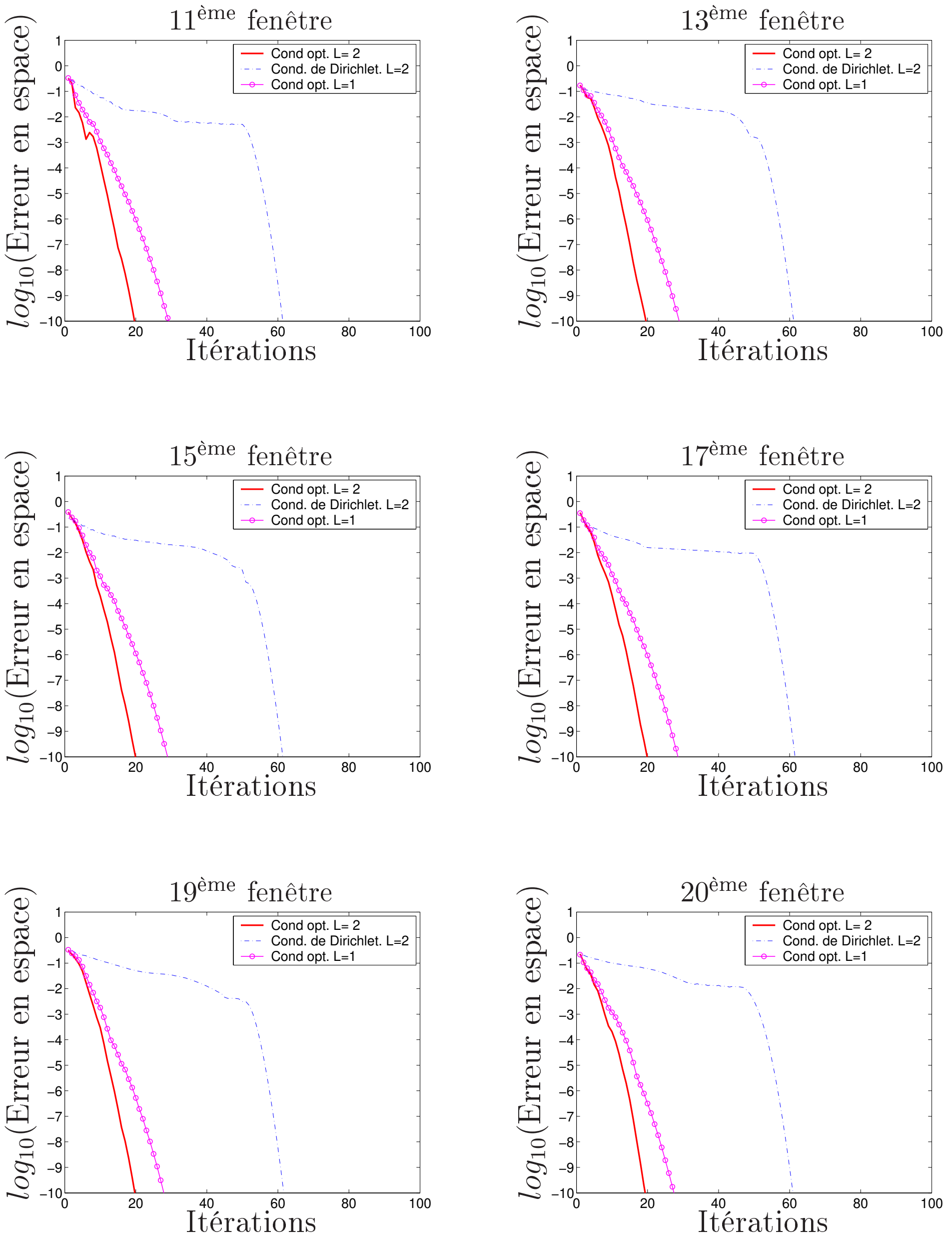


FIG. 22.4 – Evolution de l'erreur en espace à la fin de la fenêtre de temps j, pour j = 10, 20, 30 , 50 , 70 et 90 jours en fonction des itérations et avec un recouvrement de longueur $L\Delta x$



$11^{\text{ème}}$ fenêtre

$13^{\text{ème}}$ fenêtre

$15^{\text{ème}}$ fenêtre

$17^{\text{ème}}$ fenêtre

$19^{\text{ème}}$ fenêtre

$20^{\text{ème}}$ fenêtre

FIG. 22.5 – Evolution de l'erreur en espace à la fin de la fenêtre de temps j, pour $j = 110$, 130, 150 , 170 , 190 et 200 jours en fonction des itérations et avec un recouvrement de longueur $L\Delta x$

local sont utilisées par celui-ci comme conditions aux limites de Dirichlet. De plus, une rétroaction est parfois réalisée du modèle local vers le modèle grande échelle. Dans ce cas, on remplace la solution grande échelle par la solution locale là où elle est disponible, et ce à chaque pas de temps.

Cet algorithme, bien que très simple, peut être vu dans une certaine mesure comme une itération de Schwarz avec recouvrement total. S'il a été adopté par les physiciens, c'est parce qu'il présente en pratique l'avantage d'être très peu coûteux : il n'y a en effet quasiment aucun coût supplémentaire par rapport à celui des deux modèles. Il s'agit là d'un aspect essentiel, car les modèles océaniques réalistes demandent de grandes ressources de calcul.

Dans l'optique d'améliorer les procédures de couplage dans ces modèles, il semble prometteur d'utiliser des méthodes de type Schwarz. Toutefois, pour tenir compte de cette contrainte du coût des modèles, il sera sans doute nécessaire, tout au moins dans un premier temps, de ne réaliser qu'un nombre très limité d'itérations. C'est pourquoi nous avons réalisé également dans notre cas d'école des expériences à deux itérations, afin de mettre en évidence l'apport de bonnes conditions d'interface dans ce cadre.

Les Figures 22.6 et 22.7 montrent la solution (hauteur d'eau) obtenue après deux itérations de Schwarz classique dans chaque fenêtre de temps. Nous voyons qu'au jour 30 l'onde de Kelvin atteint l'interface fictive, interface entre les deux sous-domaines, et s'y réfléchit. Ainsi les conditions de Dirichlet inhibent complètement le transport de l'onde, qui n'arrive pas à passer la frontière et reste dans le premier sous-domaine.

Les Figures 22.8 et 22.9 montrent à présent la même expérience mais cette fois nous utilisons les conditions de transmission optimisées introduites aux Chapitres 16, 20. Nous voyons qu'alors l'onde de Kelvin traverse la frontière fictive. Même si elle présente une discontinuité sur cette interface (voir par exemple le jour $j = 60$), la solution avec des conditions optimisées est très proche de la solution monodomaine. Après sa réflexion sur le bord du bassin (jour 100) les différentes ondes formées sont légèrement déformées lors du deuxième passage de l'interface et la solution est un peu bruitée dans le domaine Ω_+. Nous voyons toutefois qu'au jour 200, les ondes de Kelvin atteignent le bord ouest à la même vitesse que les ondes de la solution monodomaine.

Ces résultats paraissent donc prometteurs quant à la faisabilité de couplages de type Schwarz avec un nombre très restreint d'itérations.

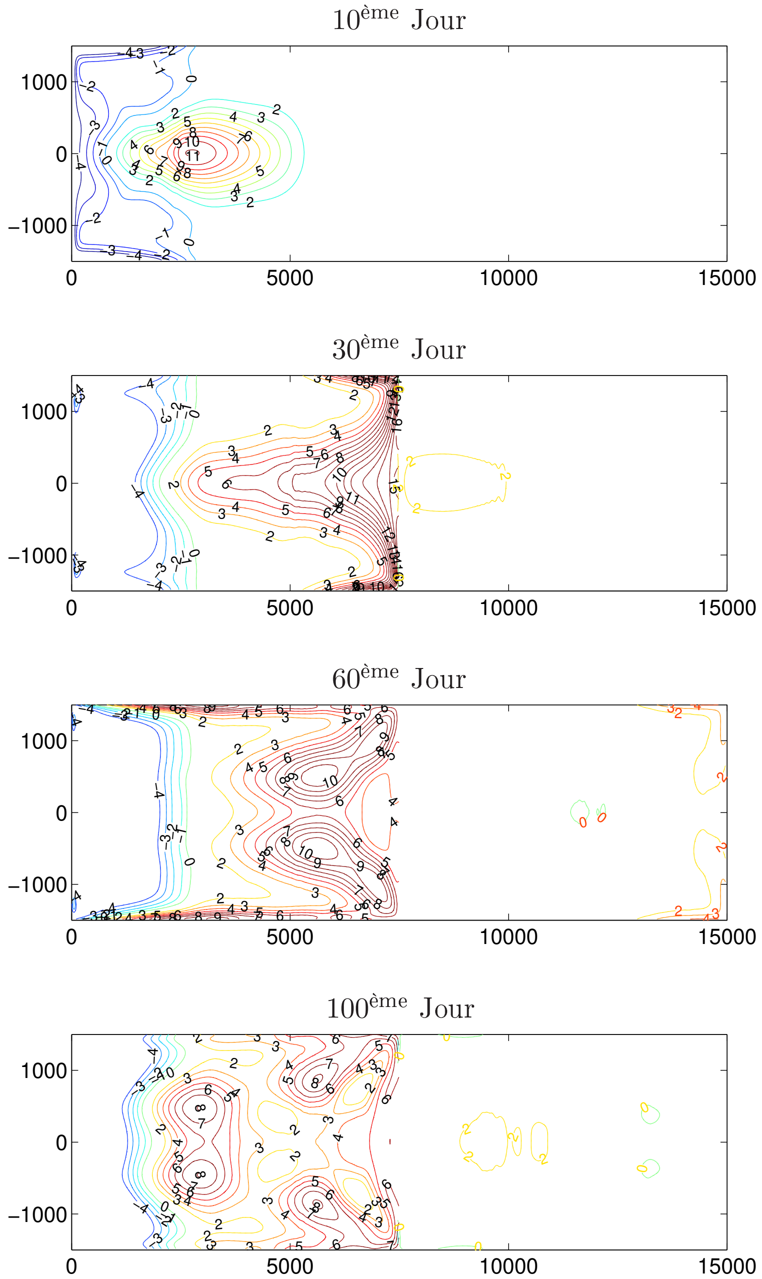


Fig. 22.6 – Solution après deux itérations de Schwarz et avec des conditions de Dirichlet aux temps t=10, 30, 60 et 100 jours

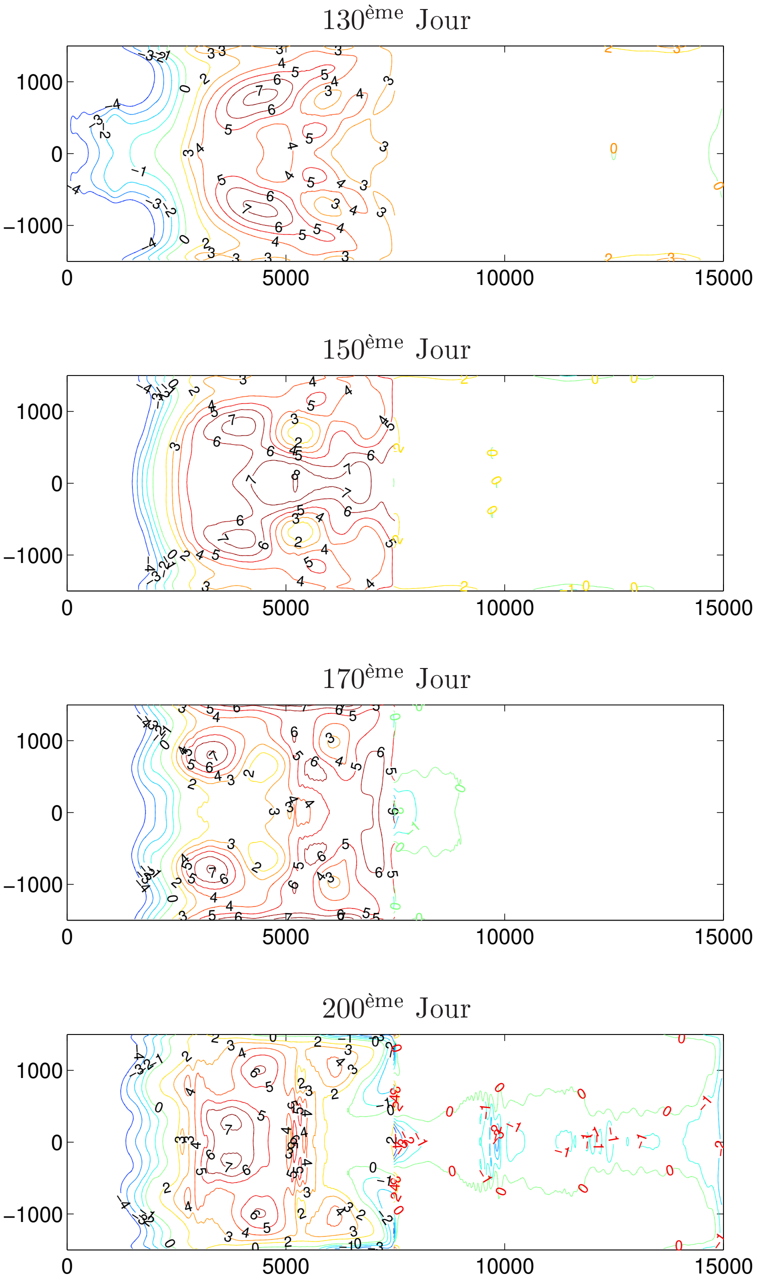
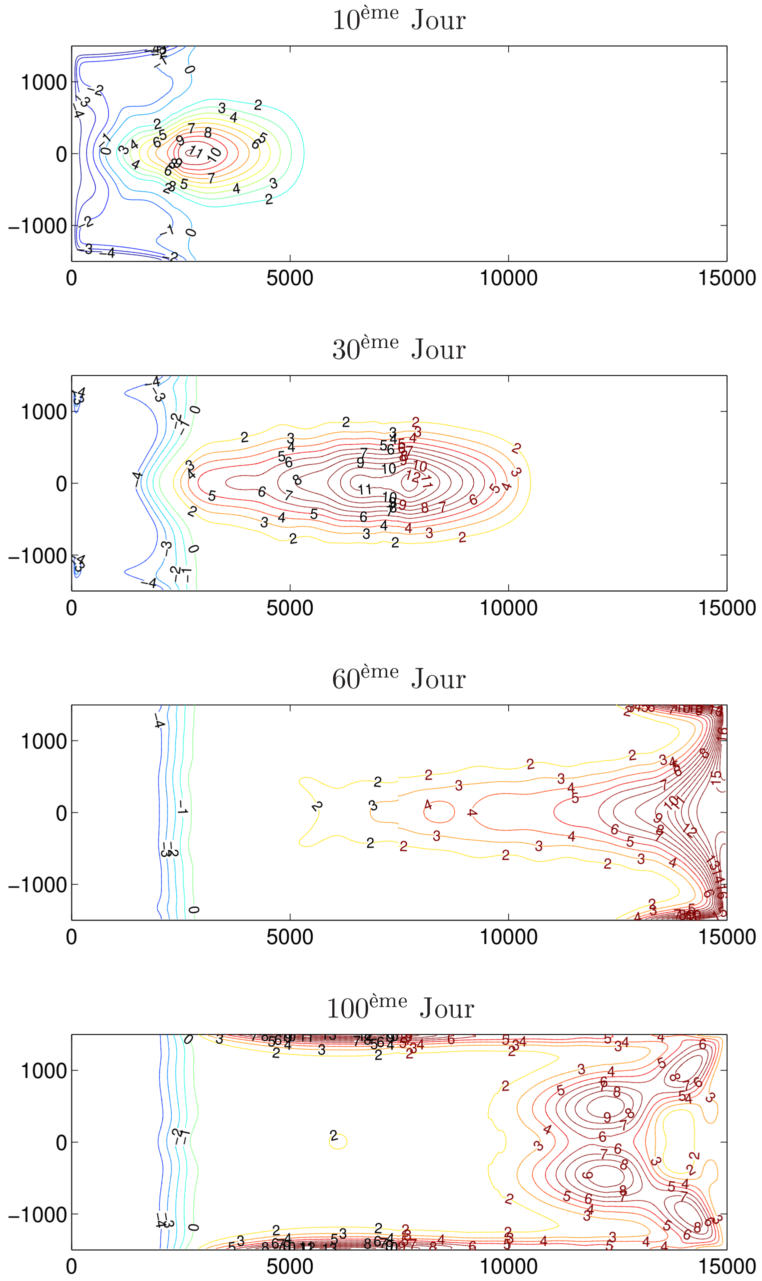


FIG. 22.7 – Solution après deux itérations de Schwarz et avec des conditions de Dirichlet aux temps t=130, 150, 170 et 200 jours



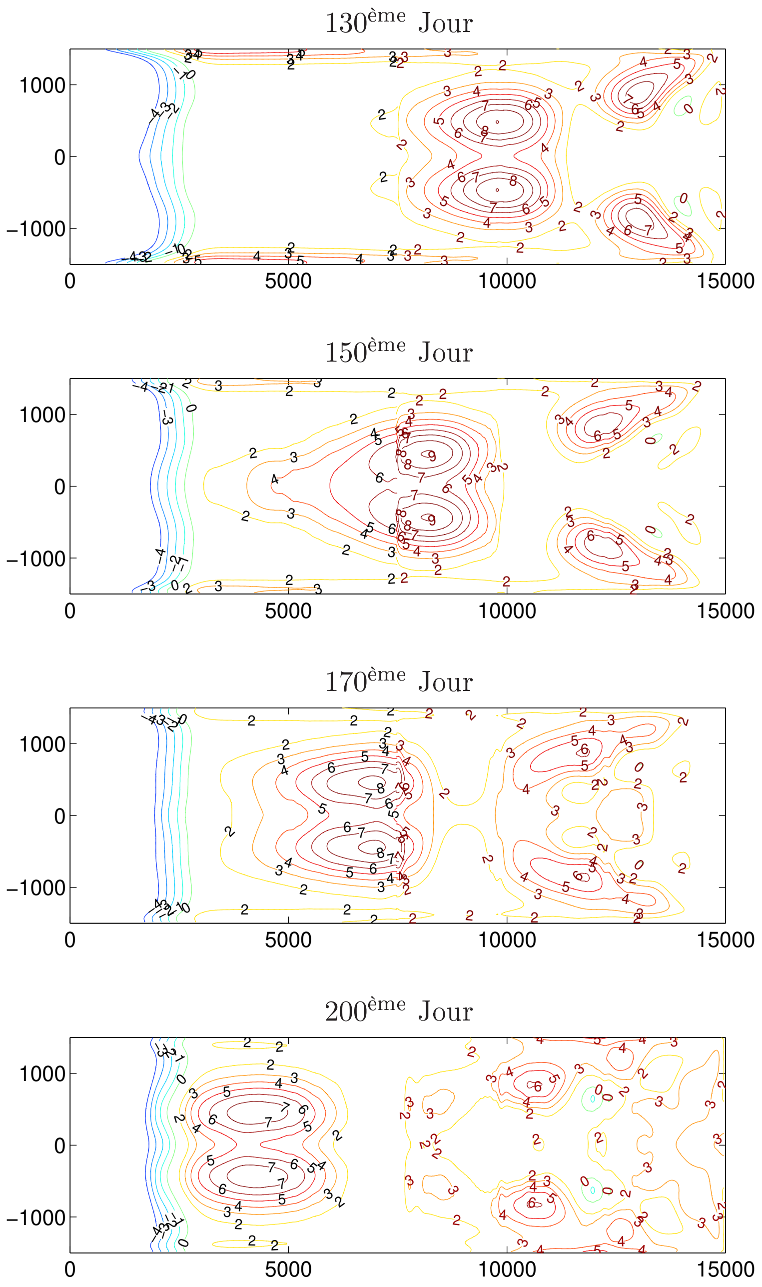
$10^{\text{ème}}$ Jour

$30^{\text{ème}}$ Jour

$60^{\text{ème}}$ Jour

$100^{\text{ème}}$ Jour

FIG. 22.8 – Solution après deux itérations de Schwarz et avec des conditions optimisées aux temps t=10, 30, 60 et 100 jours



130$^{\text{ème}}$ Jour

150$^{\text{ème}}$ Jour

170$^{\text{ème}}$ Jour

200$^{\text{ème}}$ Jour

FIG. 22.9 – Solution après deux itérations de Schwarz et avec des conditions optimisées aux temps t=100, 150, 170 et 200 jours

Chapitre 23

Conclusions et perspectives

Dans cette partie nous avons proposé et étudié des algorithmes de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour les équations de Saint-Venant.

Dans un premier temps, nous avons écrit un algorithme de décomposition de domaine en temps avec des conditions de transmission de type Dirichlet ; nous avons montré qu'il est bien posé et qu'il converge. Cette méthode est peu efficace et les résultats de la première partie de cette thèse ont motivé la recherche de conditions d'interface mieux adaptées.

Nous avons écrit alors un algorithme de décomposition de domaine optimal c.-à-d. un algorithme qui converge en deux itérations. Puisqu'il n'est pas exploitable en pratique, nous avons approché les opérateurs d'interface ainsi construits par des opérateurs différentiels. Nous avons pour cela développé les opérateurs exacts pour une viscosité ett une force de Coriolis petites. Nous avons obtenu des conditions d'ordre 0 (les opérateurs sont constants) ou d'ordre 1 (les opérateurs comportent une dérivée en temps) définies chacune à une constante près. Dans chacun de ces cas nous avons montré que les algorithmes correspondants sont bien posés et qu'ils convergent.

Les tests numériques montrent que les méthodes optimisées (qui prennent en considération la contrainte normale) sont bien plus efficaces que la méthode de Schwarz classique. A ce stade il semble intéressant d'aller plus loin et de proposer des conditions d'ordre plus élevé, en prenant notamment en compte d'autres données physiques. Il serait également intéressant d'appliquer ces algorithmes de décomposition de domaine aux équations de Saint-Venant avec des termes de convection.

Annexes

Annexe A

Espaces de Sobolev anisotropes

Pour des problèmes d'évolution, l'étude de la régularité des solutions faibles nécessite l'introduction des espaces de Sobolev dits anisotropes. Nous en rappelons ici la définition et donnons quelques théorèmes, utiles à cette étude. Nous renvoyons le lecteur à [34] (J.L. Lions et E. Magenes) pour plus de précisions.

A-1 Définition des espaces

Nous donnons ici la définition de l'espace $H^{r,s}(\Omega\times]0,T[)$, avec r et s deux réels strictement positifs pour Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^2$ et $T > 0$. Puis nous explicitons cet espace dans le cas particulier où Ω correspond à l'espace entier ou au demi-plan.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $T > 0$, nous définissons l'espace de Sobolev $H^{r,s}(\Omega\times]0,T[)$ comme suit :

$$H^{r,s}(\Omega\times]0,T[) = L^2(0,T;H^r(\Omega)) \cap H^s(0,T;L^2(\Omega)). \tag{A-1}$$

Dans le cas où Ω est l'espace entier et où l'intervalle de temps est infini, nous donnons une définition équivalente à (A-1) à l'aide de transformées de Fourier :

$$H^{r,s}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) = \Big\{ v \mid \big((1+|k|^2)^{r/2} + (1+\omega^2)^{s/2}\big)\ \hat{v}(k,\omega) \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \Big\},$$

où $\hat{v}(k,\omega)$ désigne la transformée de Fourier en espace et en temps de v :

$$\hat{v}(k,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} v(x,y,t) e^{-ik_1x} e^{-ik_2y} e^{-i\omega t}\, dx\, dy\, dt,$$

avec $k = (k_1, k_2)$.
Dans le cas où Ω est le demi-plan $\Omega = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ nous écrivons l'espace $H^{r,s}(\Omega\times]0,T[)$

de la manière suivante :

$$H^{r,s}(\Omega\times]0,T[) \;=\; L^2(\mathbb{R}^-; H^{r,s}(\mathbb{R}\times]0,T[)) \cap H^r(\mathbb{R}^-; L^2(\mathbb{R}\times]0,T[)).$$

Enfin, nous définissons ces espaces dans le cas de fonctions vectorielles dans $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{H}^{r,s}(\Omega\times]0,T[) = \{u = (u_1,u_2)/\ u_1 \in H^{r,s}(\Omega\times]0,T[) \text{ et } u_2 \in H^{r,s}(\Omega\times]0,T[)\}.$$

A-2 Régularité des solutions

Nous rappelons ici les résultats de [34] (J.L. Lions et E. Magenes) sur la régularité des solutions de problèmes d'évolution non homogènes. Soit $\mathcal{L}$ l'opérateur de convection-diffusion défini en (1.2), nous introduisons le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u & = & f & \text{dans } \mathbb{R}^2\times]0,T[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Sous une condition de compatibilité au temps $t = 0$, nous avons le résultat de régularité suivant avec k entier positif ou nul :

Théorème A-2.1 *Si f appartient à $H^{k,k/2}(\Omega\times]0,T[)$ et u_0 à $H^{k+1}(\Omega)$, alors u est dans $H^{k+2,k/2+1}(\Omega\times]0,T[)$.*

Nous avons un résultat analogue pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u & = & f & \text{dans } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot,\cdot) & = & g & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,T[. \end{cases}$$

Théorème A-2.2 *Soit f appartenant à $H^{k,k/2}(\Omega\times]0,T[)$, u_0 à $H^{k+1}(\Omega)$ et g à $H^{2+k-1/2,\frac{1}{2}(2+k-1/2)}$ avec f, g et u_0 telles qu'il existe U dans $H^{k+2,k/2+1}(\Omega\times]0,T[)$ telle que $U(0,\cdot,\cdot) = g$, $U(\cdot,\cdot,0) = u_0$ et $\partial_t^j(\mathcal{L}u)(\cdot,\cdot,0) = \partial_t^j f(\cdot,\cdot,0)$ pour $0 \le j < (k-1)/2$ (voir Théorème A-3.2) alors u est dans $H^{k+2,k/2+1}(\Omega\times]0,T[)$.*

A-3 Théorèmes de traces

Nous rappelons dans un premier temps le théorème suivant :

Théorème A-3.1 *Soit $u \in H^{r,s}(\Omega\times]0,T[)$ avec r et s deux réels strictement positifs et j, k deux entiers tels que $1 - \left(\dfrac{j}{r} + \dfrac{k}{s}\right) \ge 0$, nous avons :*

$$D_x^j \frac{\partial^k}{\partial t^k} u \in H^{\mu,\nu}(\Omega\times]0,T[),$$

avec $\dfrac{\mu}{r} = \dfrac{\nu}{s} = 1 - \left(\dfrac{j}{r} + \dfrac{k}{s}\right)$.

Puis nous introduisons le théorème de traces suivant, dans le cas où Ω est le demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ et où l'intervalle de temps est l'intervalle $]0, +\infty[$.
Soit F le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \Bigg\{ \quad (f_k, g_j) \in \prod_{k<s-1/2} H^{p_k}(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}) \times \prod_{j<r-1/2} H^{\mu_j,\nu_j}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[),$$

$$\frac{\mu_j}{r} = \frac{\nu_j}{s} = \frac{r-j-1/2}{r},\ p_k = \frac{r}{s}\big(s-k-1/2\big),\ k, j \text{ entiers}$$

tels que :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^j f_k}{\partial x^j}(\sigma^s, y) - \frac{\partial^k g_j}{\partial t^k}(y, \sigma^r)\right|^2 dy \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty \ \text{ si } \ \frac{j}{r} + \frac{k}{s} = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\Big)\ ,$$

$$\frac{\partial^k g_j}{\partial t^k}(\cdot, 0) = \frac{\partial^j f_k}{\partial x^j}(0, \cdot) \ \text{ sur } \Gamma \ \text{ si } \ \frac{j}{r} + \frac{k}{s} < 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\Big) \ \Bigg\}.$$

Théorème A-3.2 *Soient r et $s > 0$, tels que $1 - \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}\Big) > 0$. L'application*

$$u \to (f_k, g_j) = \begin{cases} \Big(\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, y, 0)\Big)_{k<s-1/2} \\ \Big(\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j}(0, y, t)\Big)_{j<r-1/2} \end{cases}$$

est linéaire, continue et surjective de $H^{r,s}(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}\times]0, +\infty[)$ dans F.

A-4 Théorème de prolongement

Le but du théorème de cette section est de déterminer dans quel espace se trouve le prolongement par 0 d'une fonction g. L'énoncé de ce théorème et sa démonstration seront trouvés dans [33] (J.L. Lions et E. Magenes).

Nous définissons dans un premier temps l'espace $H_0^s(]0, +\infty[)$ pour $s > 1/2$:

$$H_0^s(]0, +\infty[) = \{u \in H^s(]0, +\infty[),\ \frac{d^j u}{dt^j}(0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j < s - 1/2\}.$$

Puis nous donnons le théorème suivant avec u une fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Théorème A-4.1 *L'application*

$$u \to \tilde{u} = \begin{cases} u \ si \ t \geq 0, \\ 0 \ si \ t < 0 \end{cases}$$

est continue de $H^s(]0, +\infty[)$ *dans* $H^s(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $0 \leq s < 1/2$*. Et cette application est continue de* $H_0^s(]0, +\infty[)$ *dans* $H^s(\mathbb{R})$ *pour* $s > 1/2$ *si et seulement si* $s \neq$ *entier +1/2.*

Annexe B

Transformée de Laplace

Nous rappelons ici les principales propriétés de la transformée de Laplace. Pour plus de détails on pourra se reporter à [30] (O. Kreiss et J. Lorenz).

B-1 Liens entre la transformée de Laplace et la transformée de Fourier

Soit $u = u(t)$, $0 \leq t \leq +\infty$ une fonction continue telle qu'il existe $\alpha \geq 0$ et C avec :

$$|u(t)| \leq Ce^{\alpha t},\ t \geq 0.$$

Nous définissons la transformée de Laplace de u par :

$$(\mathcal{L}_t u)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t) dt, \text{ avec } s \in \mathbb{C} \text{ et } \mathcal{R}e(s) > \alpha,$$

et la transformée de Fourier d'une fonction v par :

$$\hat{v}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} v(t) dt.$$

Nous introduisons la fonction $u_\sigma(t)$ avec $\sigma > \alpha$:

$$u_\sigma(t) = \begin{cases} u(t)e^{-\sigma t} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

et sa transformée de Fourier est :

$$\hat{u}_\sigma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} u_\sigma(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} e^{-\sigma t} u(t)\, dt.$$

Nous trouvons donc la relation entre la transformée de Fourier de u_σ et la transformée de Laplace de u :

$$(\mathcal{L}_t u)(\sigma + i\omega) = \sqrt{2\pi}\, \hat{u}_\sigma(\omega) \text{ avec } \sigma > \alpha. \tag{B-1}$$

B-2 Relation de Parseval

La relation de Parseval nous donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |(\hat{u}_\sigma)(\omega)|^2 d\omega, \tag{B-2}$$

et en utilisant (B-1), nous obtenons :

$$\int_{0}^{+\infty} |u(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{L}_t u)(\sigma + i\omega)|^2 d\omega.$$

Nous en déduisons la relation suivante :

$$\int_{0}^{T} |u(t)|^2 dt \leq \frac{e^{2\sigma T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{L}_t u)(\sigma + i\omega)|^2 d\omega. \tag{B-3}$$

B-3 Transformée de Laplace et dérivée en temps

Supposons que $u(t)$ soit continûment différentiable en temps et que $|\frac{du}{dt}(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ alors par intégrations par parties nous trouvons :

$$\left(\mathcal{L}_t \frac{\partial u}{\partial t}\right)(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} \frac{du}{dt}(t) dt = s(\mathcal{L}_t u)(s) - u(0). \tag{B-4}$$

B-4 Principe de causalité

Le théorème suivant indique que si l'on peut borner la transformée de Laplace de la solution par la transformée de Laplace des données, alors une modification des données sur l'intervalle $]T + \epsilon, +\infty[$ ne change pas la solution sur l'intervalle $]0, T[$.

Théorème B-4.1 *Soient $u(t)$ et $g(t)$, $0 \leq t \leq +\infty$, deux fonctions continues et bornées par une exponentielle $ce^{\alpha t}$. Nous supposons que leur transformée de Laplace vérifient :*

$$|(\mathcal{L}_t u)(s)|^2 \leq c_1 |(\mathcal{L}_t g)(s)|^2 \text{ avec } \mathcal{R}e(s) > \alpha.$$

Si $g(t) \equiv 0$ pour $0 \leq t \leq T$ alors $u(t) \equiv 0$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

B-5 Transformée de Fourier pour un problème d'évolution

Dans cette section nous montrons que nous pouvons de façon équivalente traiter un problème d'évolution linéaire par transformée de Fourier ou par transformée de

Laplace.
Soit Ω^- un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Nous souhaitons résoudre le problème :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A(u) & = & f & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & u_0 & \text{dans } \Omega^-, \end{array}\right. \tag{B-5}$$

avec A un opérateur qui ne dépend pas du temps (dans le cas de l'équation de convection-diffusion, par exemple, $A=\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla-\nu\triangle$).
En multipliant l'équation par $e^{-\sigma t}$, nous obtenons $\partial_t u e^{-\sigma t}+A(u)e^{-\sigma t}=fe^{-\sigma t}$, c.-à-d.

$$\frac{\partial v}{\partial t}+A(v)+\sigma v=fe^{-\sigma t}, \tag{B-6}$$

où l'on a posé $v=ue^{-\sigma t}$.
Puis nous multiplions cette nouvelle équation par l'indicatrice χ définie par

$$\chi=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } t\geq 0, \\ 0 & \text{si } t<0. \end{array}\right.$$

Nous obtenons $\dfrac{\partial v}{\partial t}\chi+A(v\chi)+\sigma v\chi=fe^{-\sigma t}\chi$ c.-à-d.

$$\frac{\partial(v\chi)}{\partial t}+A(\chi v)+\sigma v\chi=\chi fe^{-\sigma t}+u_0\delta_0,$$

où δ_0 désigne la masse de Dirac en 0.
Si à présent nous prenons la transformée de Fourier de cette équation nous trouvons :

$$(i\omega+\sigma)\widehat{\chi v}+A(\widehat{\chi v})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u_0+\widehat{f\chi}.$$

Par ailleurs, si nous prenons la transformée de Laplace de l'équation initiale (B-5) nous obtenons (voir (B-4)) :

$$s(\mathcal{L}_t u)(s)+A((\mathcal{L}_t u)(s))=u_0+(\mathcal{L}_t f)(s) \text{ avec } s=\sigma+i\omega,$$

et grâce à (B-1) nous concluons que prendre la transformée de Laplace en temps de l'équation dans $\Omega^-\times]0,+\infty[$ de (B-5) revient à prendre la transformée de Fourier en temps de l'équation (B-6).

Annexe C

Lemmes techniques pour le Chapitre 5

Nous énonçons et démontrons ici les lemmes techniques que nous avons utilisés au cours du Chapitre 5. Nous rappelons que les quantités σ^+ et $\delta^{1/2}$ ont été définies en (2.16) et (2.15) et que a, b, ν c, p et q sont des quantités réelles avec notamment $p > 0$ et $q > 0$.

Lemme C-0.1 *Il existe deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que :*

$$f_1(k,\omega) = \frac{(1+\omega^2)^{1/8}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \leq C_1 \text{ pour tout } (k,\omega) \in \mathbb{R}^2,$$
$$f_2(k,\omega) = \frac{(1+k^2)^{1/4}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \leq C_2 \text{ pour tout } (k,\omega) \in \mathbb{R}^2.$$

PREUVE : Nous avons $\sigma^+ = (a+\delta^{1/2})/2\nu$ avec $\mathcal{R}e(\delta^{1/2}) = (R+\sqrt{R^2+I^2})^{1/2}/\sqrt{2}$, $R = a^2 + 4\nu c + 4\nu^2 k^2$ et $I = 4\nu(\omega + bk)$ et nous considérons les deux cas :

i. Nous considérons premièrement le cas où $|\omega|$ et $|k|$ tendent vers l'infini à la même vitesse, et le cas où $|k|$ croît plus vite que $|\omega|$, c.-à-d. :

$$\left|\frac{\omega}{k}\right| \to l,\ l \geq 0 \text{ quand } |k|, |\omega| \to +\infty.$$

Puisque $R^2+I^2 = 16\,\nu^4 k^4 + 8\,\nu^2\,(a^2 + 4\,\nu\,c + 2\,b^2)\,k^2 + 32\,\nu^2\omega\,bk + (a^2 + 4\,\nu\,c)^2 + 16\,\nu^2\omega^2$ nous avons alors : $R^2 + I^2 \sim 16\nu^4 k^4$ et par suite :

$$\mathcal{R}e(\sigma^+) = \frac{a}{2\nu} + \frac{1}{2\nu}\frac{1}{\sqrt{2}}(R+\sqrt{R^2+I^2})^{1/2} \sim |k|.$$

Nous en concluons que dans ce cas :

$$\frac{(1+\omega^2)^{1/8}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \sim \left|\frac{\omega}{k^2}\right|^{1/4} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{(1+k^2)^{1/4}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \to 1.$$

c.-à-d. $f_1(k,\omega)$ et $f_2(k,\omega)$ tendent vers une limite finie quand $|\omega|/|k| \to l$.

ii. A présent nous étudions le cas où $|k|$ et $|\omega|$ tendent vers l'infini avec $|\omega|$ croissant plus vite que $|k|$, c.-à-d. :

$$\left|\frac{k}{\omega}\right| \to 0 \text{ quand } |k|, |\omega| \to +\infty.$$

Nous avons alors $R^2 + I^2 = 16\,\nu^4 k^4 + 8\,\nu^2\,(a^2 + 4\,\nu\,c + 2\,b^2)\,k^2 + 32\,\nu^2\omega\,bk + (a^2 + 4\,\nu\,c)^2 + 16\,\nu^2\omega^2$ c.-à-d. :

$$R^2 + I^2 \sim \begin{cases} 16\nu^2\omega^2 & \text{si } |\omega| \gg k^2 \\ 16\nu^4 k^4 & \text{si } |\omega| \ll k^2. \end{cases}$$

Donc si $|\omega| \gg k^2$ alors $\mathcal{R}e(\sigma^+) \sim |\omega|^{1/2}/\sqrt{2\nu}$ et nous avons :

$$\frac{(1+\omega^2)^{1/8}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \to (2\nu)^{1/4} \quad \text{et} \quad \frac{(1+k^2)^{1/4}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \sim (2\nu)^{1/4}\left|\frac{k^2}{\omega}\right|^{1/4} \to 0.$$

Si $|\omega| \ll k^2$ alors $\mathcal{R}e(\sigma^+) \sim |k|$ et :

$$\frac{(1+\omega^2)^{1/8}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \sim \left|\frac{\omega}{k^2}\right|^{1/4} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{(1+k^2)^{1/4}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \to 1,$$

c.-a-d. $f_1(k,\omega)$ et $f_2(k,\omega)$ tendent vers une limite finie quand $|k|/|\omega| \to 0$.

Les résultats i., et ii. montrent que les applications continues $(k,\omega) \to f_1(k,\omega)$ et $(k,\omega) \to f_2(k,\omega)$ sont bornées à l'infini et que par conséquent elles sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. D'où le résultat du lemme. □

Lemme C-0.2 *Il existe trois constantes C_3, C_4 et C_5 strictement positives telles que :*

$$f_3(k,\omega) = \frac{(1+\omega^2)^{1/2}}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)|} \leq C_3 \textit{ pour tout } (k,\omega) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_4(k,\omega) = \frac{(1+k^2)^{1/2}}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)|} \leq C_4 \textit{ pour tout } (k,\omega) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_5(k,\omega) = \frac{|\alpha + iq(\omega + bk)|}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)|} \leq C_5 \textit{ pour tout } (k,\omega) \in \mathbb{R}^2,$$

avec α un nombre réel.

PREUVE : Nous rappelons que $\delta = a^2 + 4\nu c + 4\nu i(\omega + bk) + 4\nu^2 k^2$ et nous reprenons le raisonnement du lemme précédent :

i. Cas où $|\omega|/|k| \to l,\ l \geq 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$.
Dans ce cas $\delta^{1/2} \sim 2\nu|k|$ et donc $|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)| \sim c_1|k|$ (c_1 une constante strictement positive). Nous en déduisons que dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{(1+\omega^2)^{1/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\to \frac{l}{c_1},\\ \frac{(1+k^2)^{1/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\to \frac{1}{c_1},\\ \frac{|\alpha+iq(\omega+bk)|}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\to \frac{|q(b+l)|}{c_1}.\end{aligned}$$

ii. Cas où $|k|/|\omega| \to 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$ et $|\omega| \gg k^2$.
Dans ce cas $\delta^{1/2} \sim c_2|\omega|^{1/2}$ (c_2 une constante strictement positive) et donc $|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)| \sim 2\nu|\omega|$, nous en déduisons que dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{(1+\omega^2)^{1/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\to \frac{1}{2\nu},\\ \frac{(1+k^2)^{1/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\sim \frac{1}{2\nu}\left|\frac{k}{\omega}\right| \to 0,\\ \frac{|\alpha+iq(\omega+bk)|}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\to \frac{q}{2\nu}.\end{aligned}$$

iii. Cas où $|k|/|\omega| \to 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$ et $|\omega| \ll k^2$.
Dans ce cas $\delta^{1/2} \sim 2\nu|k|$ et donc $|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)| \sim 2\nu|\omega|$, nous en déduisons que dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{(1+\omega^2)^{1/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\to \frac{1}{2\nu},\\ \frac{(1+k^2)^{1/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\sim \frac{1}{2\nu}\left|\frac{k}{\omega}\right| \to 0,\\ \frac{|\alpha+iq(\omega+bk)|}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)|} &\to \frac{|q|}{2\nu}.\end{aligned}$$

Les points i. ii. et iii. montrent que les applications continues $(\omega, k) \to f_3(k, \omega)$, $(\omega, k) \to f_4(k, \omega)$ et $(\omega, k) \to f_5(k, \omega)$ sont bornées à l'infini et que par conséquent elles sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. D'où le résultat du lemme. □

Lemme C-0.3 *Il existe une constante* $C_6 > 0$ *telle que :*

$$f_6(k,\omega) = \frac{|\sigma^+|^3}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \frac{1}{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}} \leq C_6 \textit{ pour tout } (k,\omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Preuve : Nous reprenons le raisonnement des lemmes précédents :

i. Cas où $|\omega|/|k| \to l,\ l \geq 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$.
Nous avons vu au cours de la démonstration du Lemme C-0.1 que dans ce cas $\mathcal{R}e(\sigma^+) \sim |k|$ et nous montrons de façon analogue que $\mathcal{I}m(\sigma^+) \sim c_3$ (c_3 une constante). Ainsi $|\sigma^+|^3 \sim |k|^3$, nous en déduisons que :

$$\frac{|\sigma^+|^3}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \frac{1}{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}} \sim \frac{|k|^3}{|k|^{1/2}} \frac{1}{|k|^{5/2}} \to 1.$$

ii. Cas où $|k|/|\omega| \to 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$ et $|\omega| \gg k^2$.
Dans ce cas $\mathcal{R}e(\sigma^+) \sim |\omega|^{1/2}/(2\nu)^{1/2}$ et $\mathcal{I}m(\sigma^+) \sim |\omega|^{1/2}/(2\nu)^{1/2}$, on obtient ainsi $|\sigma^+|^3 \sim |\omega|^{3/2}/\nu^{3/2}$ et par conséquent :

$$\frac{|\sigma^+|^3}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \frac{1}{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}} \sim \frac{(2\nu)^{1/4}|\omega|^{3/2}}{(\nu)^{3/2}|\omega|^{1/4}} \frac{1}{|\omega|^{5/4}} \to \frac{2^{1/4}}{\nu^{5/4}}.$$

iii. Cas où $|k|/|\omega| \sim 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$ et $|\omega| \ll k^2$.
Dans ce cas $\mathcal{R}e(\sigma^+) \sim |k|$ et $\mathcal{I}m(\sigma^+) \sim c_4$ (c_4 une constante positive) c.-à-d. $|\sigma^+|^3 \sim |k|^3$ et par conséquent :

$$\frac{|\sigma^+|^3}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \frac{1}{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}} \sim \frac{|k|^3}{|k|^{1/2}} \frac{1}{|k|^{5/2}} \to 1.$$

Les résultats i., ii. et iii. montrent que l'application continue $(k,\omega) \to f_6(k,\omega)$ est bornée à l'infini et que par conséquent elle est bornée sur $\mathbb{R}^2$. D'où le résultat du lemme.
□

Lemme C-0.4 *Il existe une constante* $C_7 > 0$ *telle que :*

$$f_7(k,\omega) = \frac{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)q)|} \frac{1}{((1+\omega^2)^{3/8} + (1+k^2)^{3/4})} \leq C_7 \textit{ pour tout } (k,\omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Preuve : Nous reprenons le raisonnement des lemmes précédents :

i. Cas où $|\omega|/|k| \to l,\ l \geq 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$.
Dans ce cas $|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)| \sim c_1|k|$ et

$$\frac{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)q)|} \frac{1}{((1+\omega^2)^{3/8} + (1+k^2)^{3/4})} \sim \frac{|k|^{5/2}}{c_1|k||k|^{3/2}} \sim \frac{1}{c_1}.$$

ii. Cas où $|k|/|\omega| \to 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$ et $|\omega| \gg k^2$.
Dans ce cas $|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)| \sim 2\nu|\omega|$, et

$$\frac{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)|} \frac{1}{((1+\omega^2)^{3/8} + (1+k^2)^{3/4})} \sim \frac{|\omega|^{5/4}}{2\nu|\omega||\omega|^{3/4}} \to 0.$$

iii. Cas où $|k|/|\omega| \to 0$ quand $|k|, |\omega| \to +\infty$ et $|\omega| \ll k^2$.
Dans ce cas $|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)| \sim 2\nu|\omega|$, nous en déduisons que dans ce cas :

$$\frac{(1+\omega^2)^{5/8} + (1+k^2)^{5/4}}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)q)|} \frac{1}{((1+\omega^2)^{3/8} + (1+k^2)^{3/4})} \sim \frac{|k|^{5/2}}{2\nu|\omega||k|^{3/2}} \to 0.$$

Les points i., ii. et iii. montrent que l'application continue $(k, \omega) \to f_7(k, \omega)$ est bornée à l'infini et que par conséquent elle est bornée sur $\mathbb{R}^2$. D'où le résultat du lemme. $\square$

Bibliographie

[1] Y. Achdou et F. Nataf,
Preconditioners for the Mortar Method based on Local Approximations of the Steklov-Poincaré Operator,
M^3AS, 5, n^o 7. 967-997. 1995.

[2] V. I. Agoshkov, A. Quarteroni et F. Saleri,
Recent developments in the numerical simulation of shallow water equations, I. Boundary conditions.
Innovative methods in numerical analysis (Bressanone, 1992). Appl. Numer. Math. 15 , no. 2, 175–200. 1994.

[3] A. Arakawa et V.R. Lamb,
Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model,
Method in Computational Physics, Vol 17, Academic Press, pp 174-265. 1977.

[4] Asselin, R.,
Frequency filter for time integrations,
Mon. Weather Rev. 100, 487-490. 1972.

[5] C. Bernardi et O. Pironneau,
On the shallow water equations at low Reynolds number,
Comm. Partial Differential Equations, 16(1) :59-104. 1991.

[6] M. Bjørhus,
On Domain Decomposition, Subdomain Iteration and Waveform Relaxation,
PhD thesis, University of Trondheim, Norway. 1995.

[7] H. Brezis,
Analyse fonctionnelle. Théorie et applications,
Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson. 1992.

[8] C. Carlenzoli et A. Quarteroni,
Adaptative domain decomposition methods for advection-diffusion problems,
The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 75, Springer Verlag pp. 165-186. 1995.

[9] F. Collino, S. Ghanemi et P. Joly,
Domain decomposition method for harmonic wave propagation : a general presentation.
Vistas in domain decomposition and parallel processing in computational mechanics. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 184, no. 2-4, 171–211. 2000.

[10] R. Dautray et J-L. Lions,
Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques,
Masson. 1987-1988.

[11] B. Desprès,
Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique,
Thèse de l'université Paris IX Dauphine. 1991.

[12] B. Engquist et H.K. Zhao,
Absorbing boundary conditions for domain decomposition,
Appl. Numer. Math. Vol 13 n^o 3 pp189–203. 1998.

[13] B. Engquist et A. Majda,
Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves,
Math. Comp. 31 (139), pp 629-651. 1977.

[14] C.A.J. Flechter,
Computational Techniques for Fluid Dynamics,
Springer Series in computational Physics (2nd edition), Springer Verlag. 1991.

[15] M.J. Gander, L. Halpern et C. Japhet,
Optimized Schwarz Algorithms for Coupling Convection and Convection-Diffusion Problems,
Proceedings of the 13th international conference of Domain Decomposition. 253–260. 2001.

[16] M.J. Gander et L. Halpern,
Méthodes de décomposition de domaines pour l'équation des ondes en dimension 1,
C. R. Acad. Sci. Paris. I(333) :589-592. 2001.

[17] M.J. Gander, L. Halpern et F. Nataf,
Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz waveform relaxation,
Eleventh International Conferences on Domain Decomposition Methods.
C-H. Lai and P. Bjørstad and M. Cross and O. Widlund. pp 27-36. 1999.

[18] M.J. Gander, F. Magoules et F. Nataf,
Optimized Schwarz Methods without Overlap for the Helmholtz Equation,
SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 24, No 1, pp. 38-60. 2002.

[19] M.J. Gander et A. Stuart,
Space-time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation,
SIAM Journal of Scientific Computing 19(6) :2014-2031. 1998.

[20] M.J. Gander et H. Zhao,
Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for the Heat Equation in n-Dimensions,
BIT 42, no. 4, 779–795. 2002.

[21] F. Gastaldi, A. Quarteroni et G. Sacchi Landriani,
On the coupling of two dimensional hyperbolic and elliptic equations : Analytical and numerical approach,
T. Chan et al eds., editor, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. pp 22-63, Philadelphia. SIAM. 1990.

[22] A. E. Gill,
Atmosphere-Ocean Dynamics,
Academic Press. 1982.

[23] B. Gustafsson et A. Sundström,
Incompletely parabolic problems in fluid dynamics,
SIAM J. Appl. Math. 35, no. 2, 343–357. 1978.

[24] L. Halpern,
Artificial boundary conditions for the linear advection diffusion equation,
Math. Comp. 46, pp.425-439. 1986.

[25] L. Halpern,
Artificial boundary conditions for incompletely parabolic perturbations of hyperbolic systems,,
SIAM J. Math. Anal. 22, no. 5, 1256–1283. 1991.

[26] L. Halpern et M. Schatzman,
Artificial boundary conditions for incompressible viscous flows,
SIAM J. Math. Anal. 20, no. 2, 308–353. 1989.

[27] C. Japhet,
Méthode de décomposition de domaine et conditions aux limites artificielles en mécanique des fluides : méthode optimisée d'ordre 2,
Thèse université Paris XIII Villetaneuse. 1998.

[28] C. Japhet, F. Nataf et F. Rogier,
The optimized order 2 method. Application to convection-diffusion problems,
Future Generation Computer Systems FUTURE, Vol 18, Elsevier Science,2001. no. 1. 2001.

[29] T. G. Jensen et D. A. Kopriva,
Comparison of a finite difference and a spectral collocation reduced gravity ocean

model,
Modelling Marine Systems, 2, CRC Press, 25-39. 1990.

[30] H-O. Kreiss et J. Lorenz,
Initial boundary value problem and Navier Stokes equations, Boston San Diego, New-York Academic Press, 1989.

[31] E. Lelarasmee, A.E. Ruehli et A.L. Sangiovanni-Vincentelli,
The Waveform Relaxation Method for Time-Domain Analysis of Large Scale Integrated Circuits,
IEEE Trans. on CAD of IC and Syst., 1. pp. 131-145. 1982.

[32] E. Lindőlf,
Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 10 pp. 117-128. 1894.

[33] J.L. Lions et E. Magenes,
Problèmes aux limites non homogènes et applications, Volume 1
Dunod, Paris, 1968.

[34] J.L. Lions et E. Magenes,
Problèmes aux limites non homogènes et applications, Volume 2
Dunod, Paris, 1968.

[35] Lions P.L., *On the Schwarz alternating method I*,
First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Roland Glowinski and Gene H. Golub and Gérard A. Meurant and Jacques Périaux. 1988.

[36] P.L. Lions,
On the Schwarz alternating method III : a variant for nonoverlapping subdomains,
Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations,
Tony F. Chan and Roland Glowinski and Jacques Périaux and Olof Widlund. 1990.

[37] F. Nataf et F. Rogier,
Factorization of the convection-diffusion operator and the Schwarz algorithm,
M^3AS vol 5, n^o 1, pp. 67–93. 1995.

[38] F. Nataf, F. Rogier et E. Sturler,
Domain Decomposition Methods for Fluid Dynamics,
Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Analysis Edited by A. Sequeira, Plenum Press Corporation 367-376. 1995.

[39] J. Pedlosky,
Geophysical Fluid Dynamics,
Springer Verlag, New-York, Second edition. 1987.

[40] E. Picard,
Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires,
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 9 pp. 217-271 . 1893.

[41] A. Quarteroni et A. Valli,
Domain decomposition methods for partial differential equations,
Oxford Science Publications. 1999.

[42] H.A. Schwarz,
Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahre,
Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 1870.

[43] P.K Smolarkiewicz,
The multi-dimensional Crowley advection scheme. Monthly Weather Review 110 : 1968-1983. 1982.

[44] A. Staniforth, J. Cote et J. Pudykiewicz,
Comments on "Smolarkiewicz's deformational flow." Monthly Weather Review 115 : 894-900. 1987.

[45] Tan Weiyan,
Shallow Water Hydrodynamics,
Shallow Water Hydrodynamics. Elsevier Oceanography Series,Elsevier. 1992.