UNIVERSITÉ PARIS 13

N° attribué par la bibliothèque
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : **Mathématiques appliquées**

présentée et soutenue publiquement

par

Véronique MARTIN

le 15 décembre 2003

Titre :

Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour des équations de l'océanographie

JURY

M.	C. Basdevant	Président du jury
M.	E. Blayo	, Co-Directeur de thèse
M.	P. Joly	, Rapporteur
Mme	L. Halpern	, Directrice de thèse
Mme	M. Schatzman	, Rapporteur

Remerciements

Je remercie en premier lieu Laurence Halpern qui a dirigé cette thèse et grâce à qui j'ai passé trois années agréables et enrichissantes. Elle a su encadrer ma thèse tout en préservant mon identité : elle a tiré mon travail vers le haut tout en respectant mes capacités et mes envies. Son expérience m'a permis de rester sur le droit chemin et m'a ouvert des pistes intéressantes.

Mes remerciements vont ensuite à Éric Blayo qui a co-dirigé cette thèse et qui, malgré la distance géographique, est resté très proche de mes travaux. Sa gentillesse et sa disponibilité m'ont été d'un grand soutien, ses relectures rapides et efficaces m'ont été très utiles. Cette collaboration, teintée d'enrichissants voyages à Grenoble, a permis à ma thèse de s'ouvrir à des applications physiques.

Patrick Joly et Michelle Schatzman ont accepté de rapporter sur ma thèse. Je les remercie pour leurs remarques intéressantes qui ont contribué à améliorer mon travail. Un avis extérieur est toujours important et le leur en recentrant mes travaux me sera très utile. Je remercie Claude Basdevant pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je ne peux pas faire le bilan de ces trois années sans penser à Martin J. Gander et à sa passion communicative des mathématiques appliquées. Je le remercie pour les discussions enrichissantes au cours desquels il m'a fait partager ses compétences en numérique.

Je remercie François Cuvelier pour son aide sur le cluster, qui m'a été d'une grande aide pour obtenir les résultats numériques de cette thèse. Je remercie Caroline Japhet et Stephane Labbe pour leur aide.

J'ai souvent vu des thèses dédiées à "mes parents" et c'est aujourd'hui que je comprends réellement la puissance de ces mots. Je remercie mes parents pour les valeurs qu'ils ont su m'inculquer, ils m'ont appris la valeur du travail, l'importance des choses bien faites et la persévérance. Sans ces valeurs cette thèse ne serait pas ce qu'elle est, et c'est pourquoi elle leur revient un peu. And last but not least, je remercie Christophe pour son soutien, sa confiance et son aide.

Résumé

L'objectif de ce travail est de développer des algorithmes de décomposition de domaine pour des équations de l'océanographie. Les méthodes de décomposition de domaine consistent à décomposer un domaine de calcul de grand taille en plusieurs sous-domaines plus petits. Elles s'appliquaient jusqu'à présent à des problèmes stationnaires, nous généralisons ici ce type de méthodes aux problèmes en temps ('Schwarz Waveform Relaxation Methods'). Le principal but de cette nouvelle approche est de simuler des problèmes multiphysiques pour lesquels il est intéressant d'avoir une discrétisation temporelle différente dans chaque sous-domaine.

Nous généralisons aux équations d'évolution une méthode récente qui consiste à écrire les conditions transparentes (Conditions aux Limites Absorbantes) puis les approche par des opérateurs différentiels d'ordre 1 dans la direction normale à l'interface et d'ordre 0 ou 1 dans la direction tangentielle.

Nous développons cette méthode premièrement pour l'équation de convection diffusion qui traduit notamment l'advection des traceurs (température, salinité, traceurs passifs) dans l'océan. Nous approchons les opérateurs exacts par développement de Taylor, ou par optimisation du taux de convergence. Nous démontrons que les problèmes aux limites introduits sont bien posés. Puis nous montrons la convergence des algorithmes correspondants. Des résultats numériques sont implémentés dans le cas avec ou sans recouvrement et mettent en évidence la réelle efficacité des méthodes optimisées. Nous faisons ensuite un premier pas vers le couplage d'équations en implémentant un algorithme de couplage de l'équation de convection avec l'équation de convection diffusion.

Ensuite nous traitons les équations de Saint Venant, moyennes verticales des équations de Navier-Stokes en milieu tournant. Nous introduisons pour ce système un algorithme de décomposition de domaine avec des conditions d'interface qui s'obtiennent par des considérations physiques. Nous montrons que cet algorithme est bien posé puis nous en démontrons la convergence. Des résultats numériques concluants sont également exposés.

Mots-clés : méthode de décomposition de domaine, méthode de relaxation d'ondes, conditions aux limites absorbantes, méthode optimisée, couplage de modèles, problèmes multi-physiques, équation de convection-diffusion, équations de Saint-Venant.

Abstract

The purpose of this work is to apply domain decomposition methods to some oceanographic equations. Classical domain decomposition methods treat stationary problems. We generalize in this work this method to the time dependent problems resulting in a Schwarz Waveform Relaxation method. This allows to simulate multiphysic problems with for example different time steps in each subdomain.

The principle of this method is to write first the absorbing boundary conditions on the interfaces, then to approximate them by differential operators of order 1 in the normal direction to the interface and of order 0 or 1 in the tangential direction.

We analyse first the convection diffusion equation : we approximate the exact operators by a Taylor development or by optimization of the convergence rate. We show that the such introduce subdomain problems are well posed and that the corresponding algorithm is convergent. Numerical results are implemented with or without overlap and illustrate the efficiency of the method.

A first step towards coupling of equation is made in studying the coupling between the convection equation with the convection diffusion equation. Similarly to the domain decomposition method, we write transparent operators on the interface then we approximate them. Encouraging numerical results are obtained.

We study then Shallow Water equations. We propose a domain decomposition algorithm with interface conditions obtained by physical considerations. We show that this algorithm is well-posed and is convergent. Numerical results are obtained.

Keywords : domain decomposition methods, Schwarz Waveform relaxation methods, absorbing boundary conditions, optimized transmission conditions, coupling of equations, multiphyisic problems, convection diffusion equation, Shallow Water equations

Table des matières

Introduction

Introduction aux méthodes de décomposition de domaine et de couplage

La première étape dans la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles est le maillage du domaine de calcul. Ceci permet de discrétiser l'équation et conduit à la résolution d'un système linéaire. Mais dans beaucoup de cas physiques le domaine de calcul est de grande taille, et si l'on souhaite le mailler assez finement, le système linéaire correspondant ne peut être ni stocké ni résolu par un seul ordinateur.

Avec l'émergence des calculateurs parallèles, les méthodes de décomposition de domaine ont suscité beaucoup d'intérêt car elles offrent la possibilité de transformer un problème de grande taille en une série de problèmes gérables par un seul ordinateur.

Ces méthodes consistent à décomposer le domaine initial en plusieurs sous-domaines sur chacun desquels on utilise un processeur pour résoudre l'équation. Les différents processeurs échangent des informations au niveau des interfaces communes selon un processus itératif, pour converger vers la solution globale. On peut définir autant d'algorithmes qu'il y a d'informations différentes à échanger au niveau de l'interface ; le problème est alors de choisir des conditions d'interface efficaces, c.-à-d. qui mènent à des problèmes bien posés et à une convergence rapide.

Les méthodes de décomposition de domaine ont d'abord été appliquées aux problèmes stationnaires. Les prémisses de ces méthodes datent d'avant même l'apparition des ordinateurs. La première idée fut de H.A. Schwarz [42] qui mit au point cette méthode pour établir des résultats d'existence et d'unicité d'une solution harmonique sur des domaines composés de plusieurs sous-domaines de formes simples. Avec l'apparition des ordinateurs cette méthode a été analysée et utilisée à des fins calculatoires (voir par exemple P.L. Lions 1988 [35]). La méthode de Schwarz classique s'applique au cas où les domaines se recouvrent et consiste à échanger des données de Dirichlet entre les sous-domaines. Plus tard d'autres conditions d'interface ont été implémentées rendant inutile le recouvrement pour converger (voir P.L. Lions 1990 [36] et B. Després [11]). Dans ce cas les sous-domaines échangent des conditions de type Robin (c.-à-d. une combinaison linéaire de conditions de Neumann et de Dirichlet) au niveau des interfaces. Dans des travaux plus récents ces conditions de Robin ont été généralisées et choisies de manière judicieuse, notamment en optimisant le taux de convergence. Cette méthode a été appliquée à la résolution de l'équation de Helmholtz ([18] M.J. Gander, F. Magoulès et F. Nataf), ou de l'équation de convection-diffusion stationnaire (C. Japhet [27]). D'autres conditions ont été mises en œuvre pour l'équation de Helmholtz dans [9] (F. Collino, S. Ghanemi et P. Joly) et pour l'équation de convection-diffusion dans [8] (C. Carlenzoli et A. Quarteroni). Plus généralement on trouvera dans [41] (A. Quarteroni et A. Valli) une revue et une étude des différentes méthodes de décomposition de domaine tant au niveau continu qu'au niveau discret.

Les phénomènes étudiés par des méthodes de décomposition de domaine sont ensuite devenus de plus en plus complexes et le découpage en sous-domaines est devenu un moyen d'adapter le schéma numérique, la discrétisation voire le modèle à la zone géographique. On a alors affaire à un problème de couplage d'équations. C'est le cas par exemple en modélisation océanique, où le caractère multi-échelle de la dynamique est très marqué. Ainsi l'océanographie côtière, en plein développement actuellement, requiert le couplage de modèles côtiers avec des modèles à grande échelle dont les physiques sont différentes. Là encore la difficulté du problème réside dans l'écriture des conditions d'interface. Pour le couplage de l'équation de convection-diffusion et de l'équation de convection, on pourra trouver deux approches différentes de couplage dans [21] (F. Gastaldi, A. Quarteroni et G. Sacchi Landriani) et [15] (M.J. Gander, L. Halpern et C. Japhet).

Introduction aux méthodes de relaxation d'ondes

Les méthodes de décomposition de domaine ont d'abord été appliquées à des problèmes stationnaires. Pour traiter des problèmes d'évolution, la méthode habituellement utilisée consiste à discrétiser l'équation en temps (on obtient donc une suite de problèmes stationnaires à résoudre) et à chaque pas de temps on résout le problème stationnaire correspondant par les méthodes décrites précédemment.

Le Tableau 1 décrit la méthode pour résoudre l'équation $\partial u/\partial t - A(u) = f$ dans $\Omega^- \times]0, T[$, $u(\cdot, 0) = w_0$ dans Ω^-. On applique un schéma implicite en temps de type Crank Nicolson à cette équation et on obtient $u_{n+1} - \frac{dt}{2}A(u_{n+1}) = G_n^u$ où $G_n^u = u_n + \frac{dt}{2}A(u_n) + dt f_{n+1/2}$ et où u_n désigne l'approximation de u au temps n et dt le pas de temps. A chaque pas de temps n on résout le problème spatial par une méthode de décomposition de domaine, et pour cela on introduit pour chaque sous-domaine Ω^- et Ω^+ les opérateurs d'interface $\mathcal{B}^-_{\text{class}}$ et $\mathcal{B}^+_{\text{class}}$. Nous donnons ici l'exemple d'un découpage en deux sous-domaines mais cette méthode se généralise aisément à un nombre quelconque de sous-domaines.

Dans le cas de l'algorithme de Schwarz classique (voir [42] H.A. Schwarz), on a $\mathcal{B}^\pm_{\text{class}} = \mathcal{I}d$ et dans le cas de conditions de Robin $\mathcal{B}^\pm_{\text{class}} = \partial/\partial\mathbf{n} - \alpha^\pm$ avec $\mathbf{n}$ le vecteur normal à l'interface et $\alpha^\pm$ des scalaires à choisir. Pour les conditions de Robin généralisées (voir [27] C. Japhet) on a $\mathcal{B}^\pm_{\text{class}} = \partial/\partial\mathbf{n} - \alpha^\pm \pm \beta\partial/\partial\boldsymbol{\tau} \pm \gamma\partial^2/\partial\boldsymbol{\tau}^2$ où $\boldsymbol{\tau}$ représente le vecteur tangent à l'interface.

Mais dans l'optique de la simulation de phénomènes multiphysiques où l'on souhaiterait avoir des codes qui puissent tourner indépendamment l'un de l'autre dans chaque sous-domaine avec notamment des pas de temps différents, cette méthode n'est pas satisfaisante.

$u_1^0 = w_0|_{\Omega^-}$

$v_1^0 = w_0|_{\Omega^+}$

Pour n=1,N

k=0

Tant que non convergence

Processeur 1	Processeur 2
$\begin{cases} u_n^{k+1} - \dfrac{dt}{2}A(u_n^{k+1}) = G_{n-1}^u \text{ dans } \Omega^- \\ \mathcal{B}_{\text{class}}^-(u_n^{k+1}) = \mathcal{B}_{\text{class}}^-(v_n^k) \text{ sur } \Gamma \end{cases}$	$\begin{cases} v_n^{k+1} - \dfrac{dt}{2}A(v_n^{k+1}) = G_{n-1}^v \text{ dans } \Omega^+ \\ \mathcal{B}_{\text{class}}^+(v_n^{k+1}) = \mathcal{B}_{\text{class}}^+(u_n^k) \text{ sur } \Gamma \end{cases}$

k = k+1

Fin Tant que, fin algorithme de Schwarz

$u_{n+1}^0 = u_n^k$

$v_{n+1}^0 = v_n^k$

Fin des pas de temps

TAB. 1 – Méthode classique pour résoudre un problème d'évolution par décomposition de domaine

Dans de récents travaux les méthodes de décomposition de domaine ont été appliquées directement au problème en temps. Ces méthodes ont pour origine les itérations de Picard introduites à la fin du dix-neuvième siècle pour étudier des équations différentielles ordinaires du type $du/dt = f(u)$ (voir E. Picard [40] et E. Lindőlf [32]). Cette méthode a été ensuite parallélisée par E. Lelarasmee, A.E. Ruehli et A.L. Sangiovanni-Vincentelli [31] afin de résoudre numériquement un système d'équations différentielles ordinaires avec pour application la simulation du comportement d'un circuit électronique. Cette méthode, appelée relaxation d'ondes, peut être vue comme une méthode de décomposition de domaine, cette identification a été faite par M. Bjørhus [6] pour des problèmes hyperboliques du premier ordre et par M.J. Gander et A. Stuart [19] pour des problèmes paraboliques. Cette méthode consiste à résoudre dans chaque sous-domaine le problème sur tout l'intervalle de temps et à échanger des informations qui sont alors fonctions de la variable d'interface et du temps. Le Tableau 2 dresse le schéma de cette méthode. Notons que nous pouvons choisir une discrétisation en temps différente dans chaque sous-domaine.

Dans un premier temps, dans [19] (M.J. Gander et A. Stuart) et [20] (M.J. Gander et H. Zhao) cette méthode a été appliquée à l'équation de la chaleur en utilisant des conditions de transmission de type Dirichlet (algorithme de Schwarz classique

$$
\begin{array}{l}
\text{Pour k=0, jusqu'à convergence} \\
\quad u_0^k = w_0|_{\Omega^-} \\
\quad v_0^k = w_0|_{\Omega^+} \\
\qquad \qquad \text{Processeur 1} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{Processeur 2} \\
\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u^{k+1}}{\partial t} - A(u^{k+1}) = f|_{\Omega^-} \text{ dans } \Omega^- \times]0,T[\\ u^{k+1}(\cdot,\cdot,0) = w_0|_{\Omega^-} \text{ dans } \Omega^- \\ \mathcal{B}^-_{\text{SWR}}(u^{k+1}) = \mathcal{B}^-_{\text{SWR}}(v^k) \text{ sur } \Gamma \times]0,T[\end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial v^{k+1}}{\partial t} - A(v^{k+1}) = f|_{\Omega^+} \text{ dans } \Omega^+ \times]0,T[\\ v^{k+1}(\cdot,\cdot,0) = w_0|_{\Omega^+} \text{ dans } \Omega^+ \\ \mathcal{B}^+_{\text{SWR}}(v^{k+1}) = \mathcal{B}^+_{\text{SWR}}(u^k) \text{ sur } \Gamma \times]0,T[\end{array} \right. \\
\text{Fin de l'algorithme de Schwarz}
\end{array}
$$

TAB. 2 – Méthode de Schwarz avec relaxation d'ondes

de type relaxation d'ondes) $\mathcal{B}^{\pm}_{\text{SWR}} = \mathcal{I}d$. Puis des conditions de transmission plus appropriées ont été mises en place (voir M.J. Gander, L. Halpern et F. Nataf [17] ou pour l'équation des ondes en une dimension M.J. Gander et L. Halpern [16]). Elles ne nécessitent plus de recouvrement entre les deux sous-domaines et sont calculées de façon à ce que la convergence de l'algorithme soit rapide.

Objectifs de la thèse

Ce type de méthodes est potentiellement très intéressant pour nombre d'applications. Parmi celles-ci, nous nous sommes plus particulièrement intéressé à la modélisation océanique, où les problèmes multi-échelles et les opportunités de couplage multiphysique sont nombreux. C'est pourquoi nous travaillons dans un premier temps sur l'équation de convection-diffusion en deux dimensions :

$$
\left\{ \begin{array}{lcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} - \nu \triangle u & = & f & \text{dans } \Omega \times]0,T[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & u_0 & \text{dans } \Omega, \\ + \text{ conditions aux limites sur } \partial\Omega, & & & \end{array} \right.
$$

qui traduit notamment l'advection des traceurs (température, salinité, traceurs passifs) dans l'océan. Dans un second temps nous nous intéressons aux équations de

Saint-Venant :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\dfrac{\partial u}{\partial t} & = & fv - \dfrac{c^2}{H}\dfrac{\partial h}{\partial x} + \nu\triangle u + \dfrac{\tau^x}{\rho_0 H} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} & = & -fu - \dfrac{c^2}{H}\dfrac{\partial h}{\partial y} + \nu\triangle v + \dfrac{\tau^y}{\rho_0 H} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\
\dfrac{\partial h}{\partial t} & = & -H(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}) & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\
\multicolumn{4}{l}{(u,v,h)(\cdot,\cdot,0) = (u_0,v_0,h_0) \text{ dans } \Omega,} \\
\multicolumn{4}{l}{+ \text{ conditions aux limites sur } \partial\Omega,}
\end{array}\right.$$

qui est un modèle simple de la dynamique océanique. Ici les inconnues (u,v) et h désignent le vecteur vitesse et la hauteur d'eau, f est la force de Coriolis, H la hauteur moyenne initiale, c^2 la vitesse des ondes de gravité et (τ_x,τ_y) la tension du vent.

Pour écrire nos algorithmes de décomposition de domaine, nous suivons le raisonnement qui a été appliqué dans [27] (C. Japhet) pour l'équation de convection diffusion stationnaire en deux dimensions, et dans [17] (M.J. Gander, L. Halpern et F. Nataf) pour l'équation de convection diffusion instationnaire en une dimension. Cette technique consiste à utiliser la théorie des conditions aux limites absorbantes, d'abord introduite par B. Engquist et A. Majda [13] pour l'équation des ondes ou des systèmes hyperboliques du premier ordre, puis par L. Halpern [24] ou L. Halpern et M. Schatzman [26] pour l'équation de Navier-Stokes. Cette théorie permet de traiter des équations sur un domaine Ω non borné : la résolution numérique se fait obligatoirement sur un sous-domaine borné Ω_b, et pour que la solution sur Ω_b corresponde à la solution sur Ω, il faut écrire des conditions aux limites sur $\partial\Omega_b$ telles que sur cette frontière aucune onde ne se réfléchisse : ce sont des conditions aux limites absorbantes. Plus tard dans [38] (F. Nataf, F. Rogier et E. Sturler) cette technique a été appliquée aux méthodes de décomposition de domaine, puisque l'on cherche également à rendre 'transparente' l'interface fictive entre les deux sous-domaines. Ceci mène à une convergence optimale de l'algorithme dans le sens où l'algorithme converge en autant d'itérations qu'il y a de sous-domaines.

Toutefois ces opérateurs ne sont pas locaux et ne peuvent pas être utilisés de façon pratique dans un algorithme et ainsi ils doivent être approchés. Nous obtenons cette approximation soit par développement de Taylor soit par optimisation du taux de convergence.

Pour l'équation de convection-diffusion les opérateurs approchés auront la forme :

$$\mathcal{B}^{\pm}_{\mathrm{SWR}}u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \alpha^{\pm}u \pm \beta\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} \pm \gamma\frac{\partial u}{\partial t}$$

avec $\mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\tau}$ les vecteurs normal et tangent à l'interface. Et pour les équations de Saint-Venant nous prendrons :

$$\mathcal{B}^{\pm}_{\mathrm{SWR}}(\mathbf{U},h) = -\nu\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{c^2}{H}h\mathbf{n} \pm \begin{pmatrix} \lambda + \delta\frac{\partial}{\partial t} & \mu \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\mu} \end{pmatrix}\mathbf{U},$$

avec $\mathbf{U} = (u, v)$.
Pour chacune des équations nous montrons que les problèmes aux limites correspondants à ces conditions sont bien posés. Nous choisissons les paramètres $\alpha^{\pm}$, β et γ pour l'équation de convection-diffusion, et les paramètres δ, λ, μ, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ pour les équations de Saint-Venant, et nous étudions les algorithmes de décomposition de domaine associés. Dans un souci de simplification, nous traitons le cas particulier de deux sous-domaines, mais les démonstrations se généralisent facilement à un nombre quelconque de sous-domaines.

Plan de la thèse

Ce travail se décompose en deux parties. La première est consacrée à la résolution de l'équation de convection-diffusion et la deuxième aux équations de Saint-Venant. Pour chacune de ces équations nous proposons un algorithme de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes. Nous montrons qu'il est bien posé et qu'il converge. Nous proposons des schémas pour discrétiser ces algorithmes et nous donnons des résultats numériques qui illustrent l'efficacité des méthodes proposées.

La partie I est consacrée à l'équation de **convection-diffusion**.

Dans le Chapitre 1, nous étudions l'équation de convection-diffusion dans l'espace $\mathbb{R}^2$ et sur l'intervalle de temps $]0, +\infty[$. Nous rappelons des résultats d'existence, d'unicité puis de régularité de la solution sur ce domaine.

Dans le Chapitre 2 nous généralisons l'algorithme de Schwarz classique au problème de convection-diffusion instationnaire. Cela signifie que nous décomposons l'espace $\mathbb{R}^2$ en deux demi-plans se recouvrant (cette condition est nécessaire pour que l'algorithme converge), puis nous mettons en place des conditions de transmission de type Dirichlet au niveau de l'interface. Nous montrons dans un premier temps que cet algorithme est bien posé, puis nous démontrons qu'il converge. Mais il est bien connu que cette méthode est peu performante : elle nécessite un recouvrement et sa convergence est lente ; sa convergence est d'autant plus lente que le recouvrement est petit. Nous cherchons alors de meilleurs opérateurs d'interface. C'est l'objet du Chapitre 3 où nous utilisons la théorie des conditions aux limites absorbantes pour écrire des conditions de transmission qui mènent à la convergence de l'algorithme en deux itérations. Ces opérateurs ne sont pas locaux et ne peuvent par conséquent pas être utilisés directement dans un algorithme. Nous devons les approcher et pour cela nous introduisons des opérateurs d'interface d'ordre 0 ou 1.

Dans le Chapitre 4 nous nous intéressons à l'algorithme avec des conditions de transmission d'ordre 0. Nous étudions les problèmes aux limites dans chaque sous-domaine et montrons qu'ils sont bien posés. Nous pouvons alors définir l'algorithme c.-à-d. nous pouvons expliciter le premier itéré.

Nous reprenons la même étude dans le Chapitre 5 où nous étudions l'algorithme avec des conditions de transmission d'ordre 1.

Puis dans le Chapitre 6 nous démontrons la convergence des algorithmes avec des conditions d'ordre 0 ou 1. Nous traitons d'abord le cas sans recouvrement et la démonstration repose sur des estimations d'énergie. Puis nous nous intéressons au cas avec recouvrement. Cette fois la convergence de l'algorithme est démontrée en considérant le taux de convergence.

Les opérateurs d'interface d'ordre 0 (resp. 1) dépendent d'une (resp. 2) constante(s). Dans le Chapitre 7 nous proposons et discutons plusieurs stratégies pour choisir ces coefficients (développement de Taylor, optimisation du taux de convergence).

Dans le Chapitre 8 nous analysons la discrétisation de l'équation de convection-diffusion et plus particulièrement nous expliquons comment discrétiser les conditions de transmission.

Dans le Chapitre 9 nous exposons des résultats numériques qui illustrent l'efficacité des méthodes optimisées. Nous traitons dans un premier temps le cas où la vitesse de convection est constante, cas que nous avons traité dans les chapitres théoriques précédents. Puis nous étendons la méthode à des vitesses plus générales. Pour chaque vitesse nous considérons le cas où les sous-domaines se recouvrent ou non.

Dans le Chapitre 10 nous abordons le problème du couplage d'équations. Plus particulièrement, nous étudions le couplage de l'équation de convection avec l'équation de convection-diffusion. Nous définissons la solution recherchée et proposons un algorithme pour une vitesse de convection quelconque. Nous ne donnons aucun résultat théorique mais nous mettons en œuvre ces algorithmes et exposons des résultats numériques.

La partie II est consacrée aux équations de **Saint-Venant**.

Pour les équations de Saint-Venant nous suivons le même cheminement que pour l'équation de convection-diffusion.

Dans un premier temps (Chapitre 12) nous rappelons comment établir les équations de Saint-Venant et nous explicitons les approximations physiques qui sont faites dans cette étude.

Dans le Chapitre 13 nous étudions les équations de Saint-Venant dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour la solution du problème de Cauchy et nous donnons également des résultats de régularité.

Dans le Chapitre 14 nous nous plaçons dans le demi-plan $\{(x, y), x > 0, y \in \mathbb{R}\}$

et nous résolvons les équations de Saint-Venant grâce à une transformée de Fourier-Laplace (Fourier en y, Laplace en t). Nous montrons également quelques propriétés pour la solution.

Dans le Chapitre 15 nous définissons l'algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes pour les équations de Saint-Venant. Nous étudions dans un premier temps les problèmes aux limites qui interviennent dans cet algorithme, nous montrons qu'ils sont bien posés et nous donnons un résultat de régularité. Dans un second temps nous définissons l'algorithme complet puis nous montrons qu'il converge.

Dans le Chapitre 16 nous cherchons un algorithme plus performant que l'algorithme de Schwarz classique, c.-à-d. nous cherchons à écrire des conditions de transmission plus appropriées. Dans un premier temps nous explicitons des opérateurs d'interface qui mènent à la convergence en deux itérations, puis nous considérons des approximations de ces opérateurs. L'étude des algorithmes associés nécessite deux lemmes de relèvement et un lemme de positivité que nous démontrons dans la Section 16.3.

Dans le Chapitre 17 nous étudions l'algorithme associé aux opérateurs approchés d'ordre 0. Nous montrons que les problèmes aux limites sont bien posés et nous définissons l'algorithme correspondant. Au Chapitre 18 nous appliquons la même étude à l'algorithme avec des conditions d'ordre 1. Puis nous montrons au Chapitre 19 que les algorithmes avec des conditions d'ordre 0 ou 1 convergent. Enfin nous approchons les opérateur exactes par des opérateurs différentiels au Chapitre 20.

Dans le Chapitre 21 nous retrouvons le schéma aux différences finies utilisé habituellement pour discrétiser les équations de Saint-Venant, par un calcul de flux aux interfaces. Ceci nous permet alors de discrétiser facilement les opérateurs d'interface que nous avons introduits dans les chapitres précédents.

Par ailleurs dans cette étude les solutions sont cherchées dans des espaces de Sobolev anisotropes et nous utilisons des outils comme les transformées de Fourier ou Laplace. Des annexes rappellent les définitions et théorèmes utilisés.

Première partie

Méthode de décomposition de domaine appliquée à l'équation de convection diffusion en dimension 2

Chapitre 1

L'équation de convection-diffusion dans l'espace entier

Dans ce premier chapitre nous étudions l'équation de convection diffusion sur l'espace entier $\mathbb{R}^2$ et sur l'intervalle de temps $]0, T[$.
Après avoir explicité l'équation de convection-diffusion dans la Section 1.1, nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité de la solution dans la Section 1.2. Puis dans la Section 1.3 nous donnons un résultat de régularité.

1.1 Présentation du problème

Le but de cette étude est de résoudre l'équation de convection-diffusion dans $\Omega = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla u - \nu \triangle u = \tilde{f} \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ u(\cdot, \cdot, 0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec les données physiques

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ la vitesse de convection,}$$
$$\nu \text{ la viscosité strictement positive.}$$

Le second membre $\tilde{f}$ et la condition initiale u_0 seront précisés dans la section suivante. Les coefficients a, b et ν sont supposés constants dans la partie théorique.

Dans le but de travailler avec des solutions de carré intégrable en temps sur $]0,+\infty[$, nous introduisons un problème équivalent (voir Annexe B, Section B-5) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla w - \nu \triangle w + cw = f \text{ dans } \Omega \times]0,\, +\infty[, \\ w(\cdot,\cdot,0) = w_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

qui est déduit de (1.1) par le changement de variables $w = e^{-ct}u$ (c est une constante strictement positive), $f = e^{-ct}\tilde{f}$ et $w_0 = u_0$.
Nous notons alors $\mathcal{L}$ l'opérateur de convection-diffusion ainsi introduit :

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla - \nu \triangle + c. \tag{1.3}$$

Dans les sections suivantes, nous donnons un résultat d'existence, d'unicité et de régularité pour le problème (1.2).

1.2 Existence et unicité de la solution

Dans la suite, $(\cdot,\cdot)$ désignera le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.
Nous considérons $w \in L^2(]0,+\infty[; H^1(\Omega))$, une solution faible de (1.2), en d'autres termes w vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(w,v) + \nu(\nabla w, \nabla v) + \dfrac{1}{2}\Big((\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla w, v) - (\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla v, w)\Big) \\ + c(w,v) = (f,v) \text{ pour tout } v \text{ de } H^1(\Omega), \\ w(\cdot,\cdot,0) = w_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Théorème 1.2.1 *Si w_0 appartient à $L^2(\Omega)$ et si f appartient à $L^2(]0,+\infty[; L^2(\Omega))$ alors il existe une unique solution faible de (1.2) appartenant à $L^\infty(]0,+\infty[; L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,+\infty[; H^1(\Omega))$.*

Preuve : Ce résultat est classique, nous en rappelons la preuve.
Commençons par l'unicité. Nous multiplions (1.2) par w et nous intégrons sur Ω :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \nu\|\nabla w\|^2 + c\|w\|^2 = (f,w).$$

Nous appliquons ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre de cette équation, puis nous utilisons l'inéquation (1.5) valable pour tout a, b et α strictement positifs :

$$2ab \leq \alpha a^2 + \frac{b^2}{\alpha}, \tag{1.5}$$

nous obtenons alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \nu\|\nabla w\|^2 + \frac{c}{2}\|w\|^2 \leq \frac{1}{2c}\|f\|^2.$$

L'intégration de cette inégalité sur $]0,t[$, $t>0$, nous donne :

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\nabla w(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{c}{2}\int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma \leq \frac{1}{2c}\int_0^{+\infty} \|f(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\|w_0\|^2. \tag{1.6}$$

Si nous nous ramenons au cas homogène avec une condition initiale nulle (c.-à-d. $f=0$, $w_0=0$), l'inégalité (1.6) nous donne l'unicité de la solution dans les espaces indiqués dans le théorème.

Pour l'existence, nous rappelons d'abord les hypothèses $w_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,+\infty[; L^2(\Omega))$ qui montrent que le second membre de (1.6) est borné. Puis nous appliquons la méthode de Galerkin : nous en rappelons ici les grandes lignes mais plus de détails peuvent être trouvés, par exemple, dans [10] (R. Dautray et J.L. Lions).
L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. Il existe donc une suite dénombrable de vecteurs $(v_j)_{j=1,\infty}$ dont toute sous famille finie est libre et telle que la réunion des espaces V_m engendrés par $v_1,\cdots,v_m$ soit dense dans $H^1(\Omega)$.

Par densité pour tout w_0 dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite $(w_{0m})_m$ qui converge vers w_0 et telle que w_{0m} soit dans V_m pour tout m. Et nous avons $w_{0m} = \sum_{i=1}^m \alpha_{mi} v_i$.
Nous cherchons à présent w_m dans V_m, c.-à-d. $w_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{mi}(t) v_i$, solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(w_m, v_j) + \nu(\nabla w_m, \nabla v_j) + \\ \dfrac{1}{2}\Big((\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla w_m, v_j) - (\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla v_j, w_m)\Big) + c(w_m, v_j) = (f, v_j), 1 \leq j \leq m, \\ w_m(0) = w_{0m}. \end{cases} \tag{1.7}$$

L'équation (1.7) est équivalente au système différentiel d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} A_m \dfrac{d\vec{g}_m}{dt} + B_m \vec{g}_m = \vec{f}_m, \\ \vec{g}_m(0) = \vec{g}_{0m}, \end{cases} \tag{1.8}$$

où A_m et B_m sont les matrices de dimension $m\times m$ définies par $(A_m)_{i,j} = (v_i, v_j)$ et $(B_m)_{i,j} = \nu(\nabla v_i, \nabla v_j) + \frac{1}{2}((\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla v_i, v_j) - (\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla v_j, v_i)) + c(v_i, v_j)$. Les vecteurs $\vec{g}_m$, $\vec{g}_{0m}$ et $\vec{f}_m$ de $\mathbb{R}^m$ ont respectivement pour $j^{\text{ème}}$ élément : g_{mj}, α_{mj} et (f, v_j).

Les v_j étant linéairement indépendants, la matrice A_m est inversible et le système (1.8) possède une unique solution $\vec{g}_m$ et par suite (1.7) possède une unique solution w_m telle que $w_m \in L^\infty(]0,+\infty[;V_m)$ et $\partial_t w_m \in L^2(]0,+\infty[;V_m)$.
Il s'agit à présent de montrer que w_m tend vers la solution de (1.4). Tout d'abord w_m vérifie l'estimation *a priori* (1.6), ce que l'on montre en sommant pour $1 \leq j \leq m$ la relation (1.7) multipliée par g_{mj}. Par conséquent w_m se trouve dans un borné de $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega))$. Nous en déduisons des résultats de convergence faible et faible $\star$ suivants : il existe une sous-suite $(w_p)_p$ telle que

$$\begin{array}{llll} w_p \rightharpoonup w & \text{faible} \star & \text{dans} & L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)), \\ w_p \rightharpoonup w & \text{faible} & \text{dans} & L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-)). \end{array}$$

Ceci nous permet de passer à la limite dans (1.7). Par suite w_p tend vers w, la solution de (1.4). Nous en concluons l'existence de la solution de (1.4) dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega))$. $\square$

Remarque 1 *Une autre démonstration peut être proposée. Elle repose sur une étude par transformation de Fourier en espace de l'équation. Cette méthode permet également de montrer le résultat de régularité présenté dans la section suivante.*

1.3 Régularité des solutions faibles

Le traitement des problèmes d'évolution nécessite l'introduction d'espaces spécifiques comme les espaces de Sobolev anisotropes. On se reportera à l'Annexe A, pour la définition des espaces $H^{r,s}(\Omega\times]0,T[)$ et l'énoncé des théorèmes de trace correspondants. Nous rappelons ici les deux résultats de régularité suivants (voir [34] J.L. Lions et E. Magenes).

Théorème 1.3.1 *Si f appartient à $L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$ et si w_0 appartient à $H^1(\Omega)$ alors w, la solution faible de (1.2), appartient à $H^{2,1}(\Omega\times]0,T[)$.*

Théorème 1.3.2 *Si f appartient à $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,T[)$ et si w_0 appartient à $H^2(\Omega)$ alors w, la solution faible de (1.2), appartient à $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,T[)$.*

Dans les chapitres qui suivent, nous définissons des algorithmes de décomposition de domaine pour résoudre le problème (1.2). Nous verrons que la solution dans chaque sous-domaine vérifie également les résultats de régularité des Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2.

Par ailleurs, nous présenterons des algorithmes de décomposition de domaine qui nécessitent la connaissance de la trace de la solution sur la frontière artificielle ainsi que la trace de ses dérivées en espace et en temps. Nous appliquons alors le théorème de trace de l'Annexe A : pour Ω_i un domaine de $\mathbb{R}^2$, les hypothèses du Théorème 1.3.1 permettent (sous certaines conditions de compatibilité) d'établir une bijection entre w de $H^{2,1}(\Omega_i\times]0,T[)$ et les traces de w et $\partial_x w$ dans $H^{3/2,3/4}(\partial\Omega_i\times]0,T[)$ et $H^{1/2,1/4}(\partial\Omega_i\times]0,T[)$. Avec les hypothèses du Théorème 1.3.2 nous avons une bijections entre w de $H^{3,3/2}(\Omega_i\times]0,T[)$ et les traces de w, $\partial_x w$ et $\partial_t w$ dans $H^{5/2,5/4}(\partial\Omega_i\times]0,T[)$, $H^{3/2,3/4}(\partial\Omega_i\times]0,T[)$ et $H^{1/2,1/4}(\partial\Omega_i\times]0,T[)$.

Chapitre 2

Algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes

Dans ce chapitre nous résolvons l'équation (1.2) par une méthode de Schwarz classique de type relaxation d'ondes. L'algorithme de Schwarz classique a été introduit pour résoudre des problèmes stationnaires par H.A. Schwarz [42], et a été analysé entre autres par P.L. Lions 1988, [35]. Il consiste à échanger des données de Dirichlet entre les sous-domaines : l'algorithme correspondant est décrit dans le Tableau 1 avec $\mathcal{B}^{\pm}_{\text{class}} = \mathcal{I}d$.

Dans des travaux plus récents cette méthode a été généralisée aux problèmes d'évolution ; dans l'algorithme présentée dans le Tableau 2, cette méthode consiste à prendre $\mathcal{B}^{\pm}_{\text{SWR}} = \mathcal{I}d$. On trouvera une analyse de la méthode de Schwarz classique de type relaxation d'ondes pour l'équation de la chaleur dans [19] (M.J. Gander et A. Stuart) ou [20] (M.J. Gander et H. Zhao) .

2.1 Algorithme de Schwarz classique

Dans cette section nous considérons une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^2$ avec recouvrement. Nous verrons que le recouvrement est une hypothèse nécessaire à la convergence de l'algorithme de Schwarz classique.
Nous introduisons les demi-espaces $\Omega^- =]-\infty, L[\times\mathbb{R}$ et $\Omega^+ =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ où L représente le recouvrement strictement positif. Nous définissons également les interfaces $\Gamma_L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = L\}$ et $\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ (voir Figure 2.1).

Comme dans la méthode de Schwarz classique nous proposons ici un algorithme de décomposition de domaine avec échange de données de Dirichlet entre les sous-

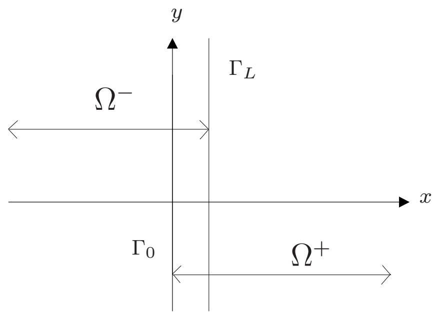


FIG. 2.1 – Décomposition du domaine $\mathbb{R}^2$ avec recouvrement

domaines :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^- \times]0,+\infty[, \\ u^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u^{n+1} & = & v^n & \text{sur } \Gamma_L \times]0,+\infty[, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, v^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^+ \times]0,+\infty[, \\ v^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^+, \\ v^{n+1} & = & u^n & \text{sur } \Gamma_0 \times]0,+\infty[, \end{cases} \tag{2.2}$$

avec u^0 et v^0 à préciser. Rappelons que l'opérateur $\mathcal{L}$ a été défini en (1.3).

Dans la Section 2.2 nous montrons que chacun des problèmes aux limites intervenant dans (2.1), (2.2) possède une unique solution. Ceci nous permet de définir plus précisément u^0 et v^0 dans la Section 2.3 et de montrer que l'algorithme (2.1), (2.2) est bien défini. La Section 2.4 est consacrée à la démonstration de la convergence de l'algorithme.

2.2 Existence, unicité et régularité de la solution de chaque sous-problème

Nous étudions ici les problèmes aux limites qui interviennent dans l'algorithme (2.1), (2.2). Nous ne traitons que le problème dans Ω^-, celui dans Ω^+ se traitant de façon identique. Nous introduisons le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u & = & f & \text{dans } \Omega^- \times]0,+\infty[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u & = & g & \text{sur } \Gamma_L \times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{2.3}$$

Dans le théorème suivant nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour ce problème et nous donnons également un résultat de régularité.

Théorème 2.2.1 *Soit f dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega))$ et w_0 dans $H^1(\Omega)$. Si g est dans $H^{3/2\,,3/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ et si la relation de compatibilité*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y,0) = w_0(L,y) \tag{2.4}$$

est vérifiée, alors le problème (2.3) possède une unique solution u appartenant à $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$. De plus u appartient à $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$.

Preuve : La preuve de ce théorème est classique, elle consiste à appliquer le Théorème A-3.2 si la relation de compatibilité (2.4) est vérifiée ; dans ce cas nous pouvons introduire un relèvement U dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$ tel que

$$\begin{cases} U(\cdot,\cdot,0) = w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ U(L,\cdot,\cdot) = g & \text{sur } \Gamma_L\times]0,+\infty[. \end{cases}$$

En considérant la variable $u_r = u - U$, ceci nous conduit au problème suivant (avec $f_r = f - \mathcal{L}U \in L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega)))$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\,u_r & = & f_r & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[, \\ u_r(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u_r & = & 0 & \text{sur } \Gamma_L\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{2.5}$$

Comme pour le Théorème 1.2.1, l'existence et l'unicité dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ de la solution de ce problème se montre par une méthode de Galerkin.

Pour montrer la régularité, nous prolongeons d'abord u_r et f_r par 0 pour les temps négatifs et nous notons u_r et f_r ces prolongements. Nous introduisons $\hat{\mathsf{u}}_r$ la transformée de Fourier partielle en temps et en espace tangentielle, c.-à-d. en t et en y, de u_r définie par

$$\hat{\mathsf{u}}_r(x,k,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{u}_r(x,y,t)e^{-i(ky+\omega t)}\,dy\,dt,$$

et nous introduisons une définition analogue pour $\hat{\mathsf{f}}_r$. Nous appliquons alors la transformée de Fourier à l'équation $\mathcal{L}\,\mathsf{u}_r = \mathsf{f}_r$ dans $\Omega^-\times\mathbb{R}$ et nous obtenons l'équation différentielle d'ordre 2 en x (voir Annexe B) :

$$-\nu\frac{\partial^2\hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x^2} + a\frac{\partial\hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x} + (i\omega + c + bik + \nu k^2)\hat{\mathsf{u}}_r = \hat{\mathsf{f}}_r. \tag{2.6}$$

Nous multiplions cette équation par $\overline{\hat{\mathsf{u}}}_r$, le conjugué de $\hat{\mathsf{u}}_r$, et nous l'intégrons ensuite en x sur $]-\infty, L[$. Nous trouvons après intégration par parties :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{L}\left(\nu\left|\frac{\partial \hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x}\right|^2(x,\cdot,\cdot)+(i\omega+c+bik+\nu k^2)|\hat{\mathsf{u}}_r|^2(x,\cdot,\cdot)\right)dx \\
&-\nu\frac{\partial \hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x}(L,\cdot,\cdot)\overline{\hat{\mathsf{u}}}_r(L,\cdot,\cdot)+\frac{a}{2}|\hat{\mathsf{u}}_r(L,\cdot,\cdot)|^2=\int_{-\infty}^{L}\hat{\mathsf{f}}_r(x,\cdot,\cdot)\overline{\hat{\mathsf{u}}}_r(x,\cdot,\cdot)dx.
\end{aligned}\tag{2.7}$$

Dans (2.7) les termes de bord disparaissent puisque u_r et donc $\hat{\mathsf{u}}_r$ est nul en $x=L$; nous prenons alors la partie réelle de cette relation et en lui appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (1.5), nous obtenons pour tout $\alpha>0$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{L}\left(\nu\left|\frac{\partial \hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x}\right|^2(x,\cdot,\cdot)+(c+\nu k^2)\,|\hat{\mathsf{u}}_r|^2\,(x,\cdot,\cdot)\right)dx \\
&\qquad\leq\int_{-\infty}^{L}\left(\frac{1}{2\alpha}|\hat{\mathsf{f}}_r|^2(x,\cdot,\cdot)+\frac{\alpha}{2}|\hat{\mathsf{u}}_r|^2(x,\cdot,\cdot)\right)dx.
\end{aligned}$$

Le choix $\alpha=c+\nu k^2$ donne d'une part

$$\int_{-\infty}^{L}|\hat{\mathsf{u}}_r|^2(x,\cdot,\cdot)\,dx\leq\int_{-\infty}^{L}\frac{|\hat{\mathsf{f}}_r|^2}{|c+\nu k^2|^2}(x,\cdot,\cdot)\,dx,\tag{2.8}$$

et d'autre part :

$$\int_{-\infty}^{L}\nu\left|\frac{\partial \hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x}\right|^2(x,\cdot,\cdot)\,dx\leq\int_{-\infty}^{L}\frac{|\hat{\mathsf{f}}_r|^2}{2(c+\nu k^2)}(x,\cdot,\cdot)\,dx.\tag{2.9}$$

Par ailleurs, par l'égalité de Parseval nous trouvons pour $\beta=0,1$ ou 2 :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}\left|\frac{\partial^\beta \mathsf{u}_r}{\partial y^\beta}\right|^2(x,y,t)\,dx\,dy\,dt=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}|k|^{2\beta}|\hat{\mathsf{u}}_r|^2(x,k,\omega)\,dx\,d\omega\,dk,$$

et en utilisant (2.8) nous obtenons la majoration

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}\left|\frac{\partial^\beta \mathsf{u}_r}{\partial y^\beta}\right|^2dx\,dy\,dt\leq\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}\frac{|k|^{2\beta}|\hat{\mathsf{f}}_r|^2}{|c+\nu k^2|^2}dx\,d\omega\,dk.$$

Mais puisque pour $\beta\leq 2$, l'application $k\to|k|^{2\beta}/|c+\nu k^2|^2$ est une fonction continue et bornée quand $|k|$ tend vers l'infini, elle est donc bornée pour tout k de $\mathbb{R}$. Par conséquent il existe une constante C strictement positive telle que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}\left|\frac{\partial^\beta \mathsf{u}_r}{\partial y^\beta}\right|^2dx\,dy\,dt\leq C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}|\mathsf{f}_r|^2\,dx\,dy\,dt,\tag{2.10}$$

nous avons de nouveau utilisé l'égalité de Parseval pour cette estimation.

Le même raisonnement fournit pour $\beta = 0$ ou 1 :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\left(\frac{\partial \mathsf{u}_r}{\partial x}\right)\right|^2 dx\,dy\,dt \leq \tilde{C}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}|\mathsf{f}_r|^2\,dx\,dy\,dt. \tag{2.11}$$

Puisque $\mathsf{f}_r \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ nous tirons des relations (2.10) et (2.11) que u_r, $\partial_x \mathsf{u}_r$, $\partial_y \mathsf{u}_r$, $\partial_{xy}\mathsf{u}_r$ et $\partial_{yy}\mathsf{u}_r$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega^-))$, c.-à-d. $\hat{\mathsf{u}}_r$, $\partial_x\hat{\mathsf{u}}_r$, $ik\hat{\mathsf{u}}_r$ et $k^2\hat{\mathsf{u}}_r$ sont dans $L^2(]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. En revenant à l'équation (2.6) nous observons que $-\nu\partial_{xx}\hat{\mathsf{u}}_r + i\omega\hat{\mathsf{u}}_r$ est dans $L^2(]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, ce qui s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}\nu^2\left|\frac{\partial^2\hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x^2}\right|^2 dx\,dk\,d\omega + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}|i\omega\hat{\mathsf{u}}_r|^2 dx\,dk\,d\omega \\ +2\mathcal{R}e\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L} i\nu\omega\frac{\partial^2\hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x^2}\overline{\hat{\mathsf{u}}}_r\,dx\,dk\,d\omega < \infty.\end{aligned}$$

Si nous récrivons le dernier terme de cette expression au moyen d'une intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&2\mathcal{R}e\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L} i\nu\omega\frac{\partial^2\hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x^2}\overline{\hat{\mathsf{u}}}_r dx\,dk\,d\omega \\ = \; &-2\mathcal{R}e\left(i\nu\omega\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L}\left|\frac{\partial\hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x}\right|^2 dx\,dk\,d\omega\right) + 2\mathcal{R}e\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} i\nu\omega\frac{\partial\hat{\mathsf{u}}_r}{\partial x}\overline{\hat{\mathsf{u}}}_r(L,\cdot,\cdot)dk\,d\omega,\end{aligned}$$

et puisque $\hat{\mathsf{u}}_r(L,\cdot,\cdot) = 0$, ce terme est nul. Nous en déduisons alors que $i\omega\hat{\mathsf{u}}_r$ et $\partial_{xx}\hat{\mathsf{u}}_r$ sont dans $L^2(]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et par suite $\partial_t\mathsf{u}_r$ et $\partial_{xx}\mathsf{u}_r$ sont dans $L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega^-))$.

De ce dernier résultat et des points précédents nous concluons que u_r est dans $H^{2,1}(\Omega^-\times\mathbb{R})$. Par suite $u = u_r + U$ est dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$. □

2.3 Définition de l'algorithme

La première itération de l'algorithme (2.1), (2.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\mathcal{L}\,u^0 &= f \quad \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[,\\ u^0(\cdot,\cdot,0) &= w_0 \quad \text{dans } \Omega^-,\\ u^0(L,\cdot,\cdot) &= g_L \quad \text{sur } \Gamma_L\times]0,+\infty[,\end{cases}\\ &\begin{cases}\mathcal{L}\,v^0 &= f \quad \text{dans } \Omega^+\times]0,+\infty[,\\ v^0(\cdot,\cdot,0) &= w_0 \quad \text{dans } \Omega^+,\\ v^0(0,\cdot,\cdot) &= g_0 \quad \text{sur } \Gamma_0\times]0,+\infty[.\end{cases}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Le théorème qui suit indique qu'à partir du couple (u^n, v^n) l'algorithme (2.1), (2.2) définit un unique couple (u^{n+1}, v^{n+1}). Ce résultat repose sur le Théorème A-3.2 qui donne la régularité des traces de (u^n, v^n) à partir desquelles (u^{n+1}, v^{n+1}) est construit. Le Théorème 2.2.1 donne la régularité du couple (u^{n+1}, v^{n+1}).

Théorème 2.3.1 *Soit f dans $L^2(]0, +\infty[; L^2(\Omega))$ et w_0 dans $H^1(\Omega)$. Soit g_0 dans $H^{3/2\,,\,3/4}(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$ et g_L dans $H^{3/2\,,\,3/4}(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$ tels que*

$$g_0(\cdot, 0) = w_0(0, \cdot) \text{ et } g_L(\cdot, 0) = w_0(L, \cdot) \text{ sur } \Gamma. \tag{2.13}$$

Alors l'algorithme (2.1), (2.2) initialisé par (2.12), définit une suite unique (u^n, v^n) dans $H^{2\,,\,1}(\Omega^-\times]0, +\infty[) \times H^{2\,,\,1}(\Omega^+\times]0, +\infty[)$.

Preuve : Le Théorème 2.2.1 et son analogue dans Ω^+ montrent que le problème (2.12) définit un unique couple (u^0, v^0) dans $H^{2\,,\,1}(\Omega^-\times]0, +\infty[)\times H^{2\,,\,1}(\Omega^+\times]0, +\infty[)$. Par ailleurs si v^n, solution de (2.2) à l'étape n, appartient à $H^{2\,,\,1}(\Omega^+\times]0, +\infty[)$, en utilisant le théorème de trace A-3.2 nous obtenons que $v^n(L, \cdot, \cdot)$ est dans l'espace $H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$ avec $v^n(L, \cdot, 0) = w_0(L, \cdot)$.
Ainsi de nouveau par le Théorème 2.2.1, le problème (2.1) est bien posé dans $H^{2\,,\,1}(\Omega^-\times]0, +\infty[)$. Nous réitérons le raisonnement dans Ω^+, et par récurrence, nous obtenons la preuve du théorème. □

Nous montrons dans la section suivante que l'algorithme (2.1), (2.2) converge.

2.4 Convergence de l'algorithme

Le résultat suivant nous donne un résultat de convergence pour l'algorithme (2.1), (2.2).

Théorème 2.4.1 *Soit f dans $L^2(]0, +\infty[; L^2(\Omega))$ et w_0 dans $H^1(\Omega)$. Soit g_0 dans $H^{3/2\,,\,3/4}(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$ et g_L dans $H^{3/2\,,\,3/4}(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$ vérifiant les relations de compatibilité (2.13). Alors l'algorithme (2.1), (2.2) initialisé par (2.12), converge dans $H^{2\,,\,1}(\Omega^-\times]0, +\infty[) \times H^{2\,,\,1}(\Omega^+\times]0, +\infty[)$.*

Preuve : Nous introduisons e_u^n (resp. e_v^n), l'erreur de l'algorithme (2.1), (2.2) à l'étape $n \geq 0$ dans le domaine Ω^- (resp. Ω^+) c.-à-d. $e_u^n = w_{|\Omega^-} - u^n$ (resp. $e_v^n = w_{|\Omega^+} - v^n$), où w est la solution de (1.2). Ces erreurs vérifient les relations

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, e_u^n & = & 0 & \text{dans } \Omega^-\times]0, +\infty[, \\ e_u^n(\cdot, \cdot, 0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ e_u^n & = & e_v^{n-1} & \text{sur } \Gamma_L\times]0, +\infty[, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}\, e_v^n & = & 0 & \text{dans } \Omega^+\times]0, +\infty[, \\ e_v^n(\cdot, \cdot, 0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ e_v^n & = & e_u^{n-1} & \text{sur } \Gamma_0\times]0, +\infty[. \end{cases} \tag{2.14}$$

Nous prolongeons e_u^n et e_v^n par 0 pour $t < 0$ (nous notons e_u^n et e_v^n ces prolongements). Nous avons $e_u^n(\cdot,\cdot,0) = 0$ et $e_v^n(\cdot,\cdot,0) = 0$, et donc en appliquant la transformée de Fourier en y et t à l'équation de convection diffusion homogène dans $\Omega^-\times]0,+\infty[$ et $\Omega^+\times]0,+\infty[$ nous obtenons (voir Annexe B) :

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathsf{e}}_u^n(x,k,\omega) = 0 \quad \text{pour } (x,k,\omega) \in]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ \text{et} \quad &\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathsf{e}}_v^n(x,k,\omega) = 0 \quad \text{pour } (x,k,\omega) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $\hat{\mathcal{L}} = -\nu\partial^2/\partial x^2 + a\partial/\partial x + \big(i(\omega+bk)+c+\nu k^2\big)$.

Ainsi, $\hat{\mathsf{e}}_u^n$ (resp. $\hat{\mathsf{e}}_v^n$) est solution d'une équation différentielle ordinaire dans $]-\infty, L[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (resp. $]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$). Nous introduisons alors la quantité $\delta = a^2 + 4\nu(i(\omega+bk)+\nu k^2+c)$ et $\delta^{1/2}$ défini par

$$\delta^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(R+\sqrt{R^2+I^2}\right)^{1/2} + i\frac{I}{|I|\sqrt{2}}\left(-R+\sqrt{R^2+I^2}\right)^{1/2}, \tag{2.15}$$

avec $R = a^2+4\nu c+4\nu^2k^2$ et $I = 4\nu(\omega+bk)$. Les racines du polynôme caractéristique de l'opérateur différentiel $\hat{\mathcal{L}}$ sont alors

$$\sigma^+ = \frac{1}{2\nu}\big(a+\delta^{1/2}\big) \qquad \text{et} \qquad \sigma^- = \frac{1}{2\nu}\big(a-\delta^{1/2}\big). \tag{2.16}$$

Comme dans [26] (L. Halpern et M. Schatzman) nous avons $\mathcal{R}e(\sigma^-) < 0$ et $\mathcal{R}e(\sigma^+) > 0$, et pour que $\hat{\mathsf{e}}_u^n$ et $\hat{\mathsf{e}}_v^n$ ne croissent pas exponentiellement à l'infini nous imposons :

$$\begin{cases} \hat{\mathsf{e}}_u^n(x,k,\omega) = \alpha^n(k,\omega)e^{\sigma^+x}, \ x \le L, \\ \hat{\mathsf{e}}_v^n(x,k,\omega) = \beta^n(k,\omega)e^{\sigma^-x}, \ x \ge 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

où α^n et β^n sont calculés grâce aux conditions aux limites de (2.14) sur Γ_0 et Γ_L . Nous obtenons alors $\alpha^{n+1} = e^{(\sigma^--\sigma^+)L}\alpha^{n-1}$ et $\beta^{n+1} = e^{(\sigma^--\sigma^+)L}\beta^{n-1}$, c.-à-d. :

$$\begin{aligned} &\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1}(x,k,\omega) = e^{(\sigma^--\sigma^+)L}\hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}(x,k,\omega) \quad \text{sur }]-\infty, L[\times\mathbb{R}^2, \\ \text{et} \quad &\hat{\mathsf{e}}_v^{n+1}(x,k,\omega) = e^{(\sigma^--\sigma^+)L}\hat{\mathsf{e}}_v^{n-1}(x,k,\omega) \quad \text{sur }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Nous définissons à présent le taux de convergence de l'algorithme (2.1), (2.2) :

$$\rho(\omega,k) = \left|\frac{\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1}}{\hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}}\right| = e^{\mathcal{R}e(\sigma^--\sigma^+)L},$$

et dans le but de trouver une borne supérieure à ρ, nous utilisons les relations

$$\mathcal{R}e(\sigma^- - \sigma^+) \ = \ \mathcal{R}e\big(-\delta^{1/2}/\nu\big) \le -\alpha,$$

où $\alpha = (a^2 + 4\nu c)^{1/2}/\sqrt{2}\nu$ est indépendant des variables de Fourier k et ω.
Par conséquent nous obtenons $\rho \leq e^{-\alpha L}$ d'où $|\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1}| \leq e^{-\alpha L}|\hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}|$ puis

$$((1+k^2)^2 + (1+\omega^2))|\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1}|^2 \leq ((1+k^2)^2 + (1+\omega^2))e^{-2\alpha L}|\hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}|^2 \text{ c.-à-d.}$$

$$\begin{aligned} \|\mathsf{e}_u^{n+1}\|_{H^{2,1}} &\leq e^{-\alpha L}\,\|\mathsf{e}_u^{n-1}\|_{H^{2,1}} \;, \\ \|\mathsf{e}_v^{n+1}\|_{H^{2,1}} &\leq e^{-\alpha L}\,\|\mathsf{e}_v^{n-1}\|_{H^{2,1}} \;. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Par récurrence il vient

$$\begin{aligned} \|e_u^n\|_{H^{2,1}} &\leq e^{-\lfloor n/2\rfloor \alpha L}\,\left(\|e_u^0\|_{H^{2,1}} + \|e_v^0\|_{H^{2,1}}\right), \\ \|\hat{e}_v^n\|_{H^{2,1}} &\leq e^{-\lfloor n/2\rfloor \alpha L}\,\left(\|e_u^0\|_{H^{2,1}} + \|e_v^0\|_{H^{2,1}}\right). \end{aligned}$$

où $\lfloor\lambda\rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur à λ.
En faisant tendre n vers l'infini nous obtenons que l'erreur de l'algorithme dans chaque sous-domaine tend vers 0 et nous terminons la preuve. □

Les relations (2.18) nous indiquent que la vitesse de convergence de l'algorithme de Schwarz classique dépend de la taille du recouvrement L. L'algorithme convergera d'autant plus vite que L sera grand. Le taux de convergence est même égal à 1 si L est nul, c.-à-d. l'algorithme ne converge pas si il n'y a pas de recouvrement (car dans ce cas $\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1} = \hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}$ pour tout n).
Dans le chapitre suivant nous présentons un algorithme de relaxation d'ondes avec des conditions de transmission mieux adaptées que celles de Dirichlet : elles ne nécessitent pas de recouvrement et sont choisies de façon à ce que le taux de convergence soit minimal, nous assurant ainsi une convergence plus rapide.

Chapitre 3

Algorithme de relaxation d'onde optimal

Dans cette section, nous introduisons un algorithme de Schwarz de type relaxation d'ondes plus performant que la méthode de Schwarz classique que nous avons présentée au Chapitre 2. Pour cela nous généralisons aux problèmes d'évolution les travaux de F. Nataf et F. Rogier [37] et de F. Nataf, F. Rogier et E. de Sturler [38] qui utilisent des conditions limites absorbantes comme conditions d'interface, rendant ainsi optimale la convergence de l'algorithme.

Contrairement à la méthode de Schwarz présentée précédemment, le recouvrement n'est ici plus nécessaire à la convergence de l'algorithme. Nous introduisons alors les deux domaines : $\Omega^- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ et $\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et notons Γ l'interface c.-à.-d., $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ (voir Figure 3.1).

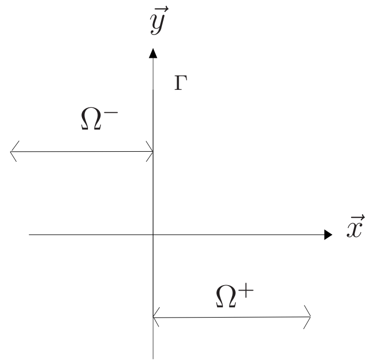


Fig. 3.1 – Décomposition du domaine $\mathbb{R}^2$

Nous montrons dans la Section 3.1 que l'on peut écrire un algorithme de décomposition de domaine avec des conditions de transmission qui entraînent la convergence en deux itérations. Nous verrons toutefois que les opérateurs correspondants ne peuvent être utilisés en pratique dans un algorithme et nous introduisons alors dans la Section 3.2 des opérateurs approchés.

3.1 Conditions de transmission exactes

Nous considérons l'algorithme de Schwarz suivant

$$\begin{cases} \mathcal{L}u^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^- \times]0,+\infty[, \\ u^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}^{n+1} - \mathcal{S}^- u^{n+1} & = & \dfrac{\partial v}{\partial x}^{n} - \mathcal{S}^- v^n & \text{sur } \Gamma \times]0,+\infty[, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}v^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^+ \times]0,+\infty[, \\ v^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}^{n+1} - \mathcal{S}^+ v^{n+1} & = & \dfrac{\partial u}{\partial x}^{n} - \mathcal{S}^+ u^n & \text{sur } \Gamma \times]0,+\infty[, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ à définir. Ce seront des opérateurs pseudo-différentiels qui dépendent de la variable d'espace y et de la variable de temps t.

Théorème 3.1.1 *L'algorithme (3.1) converge en deux itérations vers la solution de (1.2) si les symboles de Fourier de $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ sont σ^+ et σ^- donnés par (2.16).*

PREUVE :
Nous introduisons e_u^n (resp. e_v^n) l'erreur de l'algorithme à l'étape n dans le domaine Ω^- (resp. Ω^+) c.-à.-d. $e_u^n = w_{|\Omega^-} - u^n$ (resp. $e_v^n = w_{|\Omega^+} - v^n$), nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_u^{n+1} & = & 0 & \text{dans } \Omega^- \times]0,+\infty[, \\ e_u^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}^- e_u^{n+1} & = & \dfrac{\partial e_v^n}{\partial x} - \mathcal{S}^- e_v^n & \text{sur } \Gamma \times]0,+\infty[, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}e_v^{n+1} & = & 0 & \text{dans } \Omega^+ \times]0,+\infty[, \\ e_v^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \dfrac{\partial e_v^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}^+ e_v^{n+1} & = & \dfrac{\partial e_u^n}{\partial x} - \mathcal{S}^+ e_u^n & \text{sur } \Gamma \times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{3.2}$$

Comme nous l'avons montré au Chapitre 2, les transformées de Fourier des prolongements par 0 pour les temps négatifs de e_u^n et e_v^n vérifient

$$\begin{cases} \hat{\mathsf{e}}_u^n(x,k,\omega) = \alpha^n(k,\omega)e^{\sigma^+ x} & (x,k,\omega) \in]-\infty,0[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \hat{\mathsf{e}}_v^n(x,k,\omega) = \beta^n(k,\omega)e^{\sigma^- x} & (x,k,\omega) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.3}$$

où les coefficients σ^+ et σ^- sont donnés par (2.16). Les relations suivantes sont alors vérifiées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{\mathsf{e}}_u^n}{\partial x} - \sigma^+ \hat{\mathsf{e}}_u^n = 0, \\ \dfrac{\partial \hat{\mathsf{e}}_v^n}{\partial x} - \sigma^- \hat{\mathsf{e}}_v^n = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Par conséquent, si nous choisissons les opérateurs $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ tels que leurs symboles soient σ^+ et σ^-, dès la deuxième itération, l'erreur dans chaque sous-domaine vérifie l'équation de convection-diffusion homogène avec une condition initiale nulle, et une condition aux limites homogène sur Γ. Par unicité de la solution, nous obtenons alors que $e_u^1 = 0$ dans Ω^- et $e_v^1 = 0$ dans Ω^+. Par suite $u^1 = w_{|\Omega^-}$ et $v^1 = w_{|\Omega^+}$.

$\square$

Les opérateurs $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ conduisent à la convergence en deux itérations vers la solution globale du problème, mais ils ne sont pas locaux ; nous ne les connaissons que par leur transformée de Fourier, trop coûteuse à expliciter. Nous ne pouvons donc pas mettre en œuvre l'algorithme précédent avec ces conditions de transmission. C'est pourquoi nous allons approcher les symboles σ^+ et σ^- par des polynômes en k et ω dans lesquels nous reconnaîtrons des transformées de Fourier. Nous obtiendrons ainsi une approximation de $\mathcal{S}^\pm$ sous forme d'opérateurs différentiels. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.2 Algorithme de relaxation d'ondes avec des conditions de transmission d'ordre 0 ou 1

Comme nous l'avons vu précédemment, nous ne pouvons pas calculer explicitement les opérateurs $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ dont les symboles de Fourier sont les σ^+ et σ^- et cela à cause de la racine carrée qui apparaît dans (2.16).

Nous introduisons alors ici des polynômes de degré 0 ou 1 que nous noterons respectivement $\sigma_0^\pm$ et $\sigma_1^\pm$:

$$\begin{cases} \sigma_0^+ = \dfrac{a+p}{2\nu} & \text{et} \quad \sigma_0^- = \dfrac{a-p}{2\nu}, \\ \sigma_1^+ = \dfrac{a+p}{2\nu} + i\omega q + ibkq & \text{et} \quad \sigma_1^- = \dfrac{a-p}{2\nu} - i\omega q - ibkq \ , \end{cases}$$

où $p > 0$ et $q > 0$. Dans ce cas les opérateurs correspondants sont différentiels :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0^+ = \dfrac{a+p}{2\nu} & \text{et} \quad \mathcal{S}_0^- = \dfrac{a-p}{2\nu}, \\ \mathcal{S}_1^+ = \dfrac{a+p}{2\nu} + q\dfrac{\partial}{\partial t} + bq\dfrac{\partial}{\partial y} & \text{et} \quad \mathcal{S}_1^- = \dfrac{a-p}{2\nu} - q\dfrac{\partial}{\partial t} - bq\dfrac{\partial}{\partial y}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Si dans l'algorithme (3.1), nous remplaçons $\mathcal{S}^{\pm}$ par $\mathcal{S}_j^{\pm}$, nous obtenons un nouvel algorithme avec des conditions de transmission d'ordre 0 si $j = 0$ ou d'ordre 1 si $j = 1$.

Pour chacun de ces cas nous étudions l'algorithme correspondant. Nous nous assurons dans un premier temps qu'il est bien posé : nous considérons le cas des conditions d'ordre 0 au Chapitre 4 et d'ordre 1 au Chapitre 5. Ensuite nous montrons que ces algorithmes convergent au Chapitre 6. Enfin, au Chapitre 7 nous choisissons les paramètres p et q de façon à ce que les opérateurs $\mathcal{S}_j^{\pm}$ soient une bonne approximation (dans un sens à définir) des opérateurs $\mathcal{S}^{\pm}$.

Chapitre 4

Algorithme avec conditions de transmission d'ordre 0

Dans le chapitre précédent nous avons introduit un algorithme de relaxation d'ondes optimal. Il est optimal dans le sens où il converge en deux itérations. Mais nous avons vu que nous ne pouvions pas l'utiliser directement et nous avons introduit des opérateurs différentiels pour approcher ces opérateurs optimaux. Nous traitons ici le cas où ces opérateurs approchés sont d'ordre 0.

Si dans l'algorithme (3.1) nous remplaçons $\mathcal{S}^{\pm}$ par $\mathcal{S}_0^{\pm}$ donnés par (3.5), nous obtenons un algorithme de relaxation d'ondes avec des conditions de transmission d'ordre 0. Dans ce chapitre nous étudions l'algorithme :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}\, u^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^{-}\times]0,+\infty[, \\ u^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^{-}, \\ \dfrac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}u^{n+1} & = & \dfrac{\partial v^{n}}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}v^{n} & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{L}\, v^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^{+}\times]0,+\infty[, \\ v^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^{+}, \\ \dfrac{\partial v^{n+1}}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu}v^{n+1} & = & \dfrac{\partial u^{n}}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu}u^{n} & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \end{array}\right. \tag{4.2}$$

avec u^0 et v^0 à définir.

La Section 4.1 est consacrée à montrer que le problème dans chaque sous-domaine possède une unique solution. Ceci nous assurera que l'algorithme est bien défini et nous permettra de définir u^0 et v^0 dans la Section 4.2. La convergence de l'algorithme (4.1), (4.2) sera montrée au Chapitre 6.

4.1 Etude du problème dans chaque sous-domaine

Nous étudions ici les problèmes aux limites qui interviennent dans l'algorithme (4.1), (4.2). Nous ne traitons que le cas du domaine Ω^-, celui du domaine Ω^+ se traitant de façon analogue. Nous introduisons le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u & = & f & \text{dans } \Omega^- \times]0,+\infty[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}u & = & g & \text{sur } \Gamma \times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.3}$$

Théorème 4.1.1 *Soit f dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega))$, w_0 dans $H^1(\Omega)$ et $p>0$. Si g est dans $H^{1/2\,,1/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$, alors le problème (4.3) admet une unique solution u dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ avec $u_{|\Gamma}$ dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Gamma))$. De plus u appartient à $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$.*

Preuve : Nous nous ramenons, dans un premier temps, à un problème avec une condition initiale nulle et une condition aux limites homogène sur $\Gamma\times]0,+\infty[$.

Soit g_0 une fonction de $H^{3/2\,,3/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ telle que $g_0(\cdot,0)=w_0(0,\cdot)$ sur Γ. Puisque $g+(a-p)g_0/2\nu$ appartient à $H^{1/2\,,1/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$, le Théorème A-3.2 nous donne l'existence d'un relèvement U dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$ tel que

$$\begin{cases} U(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ U(0,\cdot,\cdot) & = & g_0 & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) & = & g + \dfrac{a-p}{2\nu}g_0 & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[. \end{cases}$$

Par suite nous avons trouvé U dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$ tel que $\partial_x U-(a-p)U/2\nu = g$ sur $\Gamma\times]0,+\infty[$.

Nous introduisons alors $u_r = u-U$ et nous posons $f_r = f_{|\Omega^-} - \mathcal{L}U$ (nous avons $f_r \in L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))$). Nous sommes alors amenés à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_r & = & f_r & \text{dans } \Omega^- \times]0,+\infty[, \\ u_r(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}u_r & = & 0 & \text{sur } \Gamma \times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.4}$$

Nous multiplions l'équation $\mathcal{L}u_r = f_r$ par $v\in H^1(\Omega^-)$, nous intégrons en espace puis nous utilisons la condition aux limites sur $\Gamma\times]0,+\infty[$. Si $(\cdot,\cdot)_{\Omega^-}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega^-)$ et $\|\cdot\|^2_{\Omega^-}$ la norme associée, nous obtenons alors la formulation faible suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_r, v)_{\Omega^-} + \nu(\nabla u_r, \nabla v)_{\Omega^-} + \dfrac{1}{2}\Big((\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla u_r, v)_{\Omega^-} - (\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla v, u_r)_{\Omega^-}\Big) \\ + c(u_r, v)_{\Omega^-} + \dfrac{p}{2}\displaystyle\int_\Gamma u_r v\, dy = (f_r, v)_{\Omega^-} \text{pour tout } v \text{ de } H^1(\Omega^-), \\ u_r(\cdot, \cdot, 0) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Nous substituons v par u_r dans cette formulation, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \nu\|\nabla u_r\|^2_{\Omega^-} + c\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \frac{p}{2}\int_\Gamma |u_r|^2\, dy = (f_r, u_r)_{\Omega^-}. \tag{4.6}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (1.5) sur le second membre de cette égalité :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \nu\|\nabla u_r\|^2_{\Omega^-} + \frac{c}{2}\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \frac{p}{2}\int_\Gamma |u_r|^2\, dy \leq \frac{1}{2c}\|f_r\|^2_{\Omega^-}, \tag{4.7}$$

puis nous intégrons sur $]0, t[$, $t > 0$, et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_r\|^2_{\Omega^-}(t) + \nu\int_0^t \|\nabla u_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\, d\sigma + \frac{c}{2}\int_0^t \|u_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\, d\sigma \\ + \frac{p}{2}\int_0^t\int_\Gamma |u_r|^2 dy \leq \frac{1}{2c}\int_0^t \|f_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Cette estimation *a priori* nous donne l'unicité de la solution u_r dans l'espace $L^\infty(]0, +\infty[; L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0, +\infty[; H^1(\Omega^-))$ et dont la trace sur Γ appartient à l'espace $L^2(]0, +\infty[; L^2(\Gamma))$.

Pour l'existence, nous utilisons la méthode de Galerkin ; nous montrons avec les notations de la démonstration du Théorème 1.2.1 que u_m vérifie l'estimation *a priori* (4.8). Par conséquent u_m est borné dans $L^\infty(]0, +\infty[; L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0, +\infty[; H^1(\Omega^-))$ indépendemment de m et sa trace sur Γ, $u_{m|\Gamma}$, est bornée dans $L^2(]0, +\infty[; L^2(\Gamma))$. Ceci nous donne des résultats de convergence faible et faible $\star$ et nous pouvons alors passer à la limite dans (4.5) appliquée à u_m et montrer que u_m converge vers u_r. Ceci montre l'existence de u_r dans $L^\infty(]0, +\infty[; L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0, +\infty[; H^1(\Omega^-))$ avec $u_{r|\Gamma}$ dans $L^2(]0, +\infty[; L^2(\Gamma))$.

Nous montrons à présent la régularité.

Nous multiplions l'équation $\mathcal{L}u_r = f_r$ par $-\partial_{xx}u_r - \gamma_1\partial_{yy}u_r$, avec γ_1 une constante strictement positive que nous choisirons plus loin, et nous intégrons sur Ω^-. Nous détaillons ici le calcul de chacun des termes pour lesquels nous utilisons dans un premier temps une intégration par parties puis la condition aux limites sur Γ : $\partial_x u_r = (a - p)u_r/2\nu$.

i. Le terme d'évolution est intégré par parties :
$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} \\
=&\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right), \frac{\partial u_r}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y}\right), \frac{\partial u_r}{\partial y}\right)_{\Omega^-} - \int_\Gamma \frac{\partial u_r}{\partial t}\frac{\partial u_r}{\partial x}\, dy \\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + \gamma_1 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - \frac{a-p}{2\nu}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Gamma |u_r|^2\, dy.
\end{aligned}
$$

ii. Le terme de convection est décomposé en deux parties. Par intégration par parties nous trouvons d'abord
$$
\begin{aligned}
&-a\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} \\
=&a\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right), \frac{\partial u_r}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + a\gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y}\right), \frac{\partial u_r}{\partial y}\right)_{\Omega^-} - a\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|^2 dy \\
=&\frac{a}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|^2 dy + \frac{a\gamma_1}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy - a\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|^2 dy \\
=&-\frac{a}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|^2 dy + \frac{a\gamma_1}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy.
\end{aligned}
$$
De façon similaire nous avons :
$$
\begin{aligned}
&-b\left(\frac{\partial u_r}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} \\
=&b\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right), \frac{\partial u_r}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + b\gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y}\right), \frac{\partial u_r}{\partial y}\right)_{\Omega^-} - b\int_\Gamma \frac{\partial u_r}{\partial y}\frac{\partial u_r}{\partial x} dy = 0.
\end{aligned}
$$
Par conséquent nous trouvons en utilisant la condition aux limites sur Γ,
$$
-\left(\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla u_r, \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} = -\frac{a}{2}\left(\frac{a-p}{2\nu}\right)^2 \int_\Gamma |u_r|^2\, dy + \frac{a\gamma_1}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy.
$$

iii. Le terme de réaction est intégré par parties :
$$
-c\left(u_r, \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} = c\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + c\gamma_1\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - c\frac{a-p}{2\nu}\int_\Gamma |u_r|^2\, dy.
$$

iv. Le terme de diffusion est traité comme suit
$$
\begin{aligned}
&\nu\left(\triangle u_r, \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} \\
=&\nu\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right\|^2_{\Omega^-} + \nu\gamma_1\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-} + \nu(1+\gamma_1)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-}.
\end{aligned}
$$

Or le troisième terme de cette expression se récrit en utilisant successivement une intégration par parties en y puis en x et enfin en utilisant la condition au bord :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y}\right), \frac{\partial u_r}{\partial y}\right)_{\Omega^-} \\
&= \left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\frac{\partial u_r}{\partial y}\, dy \\
&= \left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - \frac{a-p}{2\nu}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy.
\end{aligned}$$

En regroupant les calculs i. à iv. nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + \gamma_1\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - \frac{a-p}{2\nu}\int_\Gamma |u_r|^2\, dy\right] - \frac{a}{2}\left(\frac{a-p}{2\nu}\right)^2\int_\Gamma |u_r|^2\; dy \\
&+\frac{a\gamma_1}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy + c\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + c\gamma_1\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - c\frac{a-p}{2\nu}\int_\Gamma |u_r|^2\, dy + \nu\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right\|^2_{\Omega^-} \\
&+\nu\gamma_1\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-} + \nu(1+\gamma_1)\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - (1+\gamma_1)\frac{(a-p)}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy \\
&= \left(f_r, \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right)_{\Omega^-} + \gamma_1\left(f_r, \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-}.
\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nous appliquons la relation (1.5) au second membre de cette équation ; en réarrangeant les termes nous obtenons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + \gamma_1\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - \frac{a-p}{2\nu}\int_\Gamma |u_r|^2\, dy\right] - \frac{a-p}{2\nu}\left(c + \frac{a}{2}\frac{a-p}{2\nu}\right)\int_\Gamma |u_r|^2\, dy \\
&+\left(-\frac{a}{2} + \frac{p}{2}(1+\gamma_1)\right)\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy + c\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + c\gamma_1\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} + \frac{\nu}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right\|^2_{\Omega^-} \\
&+\frac{\nu\gamma_1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-} + \nu(1+\gamma_1)\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} \leq \frac{1}{2\nu}(1+\gamma_1)\|f_r\|^2_{\Omega^-}.
\end{aligned}$$

Nous multiplions alors (4.7) par une constante γ_2 strictement positive que nous choisirons plus loin et ajoutons le résultat à l'estimation précédente. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\gamma_2\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + \gamma_1\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - \frac{a-p}{2\nu}\int_\Gamma |u_r|^2\,dy\Big] \\
&+\left(\gamma_2\frac{p}{2} - \frac{a-p}{2\nu}\left(c+\frac{a}{2}\frac{a-p}{2\nu}\right)\right)\int_\Gamma |u_r|^2\,dy + \left(-\frac{a}{2}+\frac{p}{2}(1+\gamma_1)\right)\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy \\
&+\frac{c\gamma_2}{2}\|u_r\|^2_{\Omega^-} + (c+\nu\gamma_2)\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + (c\gamma_1+\nu\gamma_2)\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} + \frac{\nu}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right\|^2_{\Omega^-} \\
&+\frac{\nu\gamma_1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-} + \nu(1+\gamma_1)\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} \le \left(\frac{\gamma_2}{2c}+\frac{1}{2\nu}(1+\gamma_1)\right)\|f_r\|^2_{\Omega^-}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Par hypothèse la constante p est strictement positive et nous choisissons $\gamma_1 \ge a/p-1$ et $\gamma_2 \ge (a-p)\left(c+a(a-p)/4\nu\right)/\nu p$. Sous ces conditions les facteurs de $\int_\Gamma |u_r|^2\,dy$ et $\int_\Gamma |\partial_y u_r|^2\,dy$ sont positifs ou nuls. L'intégration de l'inégalité (4.9) sur l'intervalle de temps $]0,t[$ implique alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big[\gamma_2\|u_r\|^2_{\Omega^-}(t) + \left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-}(t) + \gamma_1\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-}(t) - \frac{a-p}{2\nu}\int_\Gamma |u_r|^2(0,y,t)dy\Big] \\
&+\int_0^t\left(\frac{c\gamma_2}{2}\|u_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma) + (c+\nu\gamma_2)\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma) + (c\gamma_1+\nu\gamma_2)\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\right)d\sigma \\
&+\int_0^t\left(\frac{\nu}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma) + \frac{\nu\gamma_1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma) + \nu(1+\gamma_1)\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial y}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\right)d\sigma \\
&\qquad\le \left(\frac{\gamma_2}{2c}+\frac{1}{2\nu}(1+\gamma_1)\right)\int_0^t \|f_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans le cas où $p \ge a$ nous obtenons rapidement d'après l'estimation précédente que u_r appartient à $L^2(]0,+\infty[;H^2(\Omega^-))$. Dans le cas contraire nous utilisons la relation :

$$\int_\Gamma |u_r|^2 dy \le \alpha\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \frac{1}{\alpha}\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-},$$

valable pour tout $\alpha > 0$. La première ligne de (4.10) est alors minorée par

$$\left(\gamma_2 - \alpha\frac{a-p}{2\nu}\right)\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \left(1-\frac{a-p}{2\nu}\frac{1}{\alpha}\right)\left\|\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-}.$$

Nous choisissons α dans l'intervalle $[(a-p)/2\nu, 2\nu\gamma_2/(a-p)]$ et cet intervalle n'est pas réduit à l'ensemble nul sous la condition $\gamma_2 \ge (a-p)^2/(2\nu)^2$. Ainsi en choisissant

$\gamma_2 \geq \max((a-p)\,(c+a(a-p)/4\nu)\,/\nu p, (a-p)^2/(2\nu)^2)$, nous pouvons choisir α tel que les quantités $(\gamma_2 - \alpha(a-p)/2\nu)$ et $1-(a-p)/2\nu\alpha$ soient positives ou nulles. Ainsi nous avons également u_r dans $L^2(]0,+\infty[;H^2(\Omega^-))$ quand $p < a$.

Par conséquent pour tout $p > 0$, u_r appartient à $L^2(]0,+\infty[;H^2(\Omega^-))$. Par ailleurs, nous déduisons de l'équation $\mathcal{L}u_r = f_r$ que $\partial_t u_r$ est dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))$ et donc u_r est dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0+\infty[)$. Et puisque $u_r = U - u$ avec U dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0+\infty[)$, nous en déduisons le résultat du théorème. □

4.2 Définition de l'algorithme

Nous initialisons l'algorithme (4.1), (4.2) comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u^0 & = f \quad \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[, \\ u^0(\cdot,\cdot,0) & = w_0 \quad \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u^0}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}u^0 & = g \quad \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}v^0 & = f \quad \text{dans } \Omega^+\times]0,+\infty[, \\ v^0(\cdot,\cdot,0) & = w_0 \quad \text{dans } \Omega^+, \\ \dfrac{\partial v^0}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu}v^0 & = h \quad \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.11}$$

Théorème 4.2.1 *Soit f dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega))$, w_0 dans $H^1(\Omega)$ et $p > 0$. Soit g dans $H^{1/2,1/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ et h dans $H^{1/2,1/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$. L'algorithme (4.1), (4.2) initialisé par (4.11) définit une suite unique (u^n,v^n) dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)\times H^{2,1}(\Omega^+\times]0,+\infty[)$.*

Preuve : Le problème (4.11) définit d'après le Théorème 4.1.1 un unique couple (u^0,v^0) dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)\times H^{2,1}(\Omega^+\times]0,+\infty[)$.
Par ailleurs, si v^n, solution de (4.2), appartient à $H^{2,1}(\Omega^+\times]0,+\infty[)$ en appliquant le théorème de traces A-3.2, nous avons :

$$\begin{aligned} & v^n(0,\cdot,\cdot) \in H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[), \\ & \frac{\partial v^n}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) \in H^{1/2,1/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[). \end{aligned}$$

Ceci signifie que $g = \partial_x v^n(0,\cdot,\cdot) - (a-p)v^n(0,\cdot,\cdot)/2\nu$ est dans $H^{1/2,1/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$. Le Théorème 4.1.1 nous donne alors l'existence de u^{n+1} dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$. Un raisonnement identique dans Ω^+ termine la preuve. □

Chapitre 5

Algorithme avec conditions de transmission d'ordre 1

Nous proposons à présent de remplacer les opérateurs $\mathcal{S}^{\pm}$ de l'algorithme (3.1) par les opérateurs différentiels $\mathcal{S}_1^{\pm}$ définis en (3.5) ; nous obtenons alors un algorithme de relaxation d'ondes avec des conditions de transmission d'ordre 1. Nous étudions ici l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^- \times]0,T[, \\ u^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} + q\dfrac{\partial}{\partial t} + bq\dfrac{\partial}{\partial y}\right) u^{n+1} & = & \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} + q\dfrac{\partial}{\partial t} + bq\dfrac{\partial}{\partial y}\right) v^{n} \\ & & \text{sur } \Gamma \times]0,T[. \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, v^{n+1} & = & f & \text{dans } \Omega^+ \times]0,T[, \\ v^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu} - q\dfrac{\partial}{\partial t} - bq\dfrac{\partial}{\partial y}\right) v^{n+1} & = & \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu} - q\dfrac{\partial}{\partial t} - bq\dfrac{\partial}{\partial y}\right) u^{n} \\ & & \text{sur } \Gamma \times]0,T[. \end{cases} \tag{5.2}$$

avec u^0 et v^0 à définir.
Dans la Section 5.1, nous montrons que les deux problèmes aux limites intervenant dans cet algorithme sont bien posés. Ceci nous permettra alors de montrer que l'algorithme est bien défini dans la Section 5.2. La convergence sera démontrée au Chapitre 6.

5.1 Etude du problème aux limites dans chaque sous-domaine

Nous étudions ici les problèmes aux limites qui interviennent dans l'algorithme (5.1), (5.2). Les deux problèmes étant similaires, nous travaillons sur le problème dans Ω^- :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u & = & f & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}u + q\dfrac{\partial u}{\partial t} + bq\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & g & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{5.3}$$

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe (1.3) nous devons imposer suffisamment de régularité à f et w_0 pour pouvoir définir sur Γ la trace de $\partial_t u$. C'est pourquoi nous prendrons f dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$. Sous cette condition, w, la solution de l'équation de convection diffusion dans $\mathbb{R}^2$, est une fonction de $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$. Nous supposons par ailleurs que g s'écrit sous la forme :

$$g = g_1 + \Big(- \frac{a-p}{2\nu} + q\frac{\partial}{\partial t} + bq\frac{\partial}{\partial y}\Big) g_0. \tag{5.4}$$

avec

$$\begin{aligned} g_0 &\in H^{5/2,5/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[) \\ \text{et } g_1 &\in H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[), \end{aligned} \tag{5.5}$$

vérifiant les relations de compatibilité sur Γ :

$$\begin{aligned} g_0(\cdot,0) &= w_0(0,\cdot), \\ g_1(\cdot,0) &= \frac{\partial w_0}{\partial x}(0,\cdot). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Le résultat principal de ce chapitre est contenu dans le théorème suivant :

Théorème 5.1.1 *Soit f dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$. Si p et q sont strictement positifs, si g peut s'écrire sous la forme (5.4) avec g_0 et g_1 donnés par (5.5) et si les relations de compatibilité (5.6) sont vérifiées, alors le problème (5.3) possède une unique solution u dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ avec $u_{|\Gamma}$ dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Gamma)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Gamma))$. De plus u appartient à $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$.*

Ce théorème est démontré en plusieurs étapes. Dans le paragraphe 5.1.1 nous montrons que le problème (5.3) possède une unique solution dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$, puis dans le paragraphe 5.1.2 nous montrons la régularité de cette solution.

5.1.1 Existence et unicité de la solution

Nous introduisons le problème intermédiaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_r & = & f_r & \text{dans } \Omega^- \times]0,+\infty[, \\ u_r(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}u_r + q\dfrac{\partial u_r}{\partial t} + bq\dfrac{\partial u_r}{\partial y} & = & 0 & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{5.7}$$

Si $(\cdot,\cdot)_{\Omega^-}$ et $\|\cdot\|_{\Omega^-}$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega^-)$ la formulation faible du problème (5.7) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_r \text{ tel que pour tout } v \text{ dans } H^1(\Omega^-) \\ \dfrac{d}{dt}\left((u_r,v)_{\Omega^-} + q\nu\displaystyle\int_\Gamma u_r v\,dy\right) + c(u_r,v)_{\Omega^-} + \dfrac{1}{2}\left((\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla u_r, v)_{\Omega^-} - (\vec{\mathbf{b}}\cdot\nabla v, u_r)_{\Omega^-}\right) \\ +\,\nu(\nabla u_r,\nabla v)_{\Omega^-} + \dfrac{p}{2}\displaystyle\int_\Gamma u_r v\,dy + \dfrac{bq\nu}{2}\int_\Gamma\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial y}v - \dfrac{\partial v}{\partial y}u_r\right)dy = (f_r,v)_{\Omega^-}, \\ u_r(\cdot,\cdot,0) = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Le Théorème 5.1.2 donne un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (5.7) puis le résultat est généralisé au problème (5.3) dans le Théorème 5.1.3.

Théorème 5.1.2 *Soit f_r dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$. Si p et q sont strictement positifs alors le problème (5.7) possède une unique solution dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$.*

Preuve : Nous considérons le problème (5.7) et nous multiplions l'équation $\mathcal{L}u_r = f_r$ par u_r puis nous intégrons sur Ω^-. En utilisant les conditions aux limites nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_r\|^2_{\Omega^-} + q\nu\int_\Gamma |u_r|^2\,dy\right] + c\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \nu\|\nabla u_r\|^2_{\Omega^-} + \frac{p}{2}\int_\Gamma |u_r|^2\,dy = (f_r,u_r)_{\Omega^-},$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (1.5) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_r\|^2_{\Omega^-} + q\nu\int_\Gamma |u_r|^2\,dy\right] + c\|u_r\|^2_{\Omega^-} + \nu\|\nabla u_r\|^2_{\Omega^-} + \frac{p}{2}\int_\Gamma |u_r|^2\,dy \\ \le \frac{1}{2c}\|f_r\|^2_{\Omega^-} + \frac{c}{2}\|u_r\|^2_{\Omega^-}, \end{aligned}$$

soit après intégration sur $]0,t[$ (la condition initiale est identiquement nulle) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big[\|u_r\|^2_{\Omega^-}(t) + q\nu\int_\Gamma |u_r|^2(0,y,t)\,dy\Big] + \frac{c}{2}\int_0^t \|u_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\,d\sigma \\ +\nu\int_0^t \|\nabla u_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\,d\sigma + \frac{p}{2}\int_0^t\int_\Gamma |u_r|^2(0,y,\sigma)\,dy\,d\sigma \\ \le \frac{1}{2c}\int_0^t \|f_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Nous allons chercher d'autres estimations *a priori*, en multipliant l'équation $\mathcal{L}u_r = f_r$ par $-\partial_{yy}u_r$. Dans un premier temps nous écrivons les relations suivantes que nous obtenons par intégrations par parties :

$$\begin{aligned} -a\left(\frac{\partial u_r}{\partial x},\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} &= a\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y}\right),\frac{\partial u_r}{\partial y}\right)_{\Omega^-} = \frac{a}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy. \\ \text{et}\quad \nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-} &= -\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y}\right),\frac{\partial u_r}{\partial y}\right)_{\Omega^-} \\ &= \nu\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} - \nu\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\frac{\partial u_r}{\partial y}dy.\end{aligned}$$

Ainsi en multipliant l'équation $\mathcal{L}u_r = f_r$ par $-\partial_{yy}u_r$ et en intégrant le résultat sur Ω^- nous trouvons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} + \frac{a}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy + \nu\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-} + \nu\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} \\ -\nu\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\frac{\partial u_r}{\partial y}dy + c\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} = -\left(f_r,\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

En utilisant la condition aux limites $-\partial_x u_r = -(a-p)u_r/2\nu + q\partial_t u_r + bq\partial_y u_r$ sur Γ, le deuxième terme de bord de (5.10) devient :

$$-\nu\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\frac{\partial u_r}{\partial y} = -\frac{a-p}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy + \frac{q\nu}{2}\frac{d}{dt}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy,$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} + \frac{a}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy + \nu\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-} + \nu\left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} \\ -\frac{a-p}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy + \frac{q\nu}{2}\frac{d}{dt}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2 dy \\ +c\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} = -\left(f_r,\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right)_{\Omega^-}.\end{aligned}$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (1.5) au second membre puis nous intégrons sur $]0,t[$. Nous obtenons après avoir réarrangé les termes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-}(t) + \frac{q\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2(0,y,t)\,dy + \frac{\nu}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\,d\sigma \\ +\nu\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\,d\sigma + c\int_0^t \left\|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\,d\sigma \\ +\frac{p}{2}\int_0^t\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_r}{\partial y}\right|^2(0,y,\sigma)\,dy\,d\sigma \le \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|f_r\|^2_{\Omega^-}(\sigma)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Si f_r est nul, les inégalités (5.9) et (5.11) nous donnent, grâce à la positivité de p et q, l'unicité de la solution u_r dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ avec $u_{r|\Gamma}$ dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Gamma)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Gamma))$.

Pour montrer l'existence, nous utilisons la méthode de Galerkin (voir [10] R. Dautray et J.L. Lions). Comme au Chapitre 1, nous introduisons u_m la solution de (5.8) dans un espace de dimension finie et cette solution vérifie également (5.9) et (5.11). Avec l'hypothèse f_r dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega))$, nous obtenons alors que u_m reste dans un borné de $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ et que sa trace sur Γ reste dans un borné de $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Gamma)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Gamma))$.
Ceci nous permet de déduire l'existence d'une sous-suite (u_p) telle que :

$$\begin{array}{lll} u_p \rightharpoonup u & \text{faible}\star & \text{dans } L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)), \\ u_p \rightharpoonup u & \text{faible} & \text{dans } L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-)), \\ u_p(0,\cdot,\cdot) \rightharpoonup u & \text{faible}\star & \text{dans } L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Gamma)), \\ u_p(0,\cdot,\cdot) \rightharpoonup u & \text{faible} & \text{dans } L^2(]0,+\infty[;H^1(\Gamma)). \end{array}$$

Nous pouvons alors passer à la limite dans (5.8) appliquée à u_m et montrer que la limite vers laquelle tend u_p est solution de (5.7). □

Le théorème suivant nous donne l'existence pour le problème de départ (5.3).

Théorème 5.1.3 *Soit f dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$. Si p et q sont strictement positifs, si g peut s'écrire sous la forme (5.4) avec g_0 et g_1 donnés par (5.5) et si les relations de compatibilité (5.6) sont vérifiées, alors le problème (5.3) possède une unique solution u dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ avec $u_{|\Gamma}$ dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Gamma)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Gamma))$.*

PREUVE : Pour démontrer ce théorème nous nous ramenons à un problème avec une condition initiale nulle et une condition aux limites homogène sur $\Gamma\times]0,+\infty[$. Pour cela, nous appliquons le Théorème de relèvement A-3.2 et avec les hypothèses

$$(w_{0|\Omega^-}, g_0, g_1) \in H^2(\Omega^-) \times H^{5/2,5/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[) \times H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[),$$

et les conditions de compatibilité (5.6), nous déduisons qu'il existe U appartenant à $H^{3,3/2}(\Omega^- \times]0,+\infty[)$ tel que :

$$\begin{cases} U(\cdot,\cdot,0) & = & w_{0|\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-, \\ U(0,\cdot,\cdot) & = & g_0 & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) & = & g_1 & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[. \end{cases}$$

Grâce à la relation (5.4) ceci signifie que nous avons trouvé U dans $H^{3,3/2}(\Omega^- \times]0,+\infty[)$ qui vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}U + q\dfrac{\partial U}{\partial t} + bq\dfrac{\partial U}{\partial y} = g \text{ sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \\ U(\cdot,\cdot,0) = w_{0|\Omega^-} \text{ dans } \Omega^-. \end{cases}$$

En introduisant $u_r = u - U$, et $f_r = f_{|\Omega^-} - \mathcal{L}U \in H^{1,1/2}(\Omega^- \times]0,+\infty[)$, nous sommes amenés alors à résoudre le problème (5.7) qui par le Théorème 5.1.2 possède une unique solution u_r dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ avec $u_{r|\Gamma}$ dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Gamma))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Gamma))$. Par ailleurs U est dans $H^{3,3/2}(\Omega^- \times]0,+\infty[)$ qui est inclus dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ et $H^{5/2,5/4}(\Gamma\times]0,+\infty[)$ est inclus dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Gamma))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Gamma))$ (voir [7] H. Brezis). Nous en concluons qu'il existe une unique solution u au problème (5.3) dans l'espace indiqué par le théorème. □

5.1.2 Régularité de la solution

Nous montrons à présent un résultat de régularité pour la solution du problème (5.3). Pour cela, nous avons besoin de lemmes techniques indiquant que certaines fonctions de k et ω sont bornées. Pour des raisons de clarté, ces lemmes sont énoncés et démontrés dans l'Annexe C.

Pour montrer le résultat de régularité, nous utilisons des transformées de Fourier. Pour simplifier les calculs, nous nous ramenons à l'équation de convection-diffusion homogène avec une condition initiale nulle. Pour cela, nous rappelons qu'avec les hypothèses f dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$, w, la solution de l'équation de convection-diffusion sur le domaine entier Ω, est dans $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$. Nous introduisons $e_u = u - w_{|\Omega^-}$ et le problème devient alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_u & = & 0 & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[, \\ e_u(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial e_u}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}e_u + q\dfrac{\partial e_u}{\partial t} + bq\dfrac{\partial e_u}{\partial y} & = & g_w & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \end{cases} \tag{5.12}$$

où $g_w = g - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} w + q\dfrac{\partial w}{\partial t} + bq\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)|\Gamma$ est dans $H^{1/2,1/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$.

Nous utilisons la définition des espaces de Sobolev anisotropes sur un demi-plan donnée dans l'Annexe A. Ainsi pour montrer que e_u appartient à $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$, nous décomposons le résultat en trois parties. Le Théorème 5.1.4 prouve que e_u appartient à $L^2(\mathbb{R}^-; H^{3/2}(]0,+\infty[; L^2(\mathbb{R})))$ et le Théorème 5.1.5 nous donne e_u dans $L^2(\mathbb{R}^-; L^2(]0,+\infty[; H^3(\mathbb{R})))$. Ensuite nous obtenons que e_u appartient à l'espace $H^3(\mathbb{R}^-; L^2(\mathbb{R}\times]0,+\infty[))$ par le Théorème 5.1.6.

Une première partie du résultat de régularité nous est donnée par le théorème suivant.

Théorème 5.1.4 *Si g_w appartient à $H^{1/4}(]0,+\infty[; L^2(\mathbb{R}))$ alors pour tout p strictement positifs la solution de (5.12), e_u, appartient à $L^2(\mathbb{R}^-; H^{3/2}(]0,+\infty[; L^2(\mathbb{R})))$.*

PREUVE : Nous prolongeons e_u et g_w par 0 pour les $t < 0$ (nous notons e_u et g_w ces prolongements). Nous prenons la transformée de Fourier de l'équation de convection diffusion et en utilisant les mêmes notations qu'au Chapitre 2, nous avons :

$$\hat{\mathsf{e}}_u(x,k,\omega) = \alpha(k,\omega)\, e^{\sigma^+ x},$$

où α va être déterminé par la condition aux limites du problème (5.12) :

$$\frac{\partial \mathsf{e}_u}{\partial x} - \frac{a-p}{2\nu}\mathsf{e}_u + q\frac{\partial \mathsf{e}_u}{\partial t} + bq\frac{\partial \mathsf{e}_u}{\partial y} = \mathsf{g}_w \text{ sur } \Gamma\times\mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Notons que

$$\sigma^+ - \frac{a-p}{2\nu} + iq(\omega+bk) = \frac{p+\delta^{1/2}+2\nu iq(\omega+bk)}{2\nu},$$

grâce à la définition (2.16) de σ^+. Ainsi en appliquant la transformée de Fourier à (5.13) nous trouvons la valeur de α et par conséquent, nous pouvons expliciter $\hat{\mathsf{e}}_u$:

$$\hat{\mathsf{e}}_u(x,k,\omega) = \frac{2\nu}{p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q}\hat{\mathsf{g}}_w(k,\omega)\, e^{\sigma^+ x}.$$

Ainsi montrer que e_u appartient à $L^2(\mathbb{R}^-; H^{3/2}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R})))$, revient à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^-}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{4\nu^2(1+\omega^2)^{3/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|^2} e^{2\mathcal{R}e(\sigma^+)x}|\hat{\mathsf{g}}_w(k,\omega)|^2\,dx\,dk\,d\omega < \infty,$$

$$\text{c.-à-d. } \frac{(1+\omega^2)^{3/4}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|}|\hat{\mathsf{g}}_w| \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}). \tag{5.14}$$

Mais les Lemmes C-0.1 et C-0.2 nous donnent l'existence de deux constantes strictement positives et indépendantes de k et ω telles que

$$\frac{(1+\omega^2)^{1/8}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \leq C_1 \quad \text{et} \quad \frac{(1+\omega^2)^{1/2}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|} \leq C_3,$$

nous en déduisons alors

$$\frac{(1+\omega^2)^{3/4}|\hat{\mathsf{g}}_w(k,\omega)|}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|} \leq C_1C_3(1+\omega^2)^{1/8}|\hat{\mathsf{g}}_w(k,\omega)|.$$

Or le Théorème A-4.1 nous indique que si g_w est dans $H^{1/4}(]0,+\infty[;L^2(\mathbb{R}))$, alors g_w est dans $H^{1/4}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}))$. Nous avons alors montré (5.14) et par suite e_u est dans $L^2(\mathbb{R}^-;H^{3/2}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R})))$. □

Le théorème suivant nous donne un deuxième résultat de régularité.

Théorème 5.1.5 *Si g peut s'écrire sous la forme (5.4) avec g_0 et g_1 donnés par (5.5) et si les relations (5.6) sont vérifiées, alors pour tous p et q strictement positifs la solution de (5.12), e_u, appartient à $L^2(\mathbb{R}^-;L^2(]0,+\infty[;H^3(\mathbb{R})))$.*

Preuve : Comme dans la démonstration du Théorème 5.1.4, nous nous ramenons au problème :

$$\int_{\mathbb{R}^-}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{4\nu^2(1+k^2)^3}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|^2} e^{2\mathcal{R}e(\sigma^+)x}|\hat{\mathsf{g}}_w(k,\omega)|^2\,dx\,dk\,d\omega < \infty,$$

$$\text{c.-à-d. } \frac{(1+k^2)^{3/2}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|}|\hat{\mathsf{g}}_w| \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}). \tag{5.15}$$

Pour la démonstration de (5.15), il est nécessaire d'expliciter g_w en décomposant g en la somme (5.4). Nous obtenons

$$\begin{aligned} g_w &= g - \Big(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{a-p}{2\nu}w + q\frac{\partial w}{\partial t} + bq\frac{\partial w}{\partial y}\Big)_{|\Gamma} \\ &= \left(-\frac{a-p}{2\nu} + q\frac{\partial}{\partial t} + bq\frac{\partial}{\partial y}\right)(g_0 - w_{|\Gamma}) + g_1 - \frac{\partial w}{\partial x}_{|\Gamma} \\ &= \left(-\frac{a-p}{2\nu} + q\frac{\partial}{\partial t} + bq\frac{\partial}{\partial y}\right)h_0 + h_1 \end{aligned} \tag{5.16}$$

où $h_0 = g_0 - w_{|\Gamma}$ appartient à $H^{5/2,5/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ et $h_1 = g_1 - (\partial_x w)_{|\Gamma}$ appartient à $H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$. Or d'après les relations de compatibilité (5.6), h_0 et

h_1 s'annulent au temps $t = 0$, ce qui signifie que d'une part le prolongement par 0 de ces fonctions (notés h_0 et h_1) appartiennent respectivement à $H^{5/2,5/4}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et $H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ (voir Théorème A-4.1) et d'autre part nous obtenons que la transformée de Fourier de $(-((a-p)/2\nu) + q\partial_t + bq\partial_y)\mathsf{h}_0$ est $(-((a-p)/2\nu) + iq(\omega + bk))\hat{\mathsf{h}}_0$ (voir Annexe B).
Nous avons alors :

$$|\hat{\mathsf{g}}_w| \leq | - \frac{a-p}{2\nu} + qi(\omega + bk)||\hat{\mathsf{h}}_0| + |\hat{\mathsf{h}}_1|,$$

puis nous montrons le résultat (5.15) en deux étapes.

i. D'après les Lemmes C-0.1 et C-0.2 de l'Annexe C, il existe deux constantes C_2 et C_5 strictement positives et indépendantes de k et ω telles que

$$\frac{(1+k^2)^{1/4}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \leq C_2 \quad \text{et} \quad \frac{|\frac{-a+p}{2\nu} + iq(\omega + bk)|}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)q)|} \leq C_5. \tag{5.17}$$

Par conséquent nous avons

$$\frac{(1+k^2)^{3/2}\,|\frac{-a+p}{2\nu} + iq(\omega + bk)|\,\hat{\mathsf{h}}_0(k,\omega)|}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}\,|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)q)|} \leq C_2C_5(1+k^2)^{5/4}|\hat{\mathsf{h}}_0(k,\omega)|.$$

Et puisque h_0 est dans $H^{5/2,5/4}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ nous en déduisons la première partie du résultat.

ii. D'après les Lemmes C-0.1 et C-0.2 de l'Annexe C, il existe C_2 et C_4 telles que :

$$\frac{(1+k^2)^{1/4}}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \leq C_2 \quad \text{et} \quad \frac{(1+k^2)^{1/2}}{|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)q)|} \leq C_4$$

et donc

$$\frac{(1+k^2)^{3/2}|\hat{\mathsf{h}}_1(k,\omega)|}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}|p + \delta^{1/2} + 2\nu i(\omega + bk)q)|} \leq C_2C_4(1+k^2)^{3/4}|\hat{\mathsf{h}}_1(k,\omega)|.$$

Et puisque h_1 est dans $H^{3/2,3/4}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ nous obtenons la seconde partie du résultat.

Les résultats i. et ii. montrent (5.15) et nous obtenons par suite que e_u appartient à $L^2(\mathbb{R}^-; L^2(\mathbb{R}; H^3(\mathbb{R})))$. □

Nous donnons à présent le dernier résultat de régularité.

Théorème 5.1.6 *Si g peut s'écrire sous la forme (5.4) avec g_0 et g_1 donnés par (5.5) et si les relations de compatibilité (5.6) sont vérifiées, alors pour tout p et q strictement positifs la solution de (5.3), e_u, appartient à $H^3(\mathbb{R}^-; L^2(\mathbb{R}\times]0,+\infty[))$.*

PREUVE : Il s'agit ici de montrer que e_u, $\partial_x e_u$, $\partial_{xx} e_u$ et $\partial_{x^3} e_u$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^-; L^2(\mathbb{R}\times]0,+\infty[))$ c.-à-d. suivant les notations introduites dans la démonstration des Théorèmes 5.1.4 et 5.1.5, il s'agit de montrer que :

$$\frac{|\sigma^+|^j}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|}|\hat{\mathsf{g}}_w|(k,\omega) \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \text{ pour } j=1,2 \text{ et } 3. \tag{5.18}$$

Nous montrons le résultat pour $j=3$.
De même que précédemment, le Lemme C-0.3 de l'Annexe C nous donne l'existence d'une constante C_6 strictement positive et indépendante de k et ω telle que :

$$\frac{|\sigma^+|^3}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}} \leq C_6((1+k^2)^{5/4}+(1+\omega^2)^{5/8}). \tag{5.19}$$

Et le Lemme C-0.4 nous donne l'existence une constante C_7 telle que :

$$\frac{(1+k^2)^{5/4}+(1+\omega^2)^{5/8}}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|} \leq C_7((1+k^2)^{3/4}+(1+\omega^2)^{3/8}). \tag{5.20}$$

Puis comme dans la démonstration du Théorème 5.1.5, nous décomposons g_w sous la forme (5.16), et nous montrons le résultat en deux étapes.

i. Pour la partie en h_0 nous utilisons les relations (5.17) et (5.19) et montrons que :

$$\frac{|\sigma^+|^3 \ |-\frac{a-p}{2\nu}+iq(\omega+bk)|}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|}|\hat{\mathsf{h}}_0| \leq C_6C_5((1+k^2)^{5/4}+(1+\omega^2)^{5/8})|\hat{\mathsf{h}}_0|.$$

Et puisque h_0 est dans $H^{5/2,5/4}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, nous en déduisons la première partie du résultat.

ii. De même nous avons par (5.19) et (5.20) :

$$\begin{aligned} \frac{|\sigma^+|^3|\hat{\mathsf{h}}_1|}{(\mathcal{R}e(\sigma^+))^{1/2}|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q|} &\leq C_6\frac{((1+k^2)^{5/4}+(1+\omega^2)^{5/8})}{|p+\delta^{1/2}+2\nu i(\omega+bk)q)|}|\hat{\mathsf{h}}_1| \\ &\leq C_6C_7((1+k^2)^{3/4}+(1+\omega^2)^{3/8})|\hat{\mathsf{h}}_1|. \end{aligned}$$

Et puisque h_1 est dans $H^{3/2,3/4}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ nous obtenons la seconde partie du résultat.

Les résultats i. et ii. montrent que $\partial_{x^3}\mathsf{e}_u$ est dans $L^2(\mathbb{R}^-; L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}))$. En utilisant le même procédé pour e_u, $\partial_x\mathsf{e}_u$ et $\partial_{xx}\mathsf{e}_u$, nous obtenons que e_u appartient à $H^3(\mathbb{R}^-; L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}))$. □

Le théorème suivant nous donne le résultat de régularité pour le problème initial (5.3).

Théorème 5.1.7 *Soit f dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$. Si p et q sont strictement positifs et si g peut s'écrire sous la forme (5.4) avec g_0 et g_1 donnés par (5.5) et si les relations de compatibilité (5.6) sont vérifiées, alors le problème (5.3) possède une unique solution u dans $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$.*

Preuve : En considérant $w\in H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$ la solution de l'équation de convection-diffusion dans $\mathbb{R}^2$ et en introduisant $e_u = w_{|\Omega^-} - u$, nous sommes amenés à résoudre le problème (5.12) qui par les Théorèmes 5.1.4, 5.1.5 et 5.1.6 possède une unique solution dans $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$. Nous en déduisons que u est également dans $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$. □

5.2 Définition de l'algorithme

Soit w^{init} un élément quelconque de $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ tel que $w^{\text{init}}(\cdot,\cdot,0) = w_0$. Nous définissons $g = (\partial_x - (a-p)/2\nu + q\partial_t + bq\partial_y)w^{\text{init}}(0,\cdot,\cdot)$, $h = (\partial_x - (a+p)/2\nu - q\partial_t - bq\partial_y)w^{\text{init}}(0,\cdot,\cdot)$ et nous initialisons l'algorithme (5.1), (5.2) par :

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}u^0 = f & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[,\\
u^0(\cdot,\cdot,0) = w_{0|\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-,\\
\dfrac{\partial u^0}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu}u^0 + q\dfrac{\partial u^0}{\partial t} + bq\dfrac{\partial u^0}{\partial y} = g & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\mathcal{L}v^0 = f & \text{dans } \Omega^+\times]0,+\infty[,\\
v^0(\cdot,\cdot,0) = w_{0|\Omega^+} & \text{dans } \Omega^+,\\
\dfrac{\partial v^0}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu}v^0 - q\dfrac{\partial v^0}{\partial t} - bq\dfrac{\partial v^0}{\partial y} = h & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[.
\end{cases}
\tag{5.21}
$$

Théorème 5.2.1 *Soit f dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$. Soit p et q deux réels strictement positifs. L'algorithme (5.1), (5.2) initialisé par (5.21) définit une suite unique (u^n, v^n) dans $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)\times H^{3,3/2}(\Omega^+\times]0,+\infty[)$.*

Preuve : Puisque w^{init} est dans $H^{3,3/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ avec $w^{\text{init}}(\cdot,\cdot,0) = w_0$, d'après le Théorème A-3.2 nous avons

$$
w^{\text{init}}(0,\cdot,\cdot) \in H^{5/2\,,\,5/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[),
$$
$$
\frac{\partial w^{\text{init}}}{\partial x}(0,\cdot,\cdot) \in H^{3/2\,,\,3/4}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[),
$$

et les relations suivantes sont vérifiées sur Γ :

$$\begin{aligned}
&w^{\text{init}}(0,\cdot,0) = w_0(0,\cdot),\\
&\frac{\partial w^{\text{init}}}{\partial x}(0,\cdot,0) = \frac{\partial w_0}{\partial x}(0,\cdot).
\end{aligned}$$

En reprenant les notations du Théorème 5.1.1, nous introduisons :

$$\begin{aligned}
g_0 &= w^{\text{init}}(0,\cdot,\cdot),\\
g_1 &= \frac{\partial w^{\text{init}}}{\partial x}(0,\cdot,\cdot),
\end{aligned}$$

ainsi g s'écrit $g = (-(a-p)/2\nu + q\partial/\partial t + bq\partial/\partial y)\, g_0 + g_1$ et g_0, g_1 vérifient les hypothèses du Théorème 5.1.1. Le problème (5.21) définit alors d'après le Théorème 5.1.1 (et son équivalent dans Ω^+) un unique couple (u^0, v^0) appartenant à $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[) \times H^{3,3/2}(\Omega^+\times]0,+\infty[)$.
Ensuite si v^n, solution de (5.2), est dans $H^{3,3/2}(\Omega^+\times]0,+\infty[)$, en reprenant le raisonnement que nous venons d'appliquer à u^0, nous montrons, toujours par le Théorème 5.1.1, que u^{n+1} est défini dans $H^{3,3/2}(\Omega^-\times]0,+\infty[)$.
Un raisonnement analogue dans Ω^+ complète la preuve.

$\square$

Chapitre 6

Convergence des algorithmes de relaxation d'ondes

Dans ce chapitre nous montrons que les algorithmes introduits dans les Chapitres 4 et 5 convergent vers la solution du problème global. Pour cela nous étendons au cas instationnaire la preuve construite dans [37] (F. Nataf et F. Rogier) pour des problèmes stationnaires.

Dans un premier temps nous nous intéressons au problème sans recouvrement. Pour cela nous écrivons un lemme technique (Section 6.1.1) qui sera la base de la démonstration de la convergence des algorithmes (4.1), (4.2) et (5.1), (5.2). Dans la Section 6.1.2, nous détaillons le cas des algorithmes avec des conditions de transmission d'ordre 0 (algorithme (4.1), (4.2)) et dans la Section 6.1.3 nous traitons l'algorithme avec des conditions d'ordre 1 (algorithme (5.1), (5.2)).

Enfin dans la Section 6.2 nous introduisons le taux de convergence des algorithmes optimisés et nous montrons que ceux-ci convergent dans le cas avec recouvrement.

6.1 Cas sans recouvrement

Nous étudions ici la convergence des algorithmes (4.1), (4.2) et (5.1), (5.2) quand les domaines Ω^- et Ω^+ ne se recouvrent pas.

6.1.1 Résultat préliminaire

Nous introduisons tout d'abord l'opérateur

$$\mathcal{S}^s = -\frac{1}{\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c\Big), \tag{6.1}$$

puis nous récrivons l'équation de convection-diffusion, en utilisant les opérateurs $\mathcal{S}_j^\pm$, $j = 0, 1$ introduits en (3.5). Nous utilisons le fait que $\mathcal{S}_j^\pm$ sont des opérateurs différentiels à coefficients constants et que par conséquent ils vérifient la propriété de commutativité. Nous utilisons également la propriété $\mathcal{S}^+ + \mathcal{S}^- = \mathcal{S}_j^+ + \mathcal{S}_j^- = a/\nu$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a\frac{\partial}{\partial x} - \nu\mathcal{S}^s, \\
\mathcal{L} &= -\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu(\mathcal{S}_j^+ + \mathcal{S}_j^-)\frac{\partial}{\partial x} - \nu\mathcal{S}^s \\
\mathcal{L} &= -\nu\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-\right) + \nu(\mathcal{S}_j^+\mathcal{S}_j^- - \mathcal{S}^s), \qquad (6.2) \\
\mathcal{L} &= -\nu\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+\right) + \nu(\mathcal{S}_j^+\mathcal{S}_j^- - \mathcal{S}^s). \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

Nous introduisons ici un lemme technique qui nous servira à montrer que l'algorithme avec conditions de transmission d'ordre $j = 0$ ou $j = 1$ converge. Nous détaillons ces différents cas dans les sections suivantes.

Lemme 6.1.1 *Si u est solution de $\mathcal{L}u = 0$ dans $\Omega^-\times]0, +\infty[$, alors pour $j = 0, 1$, nous avons l'égalité :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+u\right|^2 dy - \frac{\nu}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right|^2 dy \\
&+\nu\left((\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-)\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+u\right)_{\Omega^-} \qquad (6.4) \\
&-a\left(\mathcal{S}_j^+\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}^s u, (\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-)u\right)_{\Omega^-} = 0.
\end{aligned}$$

Preuve : Nous multiplions l'équation $\mathcal{L}u = 0$, avec $\mathcal{L}$ écrit sous la forme (6.2), par $\partial_x u - \mathcal{S}_j^- u$ puis nous intégrons sur Ω^- :

$$\begin{aligned}
&-\nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right), \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right)_{\Omega^-} + \nu\left(\mathcal{S}_j^+\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right), \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right)_{\Omega^-} \\
&+\nu\left(\mathcal{S}_j^+\mathcal{S}_j^-u, \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}^s u, \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right)_{\Omega^-} = 0.
\end{aligned}$$

Après intégration par parties et simplifications, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\nu}{2}\int_\Gamma\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^-u\right|^2 dy + \nu\left(\mathcal{S}_j^+\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}_j^+\frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^-u\right)_{\Omega^-} \qquad (6.5) \\
&-\nu\left(\mathcal{S}^s u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + \nu\left(\mathcal{S}^s u, \mathcal{S}_j^-u\right)_{\Omega^-} = 0.
\end{aligned}$$

De façon analogue, nous multiplions l'équation $\mathcal{L}u = 0$, avec $\mathcal{L}$ écrit sous la forme (6.3), par $\partial_x u - \mathcal{S}_j^+ u$ et nous intégrons sur Ω^-. Après simplifications nous trouvons :

$$\begin{aligned} -\frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+ u\right|^2 dy + \nu\left(\mathcal{S}_j^- \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}_j^- \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} \\ -\nu\left(\mathcal{S}^s u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + \nu\left(\mathcal{S}^s u, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} = 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Puis en soustrayant (6.6) à (6.5) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+ u\right|^2 dy - \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^- u\right|^2 dy \\ +\nu\left((\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-)\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + \nu\left(\mathcal{S}_j^- \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} \\ -\nu\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^- u\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}^s u, (\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-)u\right)_{\Omega^-} = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Par ailleurs, nous rappelons la relation $\mathcal{S}_j^+ + \mathcal{S}_j^- = a/\nu$ d'où nous tirons :

$$\nu\left(\mathcal{S}_j^- \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} = a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-},$$

et

$$-\nu\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^- u\right)_{\Omega^-} = -a\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, u\right)_{\Omega^-} + \nu\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-},$$

c.-à-d.

$$\nu\left(\mathcal{S}_j^- \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^- u\right)_{\Omega^-} = a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} - a\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, u\right)_{\Omega^-}.$$

En récrivant (6.7), nous obtenons alors le résultat annoncé dans le Lemme 6.1.1 :

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+ u\right|^2 dy - \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}_j^- u\right|^2 dy \\ +\nu\left((\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-)\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_j^+ u\right)_{\Omega^-} \\ -a\left(\mathcal{S}_j^+ \frac{\partial u}{\partial x}, u\right)_{\Omega^-} - \nu\left(\mathcal{S}^s u, (\mathcal{S}_j^+ - \mathcal{S}_j^-)u\right)_{\Omega^-} = 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

□

Nous allons à présent expliciter cette expression en différenciant les cas $j = 0$ et $j = 1$, c.-à-d. en considérant l'algorithme avec des conditions de transmission d'ordre 0 ($j = 0$) ou d'ordre 1 ($j = 1$).

6.1.2 Algorithme avec conditions de transmission d'ordre 0

Dans cette section, nous montrons que l'algorithme (4.1), (4.2) converge. Ce résultat utilise le Lemme 6.1.1.
Dans le cas où $j = 0$ nous avons :

$$\mathcal{S}_0^+ u = \frac{a+p}{2\nu} u \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_0^- u = \frac{a-p}{2\nu} u. \tag{6.9}$$

Théorème 6.1.1 *Soit f dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega))$ et w_0 dans $H^1(\Omega)$. Pour tout p strictement positif l'algorithme (4.1), (4.2) converge dans $L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))\times L^\infty(]0,+\infty[;L^2(\Omega^+))\cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^+))$ vers la solution de (1.2).*

Preuve : Si w désigne la solution de l'équation de convection-diffusion dans $\mathbb{R}^2$, nous introduisons $e_u^{n+1} = u^{n+1} - w_{|\Omega^-}$, l'erreur à l'itération $n+1$ dans Ω^-, et $e_v^{n+1} = v^{n+1} - w_{|\Omega^+}$ l'erreur dans Ω^+. Ces erreurs vérifient les relations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, e_u^{n+1} & = & 0 & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[, \\ e_u^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} e_u^{n+1} & = & \dfrac{\partial e_v^n}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} e_v^n & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[, \end{cases} \tag{6.10}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, e_v^{n+1} & = & 0 & \text{dans } \Omega^+\times]0,+\infty[, \\ e_v^{n+1}(\cdot,\cdot,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \dfrac{\partial e_v^{n+1}}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu} e_v^{n+1} & = & \dfrac{\partial e_u^n}{\partial x} - \dfrac{a+p}{2\nu} e_u^n & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{6.11}$$

L'erreur e_u^{n+1} vérifiant l'équation de convection-diffusion homogène dans $\Omega^-\times]0,+\infty[$, nous pouvons appliquer le Lemme 6.1.1 ce qui signifie que e_u^{n+1} vérifie (6.4).
Nous notons tout d'abord que

$$a\left(\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, \mathcal{S}_0^+ e_u^{n+1}\right)_{\Omega^-} - a\left(\mathcal{S}_0^+ \frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, e_u^{n+1}\right)_{\Omega^-} = 0,$$

et que

$$\mathcal{S}_0^+ - \mathcal{S}_0^- = \frac{p}{\nu},$$

puis nous récrivons (6.4) pour $j = 0$, en utilisant la définition de l'opérateur $\mathcal{S}^s$ donnée en (6.1).

$$\begin{aligned} &\frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_u^{n+1}\right|^2 dy - \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_u^{n+1}\right|^2 dy \\ &+p\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{p}{2\nu}\frac{d}{dt}\|e_u^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 + p\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{pc}{\nu}\|e_u^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 = 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Par ailleurs, e_u^{n+1} vérifie au niveau de l'interface la condition aux limites suivante :

$$\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_u^{n+1} = \frac{\partial e_v^n}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_v^n,$$

et nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_u^{n+1}\right|^2 dy + p\,\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} + \frac{p}{2\nu}\frac{d}{dt}\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} + \frac{pc}{\nu}\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} \\ = \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_v^n}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_v^n\right|^2 dy.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Un raisonnement analogue dans Ω^+ nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_v^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_v^{n+1}\right|^2 dy + p\,\|\nabla e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+} + \frac{p}{2\nu}\frac{d}{dt}\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+} + \frac{pc}{\nu}\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+} \\ = \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^n}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_u^n\right|^2 dy,\end{aligned} \tag{6.14}$$

et en additionnant (6.13) et (6.14) sur les $n \in \{0,\dots,N\}$, nous obtenons après simplifications :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\Bigg[\frac{p}{2\nu}\frac{d}{dt}\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} + \frac{p}{2\nu}\frac{d}{dt}\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+} \\ + \frac{pc}{\nu}\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} + \frac{pc}{\nu}\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+} + p\,\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} + p\,\|\nabla e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}\Bigg] \\ + \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{N+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_u^{N+1}\right|^2 dy + \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_v^{N+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_v^{N+1}\right|^2 dy \\ = \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^0}{\partial x} - \mathcal{S}_0^+ e_u^0\right|^2 dy + \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_v^0}{\partial x} - \mathcal{S}_0^- e_v^0\right|^2 dy.\end{aligned} \tag{6.15}$$

Après intégration sur $]0,t[$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}\Bigg[\frac{p}{2\nu}\left(\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t)+\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(t)\right)\\
&\quad+\frac{pc}{\nu}\int_0^t(\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(\sigma)+\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(\sigma))\,d\sigma\\
&\quad+p\int_0^t(\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(\sigma)+\|\nabla e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(\sigma))\,d\sigma\Bigg]\\
&+\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma\left(\left|\frac{\partial e_u^{N+1}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^+e_u^{N+1}\right|^2(0,y,\sigma)+\left|\frac{\partial e_v^{N+1}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^-e_v^{N+1}\right|^2(0,y,\sigma)\right)dy\,d\sigma\\
&=\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma\left(\left|\frac{\partial e_u^{0}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^+e_u^{0}\right|^2(0,y,\sigma)+\left|\frac{\partial e_v^{0}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^-e_v^{0}\right|^2(0,y,\sigma)\right)dy\,d\sigma.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Nous posons ensuite

$$
C=\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma\left|\frac{\partial e_u^{0}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^+e_u^{0}\right|^2(0,y,\sigma)\,dy\,d\sigma+\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma\left|\frac{\partial e_v^{0}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^-e_v^{0}\right|^2(0,y,\sigma)\,dy\,d\sigma,
$$

$$
\begin{aligned}
\text{et } F^n=\min\left(\frac{p}{2\nu},\frac{pc}{\nu},p\right)\Bigg(&\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t)+\int_0^t(\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(\sigma)+\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(\sigma))\,d\sigma+\\
&\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(t)+\int_0^t(\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(\sigma)+\|\nabla e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(\sigma))\,d\sigma\Bigg)\geq 0.
\end{aligned}
$$

L'expression (6.16) s'écrit alors :

$$
\sum_{n=0}^{N}F^n\leq C,
$$

et puisque la quantité C ne dépend pas de N, la série $\sum_{n=0}^{\infty}F^n$ est convergente et son terme principal tend alors vers 0. Nous obtenons alors la convergence de l'algorithme dans $L^\infty\left(]0,+\infty[;L^2(\Omega^-)\right)\cap L^2\left(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-)\right)\times L^\infty\left(]0,+\infty[;L^2(\Omega^+)\right)\cap L^2\left(]0,+\infty[;H^1(\Omega^+)\right)$.

□

6.1.3 Algorithme avec conditions de transmission d'ordre 1

Nous étudions ici la convergence de l'algorithme (5.1), (5.2) c.-à-d. nous sommes dans le cas où $j = 1$. Les opérateurs sur le bord sont définis par :

$$\mathcal{S}_1^+ u = \frac{a+p}{2\nu} u + q\frac{\partial u}{\partial t} + bq\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et } \mathcal{S}_1^- u = \frac{a-p}{2\nu} u - q\frac{\partial u}{\partial t} - bq\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6.17}$$

Théorème 6.1.2 *Soit f dans $H^{1,1/2}(\Omega\times]0,+\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$. Si $q > 0$ et $p - a^2q/2 > 0$ alors l'algorithme (5.1),(5.2) converge dans $L^\infty(]0,+\infty[; H^1(\Omega^-)) \cap L^2(]0,+\infty[; H^1(\Omega^-)) \times L^\infty(]0,+\infty[; H^1(\Omega^+)) \cap L^2(]0,+\infty[; H^1(\Omega^+))$ vers la solution de (1.2).*

Preuve : Afin d'expliciter la formulation variationnelle (6.4) dans le cas où $j = 1$, nous récrivons trois termes de (6.4).

i. En écrivant :

$$\mathcal{S}_1^+ - \mathcal{S}_1^- = \frac{p}{\nu} + 2q\frac{\partial}{\partial t} + 2bq\frac{\partial}{\partial y},$$

nous en déduisons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\nu\left((\mathcal{S}_1^+ - \mathcal{S}_1^-)\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} &= \left(p\frac{\partial u}{\partial x} + 2q\nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2bq\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega^-} \\
&= p\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-} + q\nu\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^-}.
\end{aligned}$$

ii. En utilisant (6.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
-\nu\left(\mathcal{S}^s u, (\mathcal{S}_1^+ - \mathcal{S}_1^-)u\right)_{\Omega^-} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu, \frac{p}{\nu}u + 2q\frac{\partial u}{\partial t} + 2bq\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\Omega^-} \\
&= \frac{d}{dt}\left[(qc + \frac{p}{2\nu})\|u\|^2_{\Omega^-} + q\nu\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-}\right] \\
&\quad + 2q\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{\Omega^-} + (p + 2qb^2)\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^-} \\
&\quad + 4bq\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\Omega^-} + \frac{pc}{\nu}\|u\|^2_{\Omega^-}.
\end{aligned}$$

iii. Nous avons également cette égalité :

$$\begin{aligned}
& a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{S}_1^+ u\right)_{\Omega^-} - a\left(\mathcal{S}_1^+ \frac{\partial u}{\partial x}, u\right)_{\Omega^-} \\
= \; & a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{a+p}{2\nu} u\right)_{\Omega^-} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, q\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Omega^-} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}, bq\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\Omega^-} \\
& - a\left(\frac{a+p}{2\nu}\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)_{\Omega^-} - a\left(q\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), u\right)_{\Omega^-} - a\left(bq\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), u\right)_{\Omega^-} \\
= \; & 2aq\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Omega^-} + 2abq\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\Omega^-} - aq\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} u\, dy.
\end{aligned}$$

Soit w la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$. Nous considérons e_u^{n+1} l'erreur de l'algorithme (5.1), (5.2) dans Ω^- à l'étape $n+1$ c.-à-d. $e_u^{n+1} = w_{|\Omega^-} - u^{n+1}$. Nous avons $\mathcal{L}e_u^{n+1} = 0$ sur $\Omega^- \times]0, +\infty[$ et nous pouvons appliquer le Lemme 6.1.1. Nous écrivons alors la relation (6.4) en utilisant les égalités i., ii. et iii. et en réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^+ e_u^{n+1}\right|^2 dy - \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_u^{n+1}\right|^2 dy \\
& + \frac{d}{dt}\Big[\left(qc + \frac{p}{2\nu}\right)\|e_u^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 + q\nu\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega^-}^2 + q\nu\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega^-}^2 - \frac{aq}{2}\int_\Gamma |e_u^{n+1}|^2\, dy\Big] \\
& + p\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega^-}^2 + (p+2b^2q)\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega^-}^2 + 2q\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right\|_{\Omega^-}^2 + \frac{pc}{\nu}\|e_u^{n+1}\|_{\Omega^-}^2 \\
& + 2aq\left(\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right)_{\Omega^-} + 2abq\left(\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\right)_{\Omega^-} + 4bq\left(\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right)_{\Omega^-} = 0.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Nous récrivons la dernière ligne de cette expression et nous trouvons :

$$\begin{aligned}
& 2aq\left(\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right)_{\Omega^-} + 2abq\left(\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\right)_{\Omega^-} + 4bq\left(\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right)_{\Omega^-} \\
= \; & 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{2q}\,\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, \sqrt{2q}\,\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right)_{\Omega^-} + 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{2q}\,\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}, b\sqrt{2q}\,\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\right)_{\Omega^-} \\
& + 2\left(b\sqrt{2q}\,\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}, \sqrt{2q}\,\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right)_{\Omega^-} \\
= \; & \left\|\sqrt{2q}\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t} + b\sqrt{2q}\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y} + \frac{a}{2}\sqrt{2q}\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega^-}^2 - 2q\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial t}\right\|_{\Omega^-}^2 - 2qb^2\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\right\|_{\Omega^-}^2 \\
& - \frac{a^2}{2}q\left\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\right\|_{\Omega^-}^2.
\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^+ e_u^{n+1}\right|^2 dy \\
&+\frac{d}{dt}\Big[\left(qc+\frac{p}{2\nu}\right)\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} + q\nu\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} - \frac{aq}{2}\int_\Gamma |e_u^{n+1}|^2\,dy\Big] \\
&+(p-\frac{a^2q}{2})\Big\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\Big\|^2_{\Omega^-} + p\Big\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\Big\|^2_{\Omega^-} + \frac{pc}{\nu}\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} \\
&\le \frac{\nu}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_u^{n+1}\right|^2 dy.
\end{aligned}$$

Or si e_v^n est l'erreur dans Ω^+ à l'étape n, e_u^{n+1} vérifie sur $\Gamma\times]0,+\infty[$:

$$\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_u^{n+1} = \frac{\partial e_v^n}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_v^n,$$

et après intégration sur $]0,t[$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^+ e_u^{n+1}\right|^2 (0,y,\sigma)\,d\sigma\,dy \\
&+\left(qc+\frac{p}{2\nu}\right)\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t) + q\nu\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t) \\
&-\frac{aq}{2}\int_\Gamma |e_u^{n+1}|^2(0,y,t)dy + (p-\frac{a^2q}{2})\int_0^t \Big\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\Big\|^2_{\Omega^-}(\sigma)d\sigma \\
&+p\int_0^t \Big\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial y}\Big\|^2_{\Omega^-}(\sigma)d\sigma + \frac{pc}{\nu}\int_0^t \|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(\sigma)d\sigma \\
&\le \frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_v^n}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_v^n\right|^2 (0,y,\sigma)\,d\sigma\,dy.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Nous faisons d'une part l'hypothèse $p - a^2q/2 > 0$ pour que le coefficient devant le terme $\int_0^t \|\partial_x e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(\sigma)d\sigma$ soit positif. D'autre part nous utilisons l'inégalité suivante valable pour tout $\alpha > 0$:

$$\int_\Gamma |e_u^{n+1}|^2(0,y,t)\,dy \le \alpha\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-} + \frac{1}{\alpha}\Big\|\frac{\partial e_u^{n+1}}{\partial x}\Big\|^2_{\Omega^-}. \tag{6.20}$$

Ceci nous permet de borner inférieurement $-(aq/2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |e_u^{n+1}|^2(0,y,t)dy$ si $a > 0$ c.-à-d.

$$\begin{aligned}
&\left(qc+\frac{p}{2\nu}\right)\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t) + q\nu\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t) - \frac{aq}{2}\int_\Gamma |e_u^{n+1}|^2(0,y,t)dy \\
&\ge \left(qc+\frac{p}{2\nu}-\alpha\frac{aq}{2}\right)\|e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t) + (q\nu - \frac{aq}{2\alpha})\|\nabla e_u^{n+1}\|^2_{\Omega^-}(t),
\end{aligned}$$

et nous choisissons α tel que $qc + p/2\nu - \alpha aq/2 \geq 0$ et $q\nu - aq/2\alpha \geq 0$. Un tel α existe si $a/2\nu \leq p/aq\nu + 2c/a$ c.-à-d. si $a^2q/2 \leq p + 2cq\nu$ ce qui est vrai puisque nous avons fait l'hypothèse $p - a^2q/2 > 0$ et $q > 0$.

Un raisonnement analogue nous donne la relation suivante dans le domaine Ω^+ :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma \left|\frac{\partial e_v^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_1^- e_v^{n+1}\right|^2 (0,y,\sigma)\,d\sigma\,dy \\
&+\left(\frac{p}{2\nu}+cq\right)\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(t) + q\nu\left\|\nabla e_v^{n+1}\right\|^2_{\Omega^+}(t) \\
&+\frac{aq}{2}\int_0^t\int_\Gamma |e_v^{n+1}|^2(0,y,\sigma)d\sigma\,dy + (p-\frac{a^2q}{2})\int_0^t\left\|\frac{\partial e_v^{n+1}}{\partial x}\right\|^2_{\Omega^+}(\sigma)d\sigma + \\
&p\int_0^t\left\|\frac{\partial e_v^{n+1}}{\partial y}\right\|^2_{\Omega^+}(\sigma)d\sigma + \frac{pc}{\nu}\int_0^t\|e_v^{n+1}\|^2_{\Omega^+}(\sigma)d\sigma \\
&< \frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Gamma\left|\frac{\partial e_u^n}{\partial x} - \mathcal{S}_1^+ e_u^n\right|^2(0,y,\sigma)\,d\sigma\,dy.
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

Nous sommons les inégalités (6.19) et (6.21) sur les $n \in \{0,...,N\}$. En faisant tendre N vers l'infini, nous obtenons que l'erreur dans Ω^-, e_u^n, tend vers 0 dans l'espace $L^\infty(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^-))$ et l'erreur dans Ω^+, e_v^n, tend vers 0 dans $L^\infty(]0,+\infty[;H^1(\Omega^+)) \cap L^2(]0,+\infty[;H^1(\Omega^+))$ (voir la démonstration de la convergence de l'algorithme avec conditions de transmission d'ordre 0 dans la Section 6.1.2, pour plus de détails).

□

6.2 Cas avec recouvrement

Dans cette section nous introduisons le taux de convergence en variables de Fourier des algorithmes (4.1), (4.2) et (5.1), (5.2) quand les deux sous-domaines se recouvrent. On trouvera par exemple dans [27] (C. Japhet) l'écriture du taux de convergence dans le cas stationnaire. Les domaines Ω^- et Ω^+ sont définis par :

$$\Omega^- =]-\infty, L[\times\mathbb{R}, \text{ et } \Omega^+ =]0,+\infty[\times\mathbb{R}.$$

Nous introduisons également $\Gamma_L = \{(x,y), x = L, y \in \mathbb{R}\}$ et $\Gamma_0 = \{(x,y), x = 0, y \in \mathbb{R}\}$, les interfaces. Les conditions aux limites des algorithmes (4.1), (4.2) et (5.1), (5.2) sont alors pour $j = 0, 1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_j^- u^{n+1} &= \frac{\partial v^n}{\partial x} - \mathcal{S}_j^- v^n \text{ sur } \Gamma_L\times]0,+\infty[, \\
\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+ v^{n+1} &= \frac{\partial u^n}{\partial x} - \mathcal{S}_j^+ u^n \text{ sur } \Gamma_0\times]0,+\infty[.
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Nous étudions dans un premier temps l'algorithme avec des conditions d'ordre 0.

Théorème 6.2.1 *Soit f dans $L^2(]0,+\infty[;L^2(\Omega))$ et w_0 dans $H^1(\Omega)$. Pour tout p strictement positif l'algorithme (4.1), (4.2) converge dans $H^{2,1}(\Omega^-\times]0,+\infty[)\times H^{2,1}(\Omega^+\times]0,+\infty[)$.*

Preuve : Nous considérons l'algorithme que vérifie l'erreur. A l'étape n, l'erreur dans Ω^-, e_u^n, et l'erreur dans Ω^+, e_v^n, vérifient l'équation de convection-diffusion homogène et la transformée de Fourier de leur prolongement s'écrit alors (voir Chap. 2) :

$$\begin{cases} \hat{\mathsf{e}}_u^n(x,k,\omega)=\alpha^n(k,\omega)e^{\sigma^+x} \text{ pour } x\in]-\infty,L[,\\ \hat{\mathsf{e}}_v^n(x,k,\omega)=\beta^n(k,\omega)e^{\sigma^-x} \text{ pour } x\in]0,+\infty[. \end{cases}$$

Les erreurs e_u^n et e_v^n vérifient les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathsf{e}_u^{n+1}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^-\mathsf{e}_u^{n+1}&=\frac{\partial\mathsf{e}_v^n}{\partial x}-\mathcal{S}_0^-\mathsf{e}_v^n \text{ sur } \Gamma_L\times\mathbb{R}\\ \frac{\partial\mathsf{e}_v^{n+1}}{\partial x}-\mathcal{S}_0^+\mathsf{e}_v^{n+1}&=\frac{\partial\mathsf{e}_u^n}{\partial x}-\mathcal{S}_0^+\mathsf{e}_u^n \text{ sur } \Gamma_0\times\mathbb{R} \end{aligned}$$

nous trouvons alors

$$\begin{aligned} &\alpha^{n+1}(\sigma^+-\sigma_0^-)e^{\sigma^+L}=\beta^n(\sigma^--\sigma_0^-)e^{\sigma^-L},\\ &\beta^{n+1}(\sigma^--\sigma_0^+)=\alpha^n(\sigma^+-\sigma_0^+), \end{aligned}$$

avec $\sigma_0^\pm=(a\pm p)/2\nu$. Nous en déduisons alors :

$$\alpha^{n+1}=\left(\frac{\sigma^--\sigma_0^-}{\sigma^+-\sigma_0^-}\right)\left(\frac{\sigma^+-\sigma_0^+}{\sigma^--\sigma_0^+}\right)e^{(\sigma^--\sigma^+)L}\alpha^{n-1}.$$

Puis des relations $\sigma^++\sigma^-=\sigma_0^++\sigma_0^-=a/\nu$, nous tirons :

$$\alpha^{n+1}=\left(\frac{\sigma^+-\sigma_0^+}{\sigma^--\sigma_0^+}\right)^2e^{(\sigma^--\sigma^+)L}\alpha^{n-1}.$$

Si le taux de convergence de l'algorithme est défini par $\rho=\left|\frac{\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1}}{\hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}}\right|=\left|\frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^{n-1}}\right|$, nous avons :

$$\rho_0(k,\omega,p)=\left|\frac{\sigma^+(k,\omega)-\sigma_0^+}{\sigma^-(k,\omega)-\sigma_0^+}\right|^2e^{\mathcal{R}e(\sigma^--\sigma^+)L},\tag{6.23}$$

et puisque $\sigma^\pm=(a\pm\delta^{1/2})/2\nu$ (voir (2.15)), nous avons

$$\rho_0(k,\omega,p)=\left|\frac{\delta^{1/2}-p}{\delta^{1/2}+p}\right|^2e^{-\frac{L}{\nu}\mathcal{R}e(\delta^{1/2})}.\tag{6.24}$$

Nous raisonnons alors comme pour la démonstration du Théorème 2.4.1 (démonstration de la convergence de l'algorithme avec des conditions de Dirichlet). Puisque $p > 0$ il existe une constante $C_1 < 1$ telle que $|\delta^{1/2} - p|/|\delta^{1/2} + p| < C_1$ et par suite : $|\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1}| \leq C_1 e^{-\alpha L} |\hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}|$ c.-à-d.

$$((1+k^2)^2 + (1+\omega^2))|\hat{\mathsf{e}}_u^{n+1}|^2 \leq C_1^2((1+k^2)^2 + (1+\omega^2))e^{-2\alpha L}|\hat{\mathsf{e}}_u^{n-1}|^2,$$

et par suite $\|e_u^{n+1}\|_{H^{2,1}} < C_1^2 e^{-2\alpha L}\|e_u^{n-1}\|_{H^{2,1}}$. D'une part nous obtenons par récurrence que $\|e_u^{n+1}\|_{H^{2,1}}$ converge vers 0. D'autre part nous remarquons que cet algorithme converge plus rapidement que l'algorithme de Schwarz classique avec relaxation d'ondes.
Un raisonnement identique sur e_v^n termine la preuve. □

Nous donnons à présent un résultat de convergence pour l'algorithme avec des conditions de transmission d'ordre 1.

Théorème 6.2.2 *Soit f dans $H^{1,1/2}(\Omega \times]0, +\infty[)$ et w_0 dans $H^2(\Omega)$. Si p et q sont strictement positifs alors l'algorithme (5.1), (5.2) converge dans $H^{3,3/2}(\Omega^- \times]0, +\infty[) \times H^{3,3/2}(\Omega^+ \times]0, +\infty[)$.*

PREUVE : Nous reprenons la démonstration du Théorème 6.2.1. Et nous trouvons que l'expression du taux de convergence dans ce cas est :

$$\rho_1(k, \omega, p, q) = \left| \frac{\delta^{1/2} - p - 2\nu i q(\omega + bk)}{\delta^{1/2} + p + 2\nu i q(\omega + bk)} \right|^2 e^{-\frac{L}{\nu}\mathcal{R}e(\delta^{1/2})}. \tag{6.25}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} & |\delta^{1/2} \pm (p + 2\nu i q(\omega + bk))|^2 \\ = \quad & |\delta^{1/2}|^2 + |p + 2\nu i q(\omega + bk)|^2 \pm 2\mathcal{R}e(\delta^{1/2}\overline{(p + 2\nu i q(\omega + bk))}) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{R}e(\delta^{1/2}(p - 2\nu i q(\omega + bk))) = p\mathcal{R}e(\delta^{1/2}) + 2\nu q(\omega + bk)\mathcal{I}m(\delta^{1/2}).$$

Or d'après (2.15) la partie imaginaire de $\delta^{1/2}$ a le signe de $(\omega + bk)$ et par suite $\mathcal{R}e(\delta^{1/2}(p - 2\nu i q(\omega + bk)))$ est positif. Nous avons donc $|\delta^{1/2} + p + 2\nu i q(\omega + bk)| \geq |\delta^{1/2} - p - 2\nu i q(\omega + bk)|$ et il existe alors une constante $C_2 < 1$ telle que

$$|\rho_1(k, \omega, p)| < C_2 e^{-\frac{L}{\nu}\mathcal{R}e(\delta^{1/2})}$$

et nous concluons comme au théorème précédent. □

Chapitre 7

Optimisation des conditions de transmission

Au Chapitre 3, nous avons écrit un algorithme avec des conditions de transmission optimales c.-à-d. un algorithme qui converge en deux itérations. Toutefois les opérateurs $\mathcal{S}^{\pm}$ intervenant dans ces conditions ne sont pas locaux. Dans les Chapitres 4 et 5, nous les avons alors remplacés par des opérateurs différentiels d'ordre 0 ($\mathcal{S}_0^{\pm}$) ou d'ordre 1 ($\mathcal{S}_1^{\pm}$). Ceci revient à approcher le symbole de Fourier de $\mathcal{S}^{\pm}$ par un polynôme en k et ω, les fréquences de Fourier associées aux variables d'espace tangentielle et de temps. Plus précisément, dans le cas de l'approximation d'ordre 0 nous avons approché $\delta^{1/2}$ (voir (2.15)) par une constante p, et pour l'approximation d'ordre 1 nous avons introduit le polynôme $p + 2\nu iq(\omega + bk)$, avec p et q deux constantes. Le but de ce chapitre est de choisir p et q.

Nous présentons ici deux stratégies. Une première idée consiste à faire un développement de Taylor en basses fréquences du symbole des opérateurs $\mathcal{S}^{\pm}$ (voir [38] (F. Nataf, F. Rogier et E. Sturler) ou [12] (B. Engquist et H.K. Zhao)). Cette stratégie a été appliquée dans le cadre des conditions aux limites absorbantes puis de la décomposition de domaine. Ce n'est toutefois peut être pas la meilleure stratégie, surtout si un large spectre de fréquences est représenté dans le phénomène modélisé. Pour obtenir une meilleure approximation des opérateurs $\mathcal{S}^{\pm}$, nous proposons d'utiliser une stratégie qui prend en compte toutes les fréquences du phénomène en choisissant les p et q qui minimisent le taux de convergence de l'algorithme (voir [1] Y. Achdou et F. Nataf).

Cette méthode a été pour la première fois appliquée à l'équation de convection-diffusion stationnaire en deux dimensions ([27] C. Japhet) : le taux de convergence est dans ce cas optimisé sur l'ensemble des fréquences discrètes associées à la variable spatiale tangentielle (variable de Fourier associée à y). Puis le cas du problème d'évolution a été traité en dimension 1 dans [17] (M.J. Gander, L. Halpern et F.

Nataf) l'optimisation se fait alors sur l'ensemble des fréquences discrètes en temps. Ici nous optimisons le taux de convergence à la fois sur les fréquences en espace et sur les fréquences en temps.

Nous rappelons que les opérateurs optimaux $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ ont respectivement pour symbole $(a+\delta^{1/2})/2\nu$ et $(a-\delta^{1/2})/2\nu$ et ces symboles sont approchés par les polynômes $\sigma_1^+ = (a+p)/2\nu + iq(\omega+bk)$ et $\sigma_1^- = (a-p)/2\nu - iq(\omega+bk)$.

7.1 Approximation de Taylor

Dans un premier temps, nous approchons $\delta^{1/2}$ grâce à un développement de Taylor pour k et ω petits. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\delta^{1/2} &= \left(a^2+4\nu c+4\nu^2k^2+4\nu i(\omega+bk)\right)^{1/2}\\
&= \sqrt{a^2+4\nu c}\sqrt{1+\frac{4\nu}{a^2+4\nu c}i(\omega+bk)+\frac{4\nu^2}{a^2+4\nu c}k^2}\\
&\sim \sqrt{a^2+4\nu c}+\frac{2\nu}{\sqrt{a^2+4\nu c}}i(\omega+bk).
\end{aligned}$$

Pour une approximation d'ordre 0 nous prendrons donc

$$p=\sqrt{a^2+4\nu c},$$

et pour celle d'ordre 1 :

$$p=\sqrt{a^2+4\nu c} \quad \text{et} \quad q=\frac{1}{\sqrt{a^2+4\nu c}}.$$

Les taux de convergence de l'algorithme avec des conditions d'ordre 0 ou 1 sont définis en (6.24) et (6.25). Nous voyons que dans le cas d'un recouvrement non nul, ces taux tendent vers 0 quand les fréquences tendent vers l'infini. Ainsi le recouvrement prend en charge les hautes fréquences et ceci justifie la recherche d'une méthode valable pour les basses fréquences. Dans la section suivante nous présentons une méthode qui prend en compte toutes les fréquences et qui sera donc efficace même dans le cas sans recouvrement.

7.2 Optimisation du taux de convergence

Notre objectif est d'obtenir un algorithme de décomposition de domaine qui converge rapidement. Ceci signifie que l'on cherche à avoir le taux de convergence le plus petit possible et ce sur l'ensemble des fréquences discrètes.

Nous rappelons que le taux de convergence de l'algorithme avec des conditions d'ordre 0 et un recouvrement de taille $L \geq 0$ (défini au Chapitre 6) s'écrit :

$$\rho_0(k,\omega,p) = \left|\frac{\delta^{1/2}-p}{\delta^{1/2}+p}\right|^2 e^{-\frac{L}{\nu}\mathcal{R}e(\delta^{1/2})}. \tag{7.1}$$

Ce taux de convergence dépend des fréquences de Fourier k et ω et du paramètre p. Nous nous intéressons tout d'abord au domaine de définition de ces variables. La constante p doit satisfaire les hypothèses des Théorèmes 4.2.1 (l'algorithme est bien défini) et 6.1.1 (l'algorithme converge), c.-à-d. $p > 0$. Ensuite les deux variables de Fourier k et ω parcourent *a priori* $\mathbb{R}$, mais du point de vue du problème discrétisé, toutes les fréquences ne peuvent être représentées sur un maillage. En effet, on ne peut représenter des solutions de fréquences inférieures à π/L_y où L_y est la longueur du domaine, ni celles de fréquences supérieures à $\pi/\Delta y$ où Δy est la longueur d'une maille (voir le théorème de Shannon ou pour l'application aux maillages dans le livre [14] de C. A. J. Flechter). En refaisant le même raisonnement pour les fréquences en temps (l'intervalle de temps est $]0,T[$, le pas de temps Δt), nous obtenons :

$$|k| \in \left[\frac{\pi}{L_y}, \frac{\pi}{\Delta y}\right],\ |\omega| \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}\right].$$

Nous introduisons alors D l'ensemble défini par :

$$D = \left\{(k,\omega) \in \mathbb{R}^2, \frac{\pi}{L_y} \leq |k| \leq \frac{\pi}{\Delta y}, \frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t}\right\}.$$

Nous allons visualiser ce taux de convergence dans le cas où $\nu = 0.01$, $a = b = 1$, $c = 0$ et où les pas de discrétisation en temps et en espace sont de l'ordre de 10^{-2}. Si le domaine est de largeur $L_y = 1$ et l'intervalle de temps est $[0,1]$, nous observons sur la Figure 7.1 le maximum du taux de convergence sur les fréquences k et ω de D en fonction du paramètre p dans le cas sans recouvrement. Sur la Figure 7.2 nous observons la même quantité dans le cas d'un recouvrement d'une maille. Il apparaît dans chacun des cas qu'il existe un $p = p_{opt}$ pour lequel le maximum sur l'ensemble des fréquences du taux de convergence atteint un minimum. C'est ce p que nous allons choisir.

Dans le cadre de l'approximation d'ordre 0, nous serons alors amenés à résoudre le problème suivant :

$$\min_{p>0}\max_{k,\omega\in D}\left|\frac{\delta^{1/2}-p}{\delta^{1/2}+p}\right|^2 e^{-\frac{L}{\nu}\mathcal{R}e(\delta^{1/2})}. \tag{7.2}$$

Avec les mêmes données que précédemment, nous observons sur les Figures 7.3 et 7.4 le maximum de ρ_1, le taux de convergence de l'algorithme avec des conditions d'ordre 1, sur l'ensemble des fréquences en fonction des paramètres p et q dans le

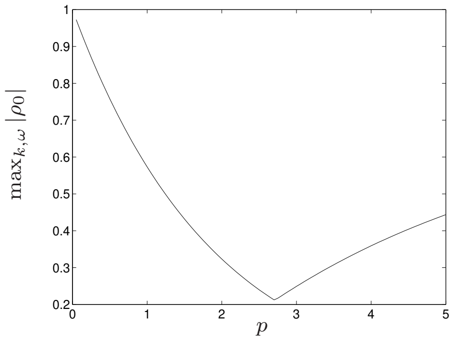


FIG. 7.1 – $\max_{k,\omega}|\rho_0|$ en fonction de p (sans recouvrement).

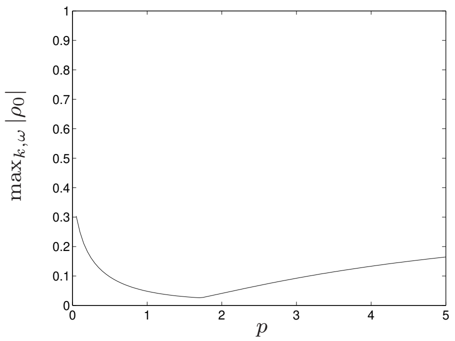


FIG. 7.2 – $\max_{k,\omega}|\rho_0|$ en fonction de p (recouvrement d'une maille).

cas sans et avec recouvrement. Ces figures également mettent en évidence l'existence d'un minimum pour le taux de convergence d'ordre 1.

Ainsi dans le cadre de l'approximation d'ordre 1 nous sommes amenés à résoudre le problème suivant :

$$\min_{(p,q)>0,\, p-\frac{a^2}{2}q>0} \max_{k,\omega\in D} \left| \frac{\delta^{1/2} - p - 2\nu iq(\omega + bk)}{\delta^{1/2} + p + 2\nu iq(\omega + bk)} \right|^2 e^{-\frac{L}{\nu}\mathcal{R}e(\delta^{1/2})}. \tag{7.3}$$

Nous n'avons pas de résultats théoriques sur ces problèmes d'optimisation, et les deux problèmes (7.2) et (7.3) sont alors résolus de façon numérique. Dans la suite tous les paramètres optimisés seront calculés par Matlab qui propose une méthode de recherche de minimum de type simplexe de Nelder-Mead.

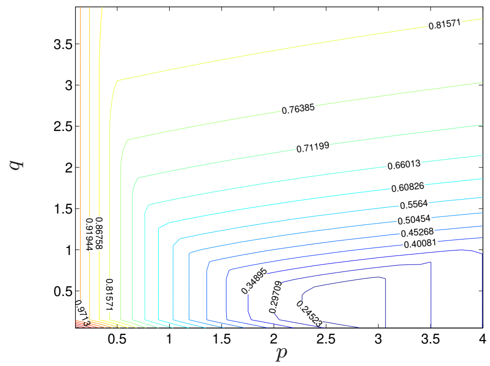


FIG. 7.3 – $\max_{k,\omega} |\rho_1|$ en fonction de p et q (sans recouvrement).

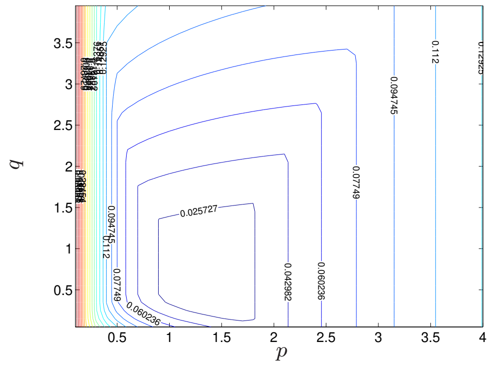
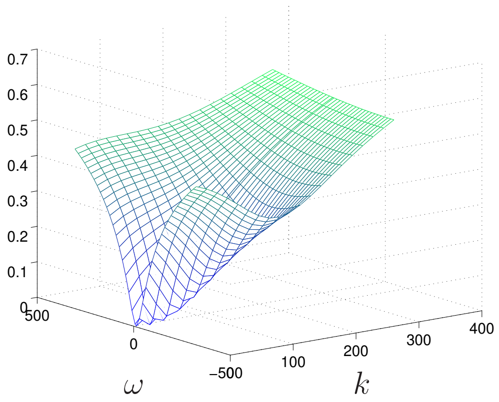
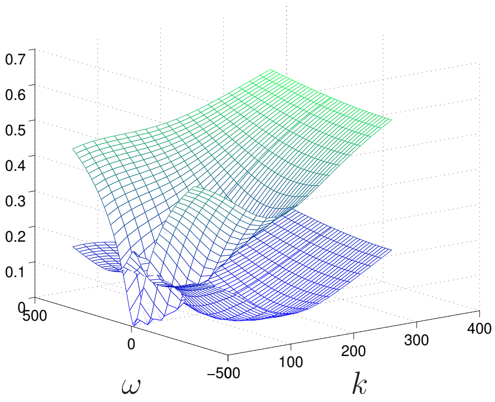


FIG. 7.4 – $\max_{k,\omega} |\rho_1|$ en fonction de p et q (recouvrement d'une maille).

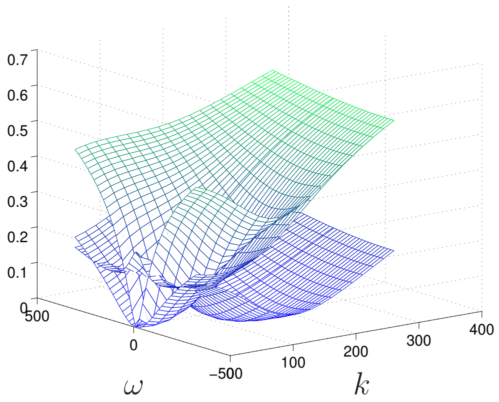
Nous visualisons à présent les taux de convergence des méthodes de Taylor et des méthodes optimisées. Nous nous plaçons premièrement dans le cas où $a = b = 1$ et $\nu = 0.01$. Dans le cas sans recouvrement nous observons sur la Figure 7.5 les taux de convergence des différentes méthodes en fonction de k et ω et sur la Figure 7.6 différentes coupes de ces taux de convergence. Sur la Figure 7.5 nous observons qu'à un ordre donné le taux de convergence des méthodes optimisées est globalement plus petit que celui des méthodes de Taylor. La Figure 7.6 nous indique plus précisément que quand ω et k ont des petites valeurs (voir par exemple la coupe $k = 3$ et $\omega \in [-100, 100]$, le taux de convergence des méthodes de Taylor est plus petit que celui des méthodes optimisées. Puis plus les fréquences augmentent (coupes $k = 61$, $k = 125$ ou $k = 135$) plus ce rapport s'inverse et les méthodes optimisées présentent un meilleur taux de convergence que les méthodes de Taylor.



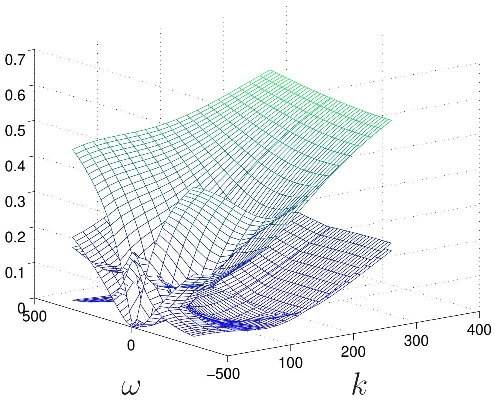
Ordre 0 Taylor



Ordre 0 Taylor et optimisé



Ordre 0 Taylor et optimisé, ordre 1 Taylor



Ordre 0, ordre 1 Taylor et optimisé

FIG. 7.5 – $\nu = 0.01$: taux de convergence des différentes méthodes en fonction des fréquences de Fourier k et ω. Cas sans recouvrement.

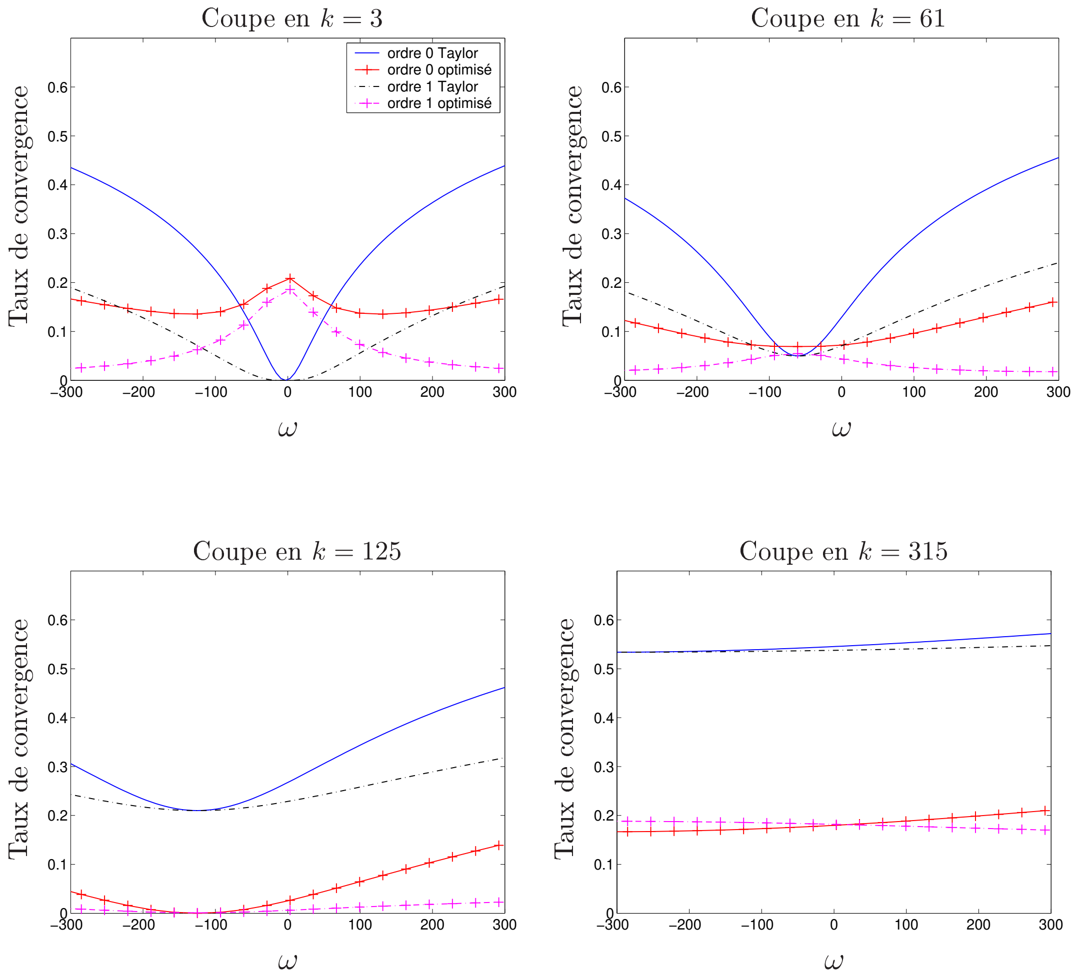
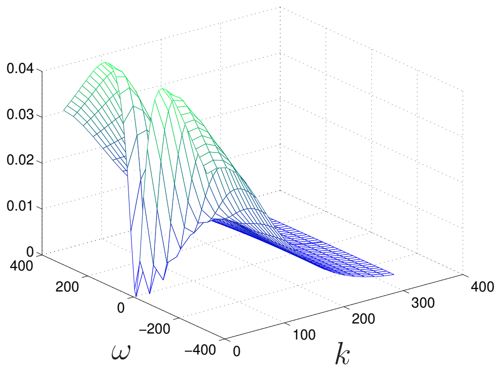


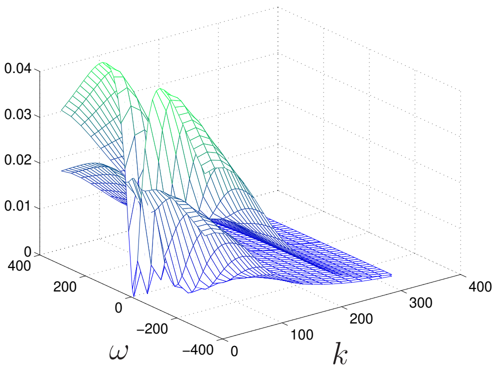
FIG. 7.6 – $\nu = 0.01$: coupes des taux de convergence. Cas sans recouvrement.

Nous étudions à présent le cas avec recouvrement d'une maille. La Figure 7.7 montre les taux de convergence en fonction de k et ω et la Figure 7.8 en montre des coupes. Nous remarquons tout d'abord en comparant les Figures 7.6 et 7.8 que l'échelle de 7.8 est divisée par 10 par rapport à celle de 7.6. Ceci nous indique que l'algorithme avec recouvrement convergera plus vite que celui sans recouvrement. Dans le cas avec recouvrement nous remarquons également que les méthodes de Taylor sont meilleures uniquement pour les basses fréquences.

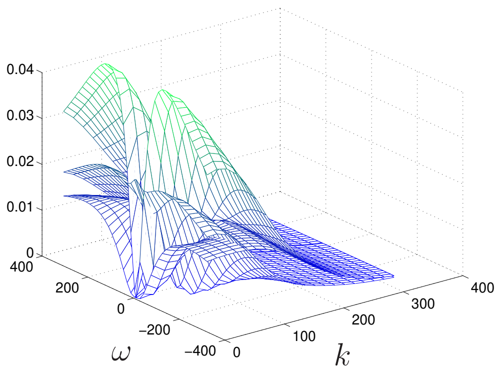
Remarque 2 *La coupe $k = 315$ de la Figure 7.6 et la coupe $k = 190$ de la Figure 7.8 mettent en évidence le fait que le taux de convergence tend vers 1 quand k et ω tendent vers l'infini dans le cas sans recouvrement et vers 0 dans le cas avec recouvrement.*



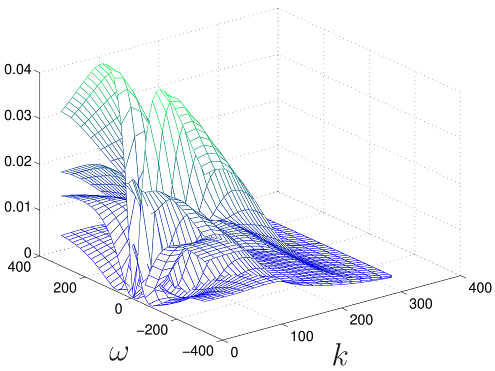
Ordre 0 Taylor



Ordre 0 Taylor et optimisé



Ordre 0 Taylor et optimisé, ordre 1 Taylor



Ordre 0, ordre 1 Taylor et optimisé

FIG. 7.7 – $\nu = 0.01$: taux de convergence des différentes méthodes en fonction des fréquences de Fourier k et ω. Cas avec recouvrement d'une maille.

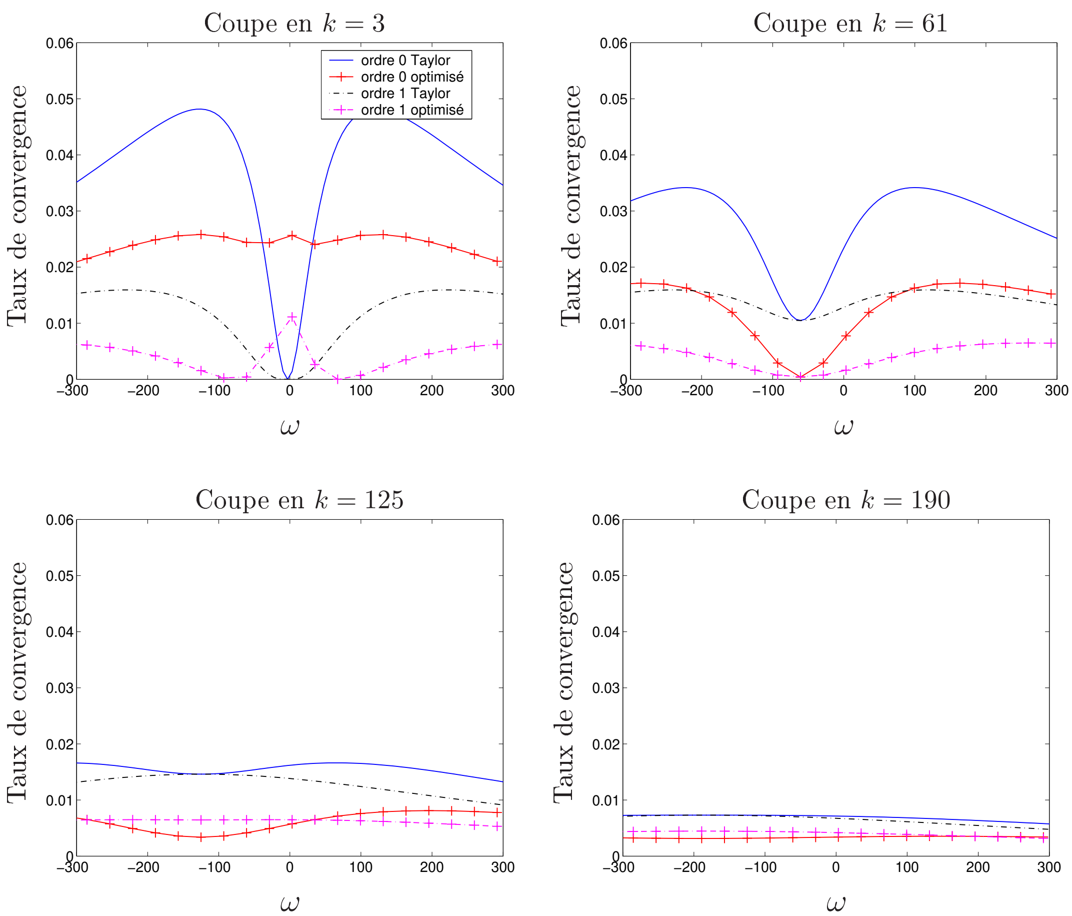


FIG. 7.8 – $\nu = 0.01$: coupes des taux de convergence. Cas avec recouvrement d'une maille.

Nous étudions à présent le taux de convergence de ces différentes méthodes quand la viscosité est plus grande, par exemple $\nu = 0.5$. Les Figures 7.9 et 7.10 montrent des coupes de ces taux respectivement dans le cas sans et avec recouvrement. Nous voyons d'une part que l'échelle de ces figures est plus grande que celle des Figures 7.6 et 7.8 ($\nu = 0.01$), ce qui nous indique que quand la viscosité va augmenter, la convergence deviendra plus lente. Nous comparons ensuite d'une part les Figures 7.6 et 7.9 (sans recouvrement) et d'autre part les Figures 7.8 et 7.10 (avec recouvrement) et nous remarquons que plus la viscosité est grande moins bonnes sont les méthodes de Taylor, même sur les basses fréquences. Ceci nous indique que les méthodes optimisées seront d'autant meilleures par rapport aux méthodes de Taylor que la viscosité sera grande.

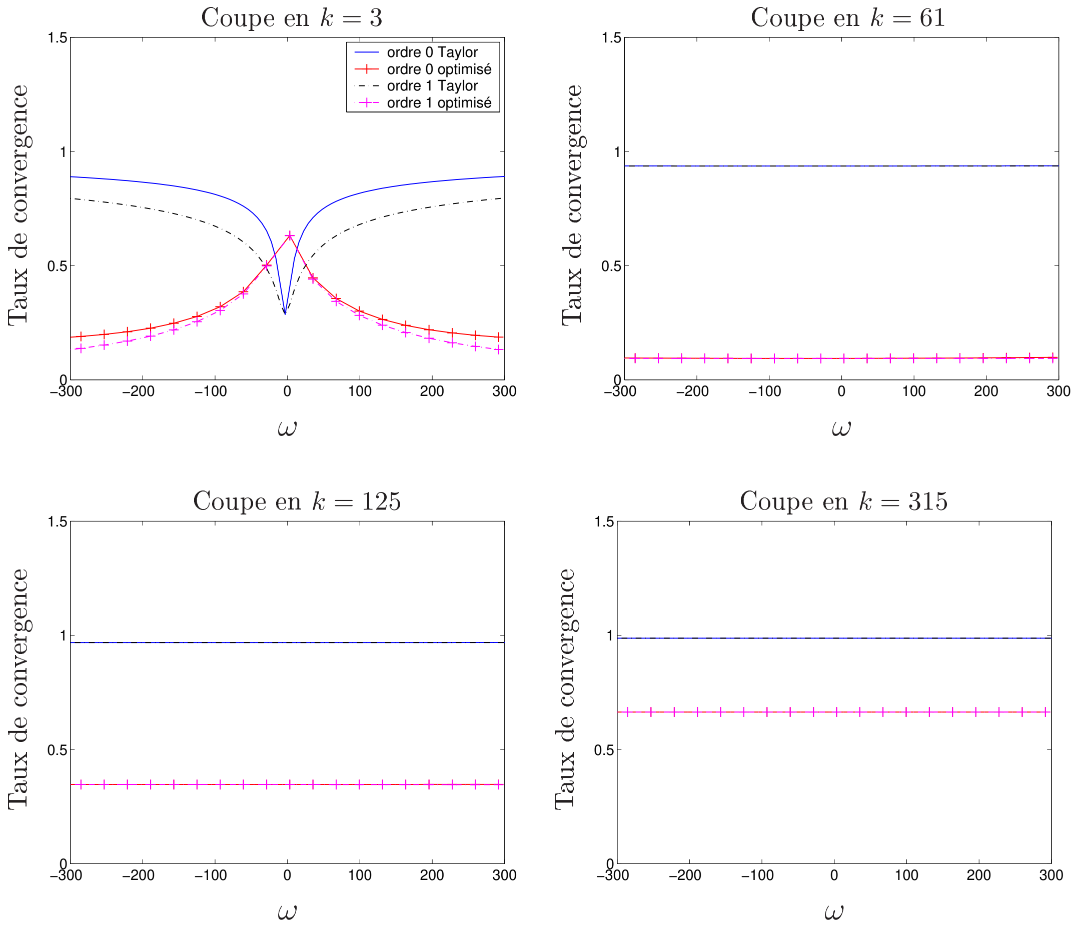


FIG. 7.9 – $\nu = 0.5$: Coupes des taux de convergence. Cas sans recouvrement.

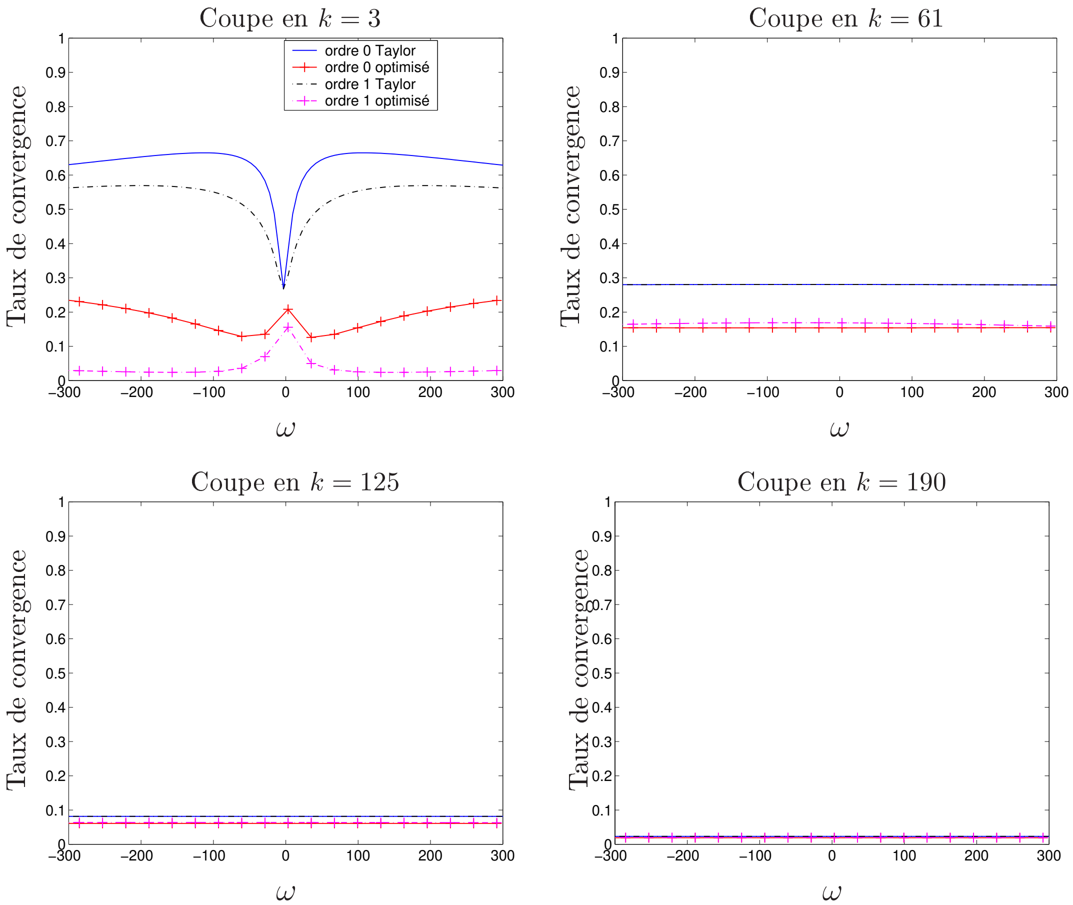


FIG. 7.10 – $\nu = 0.5$: Coupes des taux de convergence. Cas avec recouvrement d'une maille.

7.3 Cas d'une vitesse non constante

Dans tout ce qui précède nous avons fait l'hypothèse que la vitesse de convection était constante et l'interface rectiligne. Mais les techniques présentées précédemment peuvent très bien s'étendre au cas où la vitesse de convection est non constante et l'interface non rectiligne. Les opérateurs $\mathcal{B}^{\pm}_{\text{SWR}}$ de l'algorithme présenté dans le Tableau 2 s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \pm p}{2\nu} \mp q\frac{\partial}{\partial t} \mp q\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}$$

où $\mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\tau}$ représentent respectivement le vecteur normal et tangentiel à l'interface. Les paramètres p et q ne sont plus des constantes mais dépendent de la variable d'interface. Dans le cas de l'approximation de Taylor nous aurons :

$$p = \sqrt{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})^2 + 4\nu c} \text{ et } q = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})^2 + 4\nu c}}.$$

De même, dans la méthode optimisée nous optimiserons le taux de convergence de façon locale, en chacun des points de l'interface (ou de façon moins coûteuse en quelques points de l'interface, les autres étant interpolés).

Dans le Chapitre 9 nous mettons en œuvre ces méthodes et nous considérons différentes valeurs pour les paramètres a, b et ν. Notamment nous étudions le cas où la vitesse de convection n'est pas constante.

Chapitre 8

Discrétisation des algorithmes de décomposition de domaine

Au Chapitre 9 nous mettons en œuvre les algorithmes de décomposition de domaine que nous avons introduits aux Chapitres 4 et 5 et nous présentons des résultats numériques. Le but de ce chapitre est de montrer comment discrétiser ces algorithmes.

Nous détaillons dans un premier temps (Sections 8.1, 8.2) la discrétisation de l'équation de convection-diffusion sur $\Omega \times]0, T[$, en donnant le schéma à l'intérieur du domaine, aux bords (nous considérons des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann) et aux coins.

Puis dans la Section 8.3 nous nous intéressons plus particulièrement à la discrétisation des conditions de transmission des algorithmes que nous avons introduits aux Chapitres 4 et 5.

8.1 Maillage du carré unité

Dans le cadre de la mise en œuvre numérique, nous travaillons sur le domaine spatial $\Omega = \{(x, y),\, 0 \leq x \leq X,\, 0 \leq y \leq Y\}$ et sur le problème aux limites décrit sur la Figure 8.1, c.-à-d. nous considérons des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann sur le bord de Ω.
Nous maillons Ω de façon uniforme (voir Figure 8.2) ; nous discrétisons l'intervalle $[0, X]$ en abscisse en N_x intervalles de longueur $X/N_x = \Delta x$, et l'intervalle $[0, Y]$ en ordonnée en N_y intervalles de longueur $Y/N_y = \Delta y$. L'intervalle de temps $[0, T]$ est également discrétisé en N_T intervalles de longueur $T/N_T = \Delta t$.

Nous introduisons par ailleurs $u^n_{i,j}$ l'approximation de $u((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta y, n\Delta t)$, pour $1 \leq i \leq N_x + 1$, $1 \leq j \leq N_y + 1$ et $1 \leq n \leq N_T + 1$

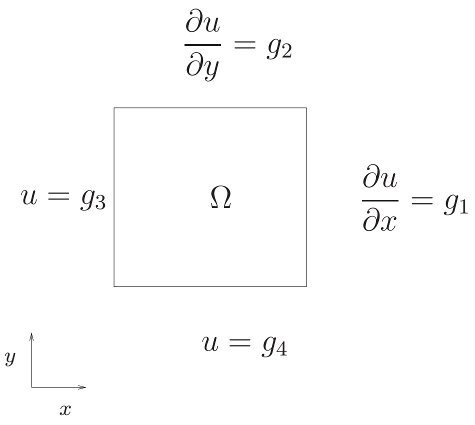


FIG. 8.1 – Problème aux limites

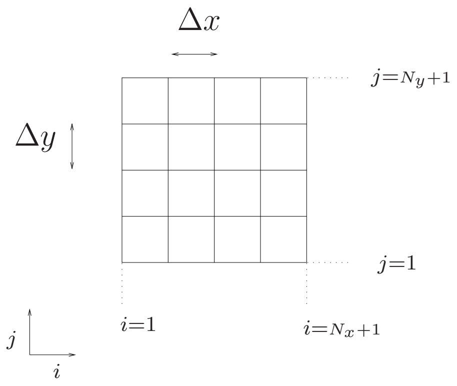


FIG. 8.2 – Maillage du domaine Ω

8.2 Discrétisation de l'équation de convection-diffusion

Pour discrétiser l'équation (1.2), nous utilisons le schéma de Crank Nicolson d'ordre 2, centré en temps et en espace (voir [14] C.A.J. Flechter).
Dans la suite nous détaillons le schéma à l'intérieur du domaine, sur les bords et dans les coins.

8.2.1 Schéma à l'intérieur du domaine

Nous discrétisons ici l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} - \nu \triangle u = f.$$

La dérivée en temps est centrée en $(n+1/2)$ et est discrétisée au point (i,j) par :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t}.$$

Les dérivées en espace sont centrées et prises au temps $n+1/2$. Ainsi pour $2 \leq i \leq N_x$ et $2 \leq j \leq N_y$, l'équation est discrétisée par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{n+1} + \frac{a}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_{i,j}^{n+1} + \frac{b}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)_{i,j}^{n+1} - \frac{\nu}{2}(\triangle u)_{i,j}^{n+1} \\ = \; & f_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{n} - \frac{a}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_{i,j}^{n} - \frac{b}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)_{i,j}^{n} + \frac{\nu}{2}(\triangle u)_{i,j}^{n}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

où nous avons introduit :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x}(u^n_{i+1,j} - u^n_{i-1,j}),\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y}(u^n_{i,j+1} - u^n_{i,j-1}),\\
&(\triangle u)^n_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2}(u^n_{i+1,j} + u^n_{i-1,j} - 2u^n_{i,j}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u^n_{i,j+1} + u^n_{i,j-1} - 2\,u^n_{i,j}),\\
&f^{n+1/2}_{i,j} = \frac{1}{2}(f^n_{i,j} + f^{n+1}_{i,j}).
\end{aligned}$$

8.2.2 Schéma sur les bords du domaine

Nous discrétisons ici les conditions aux limites sur $\partial\Omega$. Ces conditions peuvent être du type Dirichlet ou Neumann (voir Figure 8.1).

• Les conditions de type **Dirichlet** qui s'écrivent en continu :

$$u = g,$$

se discrétisent comme l'équation à l'intérieur du domaine c.-à-d. au temps $n + 1/2$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u^{n+1}_{1,j} &= g^{n+1/2}_{1,j} - \frac{1}{2}u^n_{1,j} \text{ pour } 1 \le j \le N_y + 1,\\
\frac{1}{2}u^{n+1}_{i,1} &= g^{n+1/2}_{i,1} - \frac{1}{2}u^n_{i,1} \text{ pour } 2 \le i \le N_x + 1,
\end{aligned}$$

avec $g^{n+1/2}_{i,j} = \frac{1}{2}(g((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta y, n\Delta t) + g((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta y, (n+1)\Delta t))$

• Pour écrire une condition de type **Neumann** compatible avec le schéma centré en espace à l'intérieur du domaine, nous introduisons un point fictif à l'extérieur du domaine.

Sur le bord $\{x = 1, 0 \le y \le 1\}$, la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g$$

se traite au point $(N_x + 1, j), 2 \le j \le N_y$ en introduisant le point fictif $(N_x + 2, j)$ (voir Figure 8.3) et en écrivant :

$$\frac{1}{2\Delta x}(u^{n+1/2}_{N_x+2,j} - u^{n+1/2}_{N_x,j}) = g^{n+1/2}_{N_x+1,j}. \tag{8.2}$$

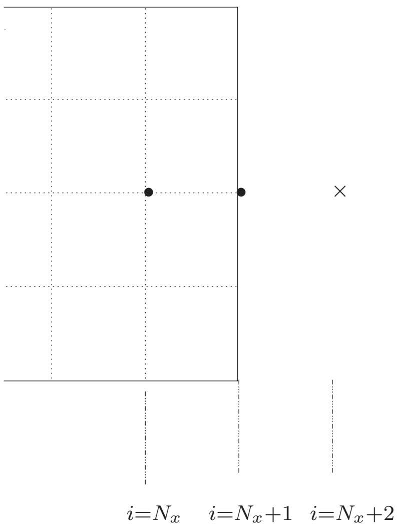


FIG. 8.3 – Discrétisation d'une condition de Neumann

La relation (8.2) nous permet alors d'obtenir la valeur de $u^{n+1/2}_{N_x+2,j}$. Nous pouvons donc à présent discrétiser l'équation de convection-diffusion sur le bord, et nous obtenons alors la condition aux limites discrète pour $2 \leq j \leq N_y$:

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{n+1/2}_{N_x+1,j} + b\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^{n+1/2}_{N_x+1,j} - \nu(\triangle_{yy} u)^{n+1/2}_{N_x+1,j} - \frac{2\nu}{\Delta x^2}\Big(u^{n+1/2}_{N_x,j} - u^{n+1/2}_{N_x+1,j}\Big)$$
$$= f^{n+1/2}_{N_x+1,j} + \Big(\frac{2\nu}{\Delta x} - a\Big) g^{n+1/2}_{N_x+1,j},$$

où nous avons introduit :

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{n+1/2}_{i,j} = \frac{1}{\Delta t}(u^{n+1}_{i,j} - u^{n}_{i,j}),$$
$$(\triangle_{yy} u)^{n}_{i,j} = \frac{1}{\Delta y^2}(u^{n}_{i,j+1} + u^{n}_{i,j-1} - 2\, u^{n}_{i,j}).$$

Il reste alors à traiter cette condition aux limites aux niveau des coins. C'est l'objet du paragraphe suivant.

8.2.3 Schéma aux coins

Pour les coins de coordonnées $(1,0)$, $(0,0)$ et $(0,1)$ (voir Figure 8.1), c.-à-d. des coins qui appartiennent à des bords 'Dirichlet', nous appliquons la condition de Dirichlet correspondante.

En revanche, un coin entre deux bords 'Neumann' (ici le point $(1,1)$) ne peut pas se traiter directement. Nous suivons alors le principe utilisé pour discrétiser la condition de Neumann sur le bord, mais dans ce cas, nous introduisons deux points fictifs (voir Figure 8.4), Nous discrétisons les deux conditions aux limites sur chacun

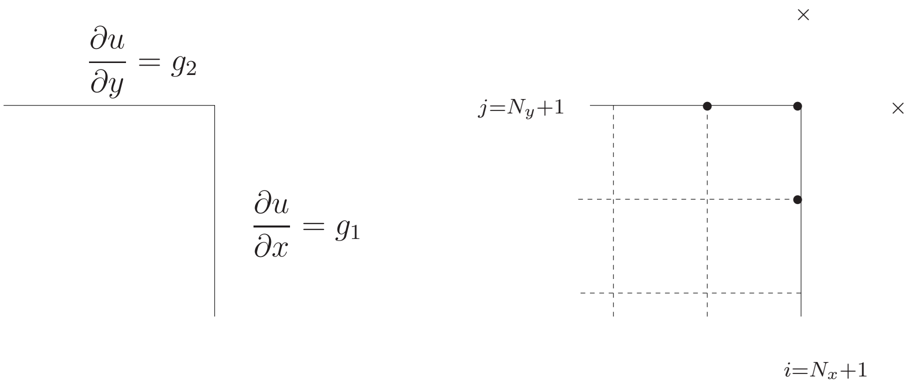


FIG. 8.4 – Discrétisation d'un coin avec conditions de Neumann

des bords. La condition $\dfrac{\partial u}{\partial x} = g_1$ au point $(1,1)$ se discrétise comme suit :

$$\frac{1}{2\Delta x}(u^{n+1/2}_{N_x+2,N_y+1} - u^{n+1/2}_{N_x,N_y+1}) = g1^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1}.$$

De même, pour la condition $\dfrac{\partial u}{\partial y} = g_2$ en $(1,1)$, nous écrivons :

$$\frac{1}{2\Delta y}(u^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+2} - u^{n+1/2}_{N_x+1,N_y}) = g2^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1}.$$

Ces conditions nous permettent de trouver l'approximation de u aux points (N_x+2, N_y+1) et (N_x+1, N_y+2). Par suite, nous pouvons écrire l'équation de convection-diffusion au coin :

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1} - \frac{2\nu}{\Delta x^2}\Big(u^{n+1/2}_{N_x,N_y+1} - u^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1}\Big) - \frac{2\nu}{\Delta y^2}\Big(u^{n+1/2}_{N_x+1,N_y} - u^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1}\Big)$$
$$= f^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1} + \Big(\frac{2\nu}{\Delta x} - a\Big)g1^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1} + \Big(\frac{2\nu}{\Delta y} - b\Big)g2^{n+1/2}_{N_x+1,N_y+1}.$$

8.2.4 Résolution du système discret

La relation (8.1) et les conditions aux limites discrétisées sur le bord de Ω et aux coins, s'écrivent sous une forme matricielle du type :

$$AU^{n+1} = B^n,$$

avec ${}^tU^{n+1} = (u_{1,1}, \dots, u_{1,N_y+1}, u_{2,1}, \dots, u_{2,N_y+1}, \dots, u_{N_x+1,1}, \dots, u_{N_x+1,N_y+1})$.
Ce système linéaire est résolu à chaque pas de temps par une méthode itérative de type GMRES.

8.3 Discrétisation des algorithmes de décomposition de domaine

Dans cette section, nous explicitons le schéma pour discrétiser les algorithmes de décomposition de domaine introduits aux Chapitres 4 et 5.
Nous décomposons Ω en deux sous-domaines :

$$\Omega^- = \{(x,y),\, 0 \le x \le x_{\text{interf}} + L,\, 0 \le y \le Y\},$$
$$\Omega^+ = \{(x,y),\, x_{\text{interf}} \le x \le X,\, 0 \le y \le Y\},$$

avec $L \ge 0$ la taille du recouvrement et x_{interf} l'abscisse de l'interface pour Ω^+.

Nous maillons chacun de ces domaines comme nous l'avons fait pour Ω (voir Figure 8.5) et les deux maillages sont concordants : Ω^- est décomposé en $(N_x^1+1) \times (N_y+1)$ mailles de surface $\Delta x \times \Delta y$ et Ω^+ est décomposé en $(N_x^2+1) \times (N_y+1)$ mailles de surface $\Delta x \times \Delta y$

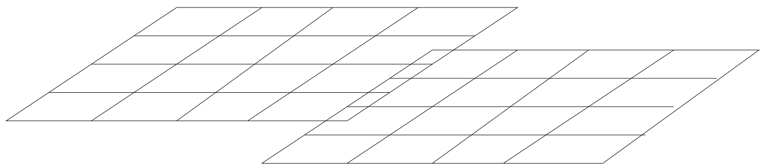


FIG. 8.5 – Discrétisation des sous-domaines

8.3.1 Algorithme avec conditions de transmission d'ordre 0

Nous discrétisons ici l'algorithme (4.1), (4.2) c.-à-d. l'algorithme avec des conditions de transmission d'ordre 0 .

Nous traitons le problème du point de vue de Ω^- (un raisonnement analogue s'applique au domaine Ω^+) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u = f & \text{dans } \Omega^- \times]0,T[, \\ u(\cdot,\cdot,0) = w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} u = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} v & \text{sur } \Gamma_L \times]0,T[, \end{cases}$$

avec v solution de l'équation de convection-diffusion dans Ω^+.
Il s'agit alors d'une part de discrétiser la condition aux limites $\partial_x u - (a-p)u/2\nu = g$ pour résoudre le problème dans Ω^- et d'autre part d'extraire le second membre $\partial_x v - (a-p)v/2\nu$ du domaine Ω^+.

Discrétisation des conditions de transmission

Nous traitons ici la condition aux limites dans Ω^- qui est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u = g.$$

Cette condition de Robin se discrétise en $\{x = x_{\text{interf}} + L, 0 \leq y \leq 1\}$ comme nous l'avons fait pour la condition de Neumann, c.-à-d. nous introduisons un point fictif (voir Fig 8.3) :

$$\frac{1}{2\Delta x}(u^{n+1/2}_{N_x^1+2,j} - u^{n+1/2}_{N_x^1,j}) - \lambda u^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} = g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} \text{ pour } 2 \leq j \leq N_y.$$

Nous obtenons alors l'expression de $u_{N_x^1+2,j}$ et nous pouvons ainsi écrire l'équation de convection-diffusion sur le bord. Pour $2 \leq j \leq N_y$, nous avons :

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} + \left(a\lambda - \frac{2\nu}{\Delta x^2}(\Delta x\lambda - 1)\right) u^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} - \frac{2\nu}{\Delta x^2} u^{n+1/2}_{N_x^1,j} \\ +b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} - \nu(\triangle_{yy}u)^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} = f^{n+1/2}_{N_x^1+1,j} + \left(\frac{2\nu}{\Delta x} - a\right) g^{n+1/2}_{N_x^1+1,j}.\end{gathered}$$

Les coins demandent également un traitement particulier. Si nous imposons sur l'un des deux bords qui forment ce coin une condition de Dirichlet, le coin sera traité par cette condition de Dirichlet. En revanche si nous traitons le bord de Ω avec une condition de Neumann, le coin sera traité comme nous l'avons fait dans la Section 8.2.3, c.-à-d. nous introduisons deux points fictifs puis nous écrivons l'équation au coin. Si la condition $\partial_y u = g_2$ est imposée en $y = Y$, nous obtenons alors au point $(N_x^1, N_y + 1)$:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{N_x^1+1,N_y+1} + \left(a\lambda - \frac{2\nu}{\Delta x^2}(\Delta x\lambda - 1)\right) u^{n+1/2}_{N_x^1+1,N_y+1} - \frac{2\nu}{\Delta x^2} u^{n+1/2}_{N_x^1,N_y+1} \\ -\frac{2\nu}{\Delta y^2}(u^{n+1/2}_{N_x^1+1,N_y} + u^{n+1/2}_{N_x^1,N_y+1}) = f^{n+1/2}_{N_x^1+1,N_y+1} + \left(\frac{2\nu}{\Delta x} - a\right) g^{n+1/2}_{N_x^1+1,N_y+1} - b{g_2}^{n+1/2}_{N_x^1+1,N_y+1}.\end{gathered}$$

Extraction de la condition de transmission

Il s'agit ici d'extraire de Ω^+ la quantité $\partial_x v - \lambda v$ au niveau du point (int, j) du maillage Ω^+, avec $\text{int} = 1 + l$, $l \geq 0$ le nombre de mailles de recouvrement.
Puisque $v_{\text{int},j}$ vérifie dans Ω^+ l'équation de convection-diffusion discrète (8.1), nous pouvons donner l'expression de $v^{n+1/2}_{\text{int}-1,j}$ (il est nécessaire d'exprimer v en ce point dans le cas $l = 0$) :

$$\begin{aligned} v^{n+1/2}_{\text{int}-1,j} = 2v^{n+1/2}_{\text{int},j} - v^{n+1/2}_{\text{int}+1,j} + \frac{\Delta x^2}{\nu}\Bigg(\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} + a\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} \\ +b\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} - \nu \triangle_{yy} v^{n+1/2} - f^{n+1/2}_{\text{int},j}\Bigg). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Ensuite la dérivée $\partial_x v$ se discrétise de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} = \frac{v^{n+1/2}_{\text{int}+1,j} - v^{n+1/2}_{\text{int}-1,j}}{2\Delta x},$$

et en introduisant (8.3) dans cette expression nous trouvons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} = \frac{2\nu}{2\nu + a\Delta x}\left(\frac{v^{n+1/2}_{\text{int}+1,j} - v^{n+1/2}_{\text{int},j}}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta x}{2\nu + a\Delta x}\Bigg(\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} \\ +b\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} - \nu(\triangle_{yy} v)^{n+1/2}_{\text{int},j} - f^{n+1/2}_{\text{int},j}\Bigg). \end{aligned}$$

Ainsi, de Ω^+, nous extrayons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} - \lambda v^{n+1/2}_{\text{int},j} = -\left(\frac{2\nu}{\Delta x(2\nu + a\Delta x)} + \lambda\right) v^{n+1/2}_{\text{int},j} + \frac{2\nu}{\Delta x(2\nu + a\Delta x)} v^{n+1/2}_{\text{int}+1,j} \\ -\frac{\Delta x}{2\nu + a\Delta x}\Bigg(\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} + b\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} - \nu(\triangle_{yy} v)^{n+1/2}_{\text{int},j} - f^{n+1/2}_{\text{int},j}\Bigg). \end{aligned} \tag{8.4}$$

8.3.2 Algorithme avec conditions de transmission d'ordre 1

Nous donnons à présent le schéma pour l'algorithme (5.1), (5.2) c.-à-d. l'algorithme avec conditions de transmission d'ordre 1. Nous discrétisons le problème dans Ω^- :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\, u & = \quad f \quad & \text{dans } \Omega^- \times]0, T[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = \quad w_0 \quad & \text{dans } \Omega^-, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} + q\dfrac{\partial}{\partial t} + bq\dfrac{\partial}{\partial y}\right) u & = \quad \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{a-p}{2\nu} + q\dfrac{\partial}{\partial t} + bq\dfrac{\partial}{\partial y}\right) v & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \end{cases}$$

avec v solution de l'équation de convection-diffusion dans Ω^+.

Comme précédemment nous allons discrétiser la condition aux limites du problème dans Ω^- puis nous montrons comment extraire le second membre de cette condition aux limites.

Discrétisation des conditions de transmission

La condition aux limites en $\{x = x_{\text{interf}} + L, 0 \leq y \leq 1\}$ de l'algorithme (5.1), (5.2) est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u + q\frac{\partial u}{\partial t} + bq\frac{\partial u}{\partial y} = g.$$

La discrétisation de cette condition s'écrit pour $2 \leq j \leq N_y$:

$$\frac{1}{2\Delta x}(u^{n+1/2}_{N^1_x+2,j} - u^{n+1/2}_{N^1_x,j}) - \lambda u^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} + q\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} + bq\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} = g^{n+1/2}_{N^1_x+1,j}.$$

Nous tirons alors de cette relation la valeur de $u^{n+1/2}_{N^1_x+2,j}$, et nous pouvons à présent écrire l'équation de convection-diffusion sur l'interface. Nous trouvons :

$$\begin{aligned}&\left(1 - aq + \frac{2q\nu}{\Delta x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} + b\left(1 - aq + \frac{2q\nu}{\Delta x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} - \nu(\triangle_{yy}u)^{n+1/2}_{N^1_x+1,j}\\ &+\left(a\lambda - \frac{2\nu}{\Delta x^2}(\lambda\Delta x - 1)\right)u^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} - \frac{2\nu}{\Delta x^2}u^{n+1/2}_{N^1_x,j} = f^{n+1/2}_{N^1_x+1,j} + \left(\frac{2\nu}{\Delta x} - a\right)g^{n+1/2}_{N^1_x+1,j}.\end{aligned}$$

Extraction de la condition de transmission

Nous montrons à présent comment extraire la quantité $\partial_x v - \lambda v + q\partial_t v + bq\partial_y v$ du domaine Ω^+. Nous reprenons le raisonnement de l'algorithme avec conditions de transmission d'ordre 0. De (8.4) nous tirons :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} - \lambda v^{n+1/2}_{\text{int},j} + q\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{\text{int}+1,j} + bq\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{\text{int}+1,j}\\ &= -\left(\frac{2\nu}{\Delta x(2\nu + a\Delta x)} + \lambda\right)v^{n+1/2}_{\text{int},j} + \frac{2\nu}{\Delta x(2\nu + a\Delta x)}v^{n+1/2}_{\text{int}+1,j} + (q - \frac{\Delta x}{2\nu + a\Delta x})\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j}\\ &+b\left(q - \frac{\Delta x}{2\nu + a\Delta x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{\text{int},j} - \frac{\Delta x}{2\nu + a\Delta x}\Big(-\nu(\triangle_{yy}v)^{n+1/2}_{\text{int},j} + f^{n+1/2}_{\text{int},j}\Big).\end{aligned} \tag{8.5}$$

8.3.3 Mise en œuvre pratique de l'algorithme de décomposition de domaine

Nous détaillons ici la manière dont nous mettons en œuvre l'algorithme avec des conditions de transmission d'ordre j, $j = 0, 1$ sur deux processeurs. Le processeur n^o1 résout l'équation sur Ω^- pendant que le processeur n^o2 résout l'équation sur Ω^+.

Si g_+^k, et g_-^k sont calculées à l'étape k, l'étape $k+1$ se déroule comme suit :

1ère étape : résolution de l'équation sur tout l'intervalle de temps et dans chaque sous-domaine.

- PROCESSEUR n°1

$$\begin{cases} \mathcal{L}u^{k+1} & = & f & \text{dans } \Omega^- \times]0, T[, \\ u^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}^{k+1} - \mathcal{S}_j^- u^{k+1} & = & g_+^k & \text{sur } \Gamma \times]0, T[. \end{cases}$$

- PROCESSEUR n°2

$$\begin{cases} \mathcal{L}v^{k+1} & = & f & \text{dans } \Omega^+ \times]0, T[, \\ v^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}^{k+1} - \mathcal{S}_j^+ v^{k+1} & = & g_-^k & \text{sur } \Gamma \times]0, T[. \end{cases}$$

2ème étape : extraction des conditions aux limites.

- PROCESSEUR n°1
  Extraction de $g_-^{k+1} = \partial_x u^{k+1} - \mathcal{S}_j^+ u^{k+1}$ pour tous les pas de temps selon l'équivalent de la formule (8.4) dans Ω^- si $j = 0$ ou (8.5) si $j = 1$.
- PROCESSEUR n°2
  Extraction de $g_+^{k+1} = \partial_x v^{k+1} - \mathcal{S}_j^- v^{k+1}$ pour tous les pas de temps selon la formule (8.4) si $j = 0$ ou (8.5) si $j = 1$.

3ème étape : échange d'informations entre les processeurs.

- PROCESSEUR n°1
  Envoi de g_-^{k+1}, réception de g_+^{k+1}.
- PROCESSEUR n°1
  Envoi de g_+^{k+1}, réception de g_-^{k+1}.

Retour à l'étape 1.

Chapitre 9

Résultats numériques

Dans ce chapitre consacré aux résultats numériques, Ω désigne le carré unité $\Omega = \{(x, y),\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Dans le cas où Ω est décomposé en deux sous-domaines, nous allons résoudre l'équation de convection diffusion sur $\Omega \times]0, T[$ par les méthodes de décomposition de domaine présentées aux Chapitres 2, 4 et 5. Nous considérons le cas avec ou sans recouvrement.

Dans la Section 9.1 nous mettons en évidence le manque de performance de la méthode de Schwarz classique par rapport aux méthodes optimisées. Puis dans la Section 9.2, nous comparons la vitesse de convergence des différentes méthodes. Nous considérons plusieurs vitesses de convection et plusieurs viscosités. Enfin dans la Section 9.3 nous étudions l'influence du pas de temps et du pas d'espace sur la convergence de ces méthodes.

9.1 Comparaison entre conditions optimisées et conditions de Dirichlet

Dans cette section nous allons regarder comment converge la méthode de Schwarz classique par rapport aux méthodes optimisées. Pour cela nous résolvons l'équation $\mathcal{L}u = 0$ sur $\Omega \times]0, 1[$ où $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$ et $\Omega^- = \{(x, y), 0 \leq x \leq 0.51, 0 \leq y \leq 1\}$, $\Omega^+ = \{(x, y), 0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ (le recouvrement vaut 0.01) et avec les conditions aux limites décrites sur la Figure 9.1.

Les paramètres de discrétisation définis au Chapitre 8 sont $\Delta x = \Delta y = 0.01$ c.-à-d. $N_x = N_y = 100$ et $\Delta t = 0.01$. Les paramètres physiques valent $\nu = 0.01$, $a = b = 0.1$ et $c = 0$ et la condition initiale vaut $u_0(x, y) = \exp\big(-100\big((x - 0.25)^2 + (y - 0.5)^2\big)\big)$. Tous les algorithmes de décomposition de domaine de ce chapitre seront initialisés par $u^0(\cdot, \cdot, t) = u_{0|\Omega^-}$ et $v^0(\cdot, \cdot, t) = u_{0|\Omega^+}$ pour tout t de $]0, 1[$. La Figure 9.2 décrit l'évolution de la solution au cours du temps. Nous voyons notamment que la solution convecte selon le vecteur $(1, 1)$ tout en se diffusant.

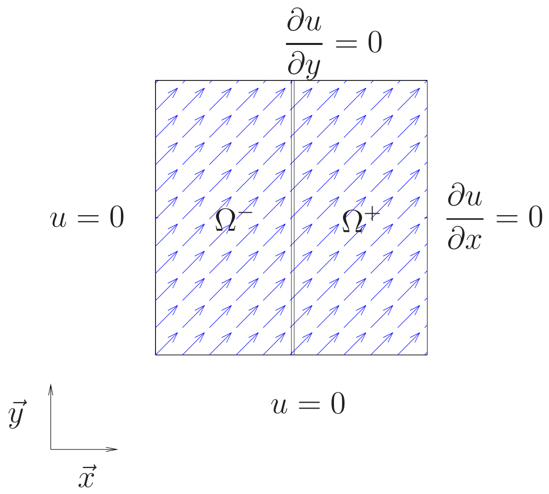


FIG. 9.1 – Problème aux limites

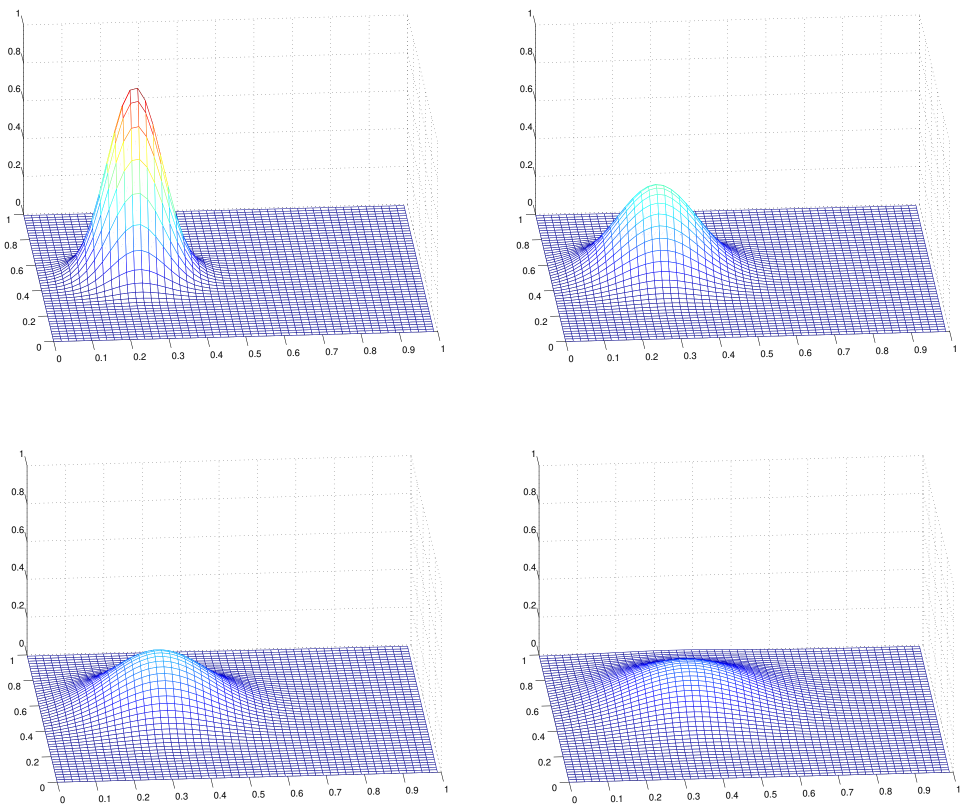


FIG. 9.2 – Solution aux temps $t = 0$, $t = 0.3$, $t = 0.6$ et $t = 1$

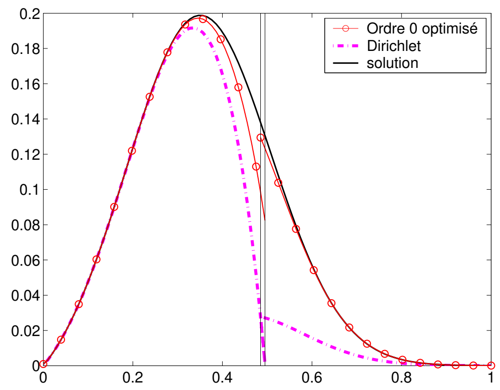


FIG. 9.3 – Coupe du premier itéré au temps $t = 1$

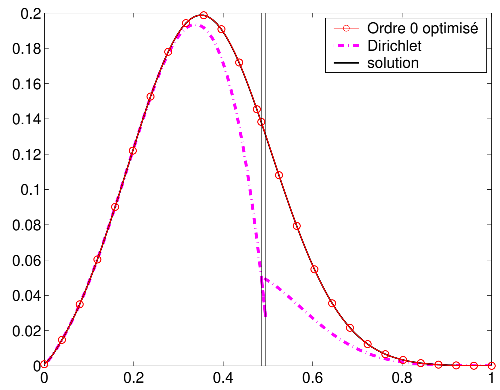


FIG. 9.4 – Coupe du deuxième itéré au temps $t = 1$

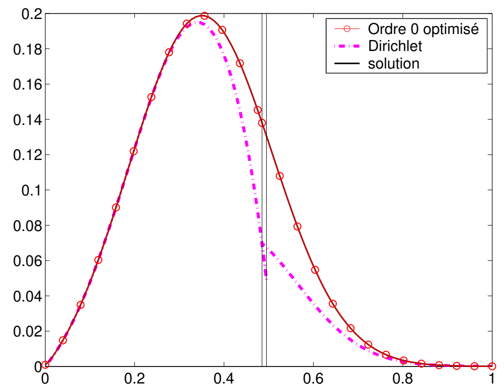


FIG. 9.5 – Coupe du troisième itéré au temps $t = 1$

Les Figures 9.3, 9.4 et 9.5 montrent une coupe de la solution calculée au temps $t = 1$; nous comparons à différentes étapes de l'algorithme la solution obtenue par la méthode de Schwarz classique et par la méthode optimisée d'ordre 0. Nous voyons qu'avec la méthode optimisée, dès les premières itérations, de bonnes informations sont transmises au niveau de l'interface pour donner une solution proche de la solution exacte. Les conditions de Dirichlet ne semblent pas être les bonnes informations à échanger. Cette expérience montre que les conditions d'interface de l'algorithme optimisé sont mieux adaptées que celles de l'algorithme de Schwarz classique.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux de [17] (M.J. Gander, L. Halpern et F. Nataf) implémentés en dimension 1.

9.2 Vitesse de convergence des méthodes optimisées

Dans les Chapitres 4 et 5 nous avons écrit un algorithme de décomposition de domaine avec, du côté Ω^-, les conditions d'ordre 0 :

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - \frac{a-p_0}{2\nu}u^{k+1} = \frac{\partial v^k}{\partial x} - \frac{a-p_0}{2\nu}v^k,$$

ou les conditions d'ordre 1 :

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - \frac{a-p_1}{2\nu}u^{k+1} + q_1\frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} + bq_1\frac{\partial u^{k+1}}{\partial y} = \frac{\partial v^k}{\partial x} - \frac{a-p_1}{2\nu}v^k + q_1\frac{\partial v^k}{\partial t} + bq_1\frac{\partial v^k}{\partial y}.$$

Nous cherchons ici à comparer la vitesse de convergence de cet algorithme pour différents choix du paramètre p_0 (algorithme avec des conditions d'ordre 0) et pour différents choix des paramètres p_1 et q_1 (algorithme avec des conditions d'ordre 1) (voir Chapitre 7), et pour cela nous allons résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u & = & f & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & u_0 & \text{dans } \Omega, \\ u(0,\cdot,\cdot) & = & g_1 & \text{sur } [0,1]\times]0,T[, \\ u(\cdot,0,\cdot) & = & g_2 & \text{sur } [0,1]\times]0,T[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,\cdot,\cdot) & = & g_3 & \text{sur } [0,1]\times]0,T[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(\cdot,1,\cdot) & = & g_4 & \text{sur } [0,1]\times]0,T[. \end{cases}$$

Afin d'observer la vitesse de convergence des différents algorithmes, il suffit d'observer l'évolution de l'erreur. C'est pourquoi dans chacune des sections suivantes nous étudions le cas où f, u_0, g_1, g_2, g_3 et g_4 sont identiquement nulles. L'algorithme de décomposition de domaine sera alors initialisé par la fonction :

$$w^0(x,y,t) = \sum_{l_t=0,\pi/\Delta t} \sin(l_t t) \sum_{l_x=0,\pi/\Delta x} \sin(l_x x) \sum_{l_y=0,\pi/\Delta y} \sin(l_y y).$$

Dans toute la suite les paramètres de discrétisation sont les suivants (voir Chapitre 8) :

$$\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ c.-à-d. } N_x = N_y = 100,$$
$$\Delta t = 0.01.$$

La théorie que nous avons mise en place précédemment s'applique au cas où la vitesse de convection est constante. Dans la Section 9.2.1 nous montrons des résultats numériques qui entrent dans cette catégorie. En revanche nous pouvons parfaitement appliquer les algorithmes introduits aux Chapitres 4 et 5 au cas où la vitesse de convection n'est plus constante ; les sections suivantes sont consacrées à ce cas. La vitesse de convection sera *tournante* dans la Section 9.2.2, *recirculante* dans la Section 9.2.3 et *tourbillonnante* dans la Section 9.2.4.

9.2.1 Vitesse constante

Dans cette section la vitesse de convection est constante, elle vaut $a = b = 1$ (voir Figure 9.6). Nous allons étudier le comportement des différents algorithmes selon la valeur de la viscosité.

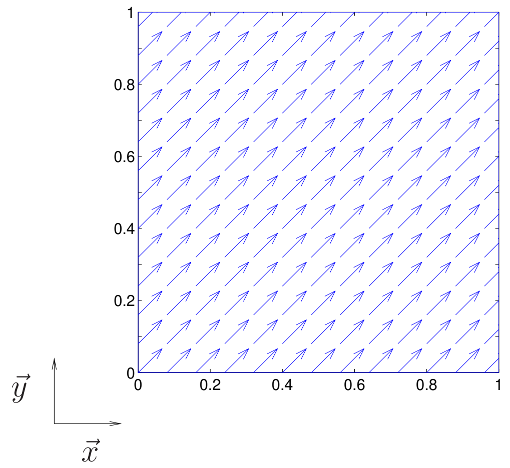


FIG. 9.6 – Représentation du champ de vitesse constant sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$

L'interface entre les deux sous-domaines se trouve en $x = 0.5$ et nous allons considérer plusieurs tailles de recouvrement.

Nous allons mettre en œuvre les algorithmes de décomposition de domaine avec des conditions de transmission obtenues par développement de Taylor ou par optimisation du taux de convergence (voir Chapitre 7). Dans le cas où l'intervalle de temps est $T = [0, 0.1]$ (c.-à-d. T est découpé en 10 pas de temps), la Figure 9.7 montre comment varient les paramètres optimisés p_0 (le coefficient optimisé de la méthode d'ordre 0) et p_1, q_1 (les coefficients optimisés de la méthode d'ordre 1) en fonction de la viscosité. Nous considérons le cas sans recouvrement ($L = 0$) et le cas d'une maille de recouvrement ($L = \Delta x$). Nous remarquons dans un premier temps que les coefficients optimisés p_0, p_1 et q_1 dépendent de la taille du recouvrement et de la viscosité, contrairement aux coefficients de Taylor (pour Taylor nous avons $p_0 = |a| = 1$, $p_1 = |a| = 1$ et $q_1 = \frac{1}{|a|} = 1$ et ces paramètres ne dépendent ni de la viscosité ni du recouvrement). Nous remarquons également que les coefficients optimisés d'ordre 0 (p_0 et p_1) augmentent avec la viscosité alors que le coefficient d'ordre 1 (q_1) tend vers 0. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

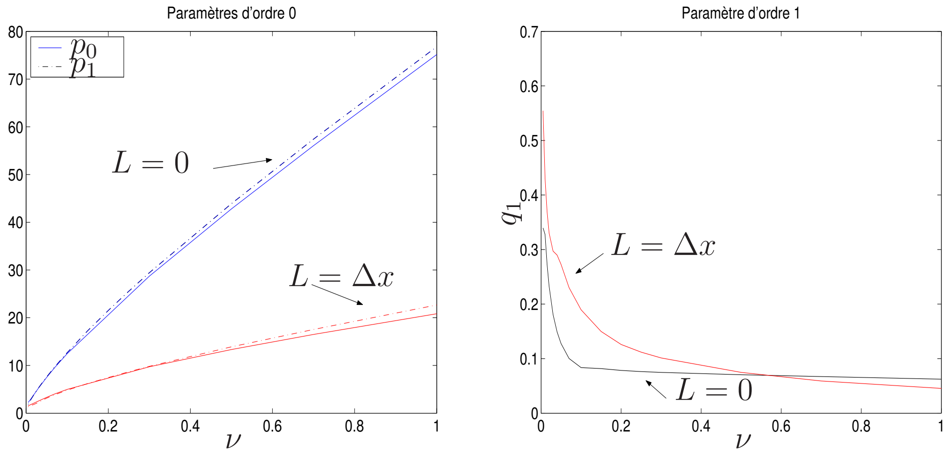


FIG. 9.7 – Paramètres optimisés en fonction de la viscosité. $T = [0, 0.1]$.

Cas sans recouvrement

Nous regardons à présent comment convergent ces algorithmes et nous nous plaçons tout d'abord dans le cas sans recouvrement. Les Figures 9.8, 9.9 et 9.10 montrent pour différentes longueurs de l'intervalle de temps ($T = [0, 0.1]$, $T = [0, 0.5]$ et $T = [0, 1]$) l'évolution du logarithme en base 10 de l'erreur $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ en fonction des itérations et pour différentes valeurs de la viscosité. Les Tableaux 9.1, 9.2 et 9.3 nous donnent pour chacune des viscosités la valeur des paramètres optimisés.

Nous comparons l'efficacité des différentes méthodes et pour cela nous rappelons que les méthodes de Taylor ont été obtenues au Chapitre 7 par développement en basses fréquences des symboles des opérateurs optimaux $\mathcal{S}^{\pm}$, introduits au Chapitre 3. Mais en fait, il est aisé de constater que nous obtenons le même résultat en développant ces symboles pour une viscosité petite. Ainsi nous pouvons supposer qu'un cas favorable aux méthodes de Taylor est le cas où la viscosité est petite.

Et en effet pour chaque longueur d'intervalle de temps, nous observons que pour des viscosités inférieures à $\nu = 0.05$ les deux meilleures méthodes sont les méthodes d'ordre 1 (optimisée et Taylor). Puis quand la viscosité augmente et atteint environ $\nu = 0.05$, la méthode optimisée d'ordre 0 devient meilleure que la méthode de Taylor d'ordre 1. Enfin, plus la viscosité augmente, plus l'écart entre les méthodes optimisées et de Taylor se creuse. Dans tous les cas la méthode avec des conditions optimisées d'ordre 1 est très efficace comparée aux autres méthodes. Par exemple nous voyons sur la Figure 9.10 ($T = [0, 1]$) que pour la petite viscosité $\nu = 0.01$ l'algorithme optimisé d'ordre 1 converge en deux fois moins d'itérations que l'algorithme de Taylor d'ordre 1, et ce rapport ne cesse d'augmenter avec ν (pour $\nu = 0.05$ ce rapport devient 3 *etc...*).

Nous observons par ailleurs que les méthodes optimisées d'ordre 0 et d'ordre 1 convergent à la même vitesse quand la viscosité est grande ($\nu = 0.5$ ou $\nu = 1$). Ceci concorde avec le fait que q_1 tend vers 0 quand ν grandit et que p_0 et p_1 ont des valeurs proches (voir les Tableaux 9.1 et 9.2 et 9.3). En fait, nous pouvons penser que quand la viscosité devient grande, l'équation tend à se comporter comme l'équation de la chaleur, équation symétrique pour laquelle il est judicieux d'utiliser l'opérateur de transmission :

$$\frac{\partial}{\partial x} - q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ceci nous amène à considérer un algorithme de décomposition de domaine avec des conditions d'ordre 2 en espace. Dans le cas $T = 1$ la Figure 9.11 montre le résultat obtenu avec une condition optimisée d'ordre 2 quand la viscosité vaut $\nu = 1$. Nous voyons que cette méthode permet d'améliorer considérablement la convergence ; elle converge en 5 fois moins d'itérations que les méthodes optimisées d'ordre 0 ou 1.

Ensuite nous renvoyons le lecteur à l'article de M. J. Gander et H. Zhao [20] qui met en évidence l'existence de deux sortes de convergence dans l'algorithme de Schwarz classique de type relaxation d'ondes appliqué à l'équation de la chaleur : il y a convergence superlinéaire quand l'intervalle de temps est 'petit' et convergence linéaire quand l'intervalle de temps est plus 'grand'. Pour des intervalles de temps de longueur 'moyenne', les auteurs ont observé une convergence de l'algorithme linéaire dans un premier temps puis superlinéaire dans un second temps. C'est ce même phénomène que nous pouvons observer sur les Figures 9.8, 9.9 et 9.10. Pour de faibles viscosités ($\nu = 0.005$, $\nu = 0.01$) nous observons que les méthodes d'ordre 0 (optimisée et Taylor) présentent ces deux convergences : d'abord linéaire puis superlinéaire. Et plus la longueur de l'intervalle de temps augmente, plus la région linéaire est importante. Les méthodes d'ordre 1 ne présentent que la convergence linéaire, car pour ces petites viscosités, ces deux méthodes convergent vite. Quand la viscosité est grande, nous n'observons plus ce palier : les méthodes optimisées convergent rapidement et n'ont pas le temps de changer de régime, et les méthodes de Taylor sont très lentes et atteignent cette limite en dehors de notre échelle.

	Ordre 0					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_0	2.2472	2.7977	7.4862	12.4714	42.8094	75.1425

	Ordre 1					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_1	1.8422	2.6396	7.5888	12.6887	43.8940	76.7787
q_1	0.3396	0.3276	0.1276	0.0859	0.0705	0.0623

TAB. 9.1 – Coefficients optimisés d'ordre 0 et 1. $T = [0, 0.1]$. Cas sans recouvrement.

	Ordre 0					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_0	2.2216	2.7101	5.8853	9.0031	32.9412	63.9050

	Ordre 1					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_1	1.8247	2.5394	5.8749	9.0099	32.9531	63.9120
q_1	0.3549	0.3438	0.1668	0.1095	0.03019	0.0155

TAB. 9.2 – Coefficients optimisés d'ordre 0 et 1. $T = [0, 0.5]$. Cas sans recouvrement.

	Ordre 0					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_0	2.2211	2.7082	5.7857	8.6642	32.3447	63.5418

	Ordre 1					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_1	1.8244	2.5371	5.7684	8.6557	32.3437	63.5413
q_1	0.3550	0.2278	0.08937	0.07459	0.01458	0.0079159

TAB. 9.3 – Coefficients optimisés d'ordre 0 et 1. $T = [0, 1]$. Cas sans recouvrement.

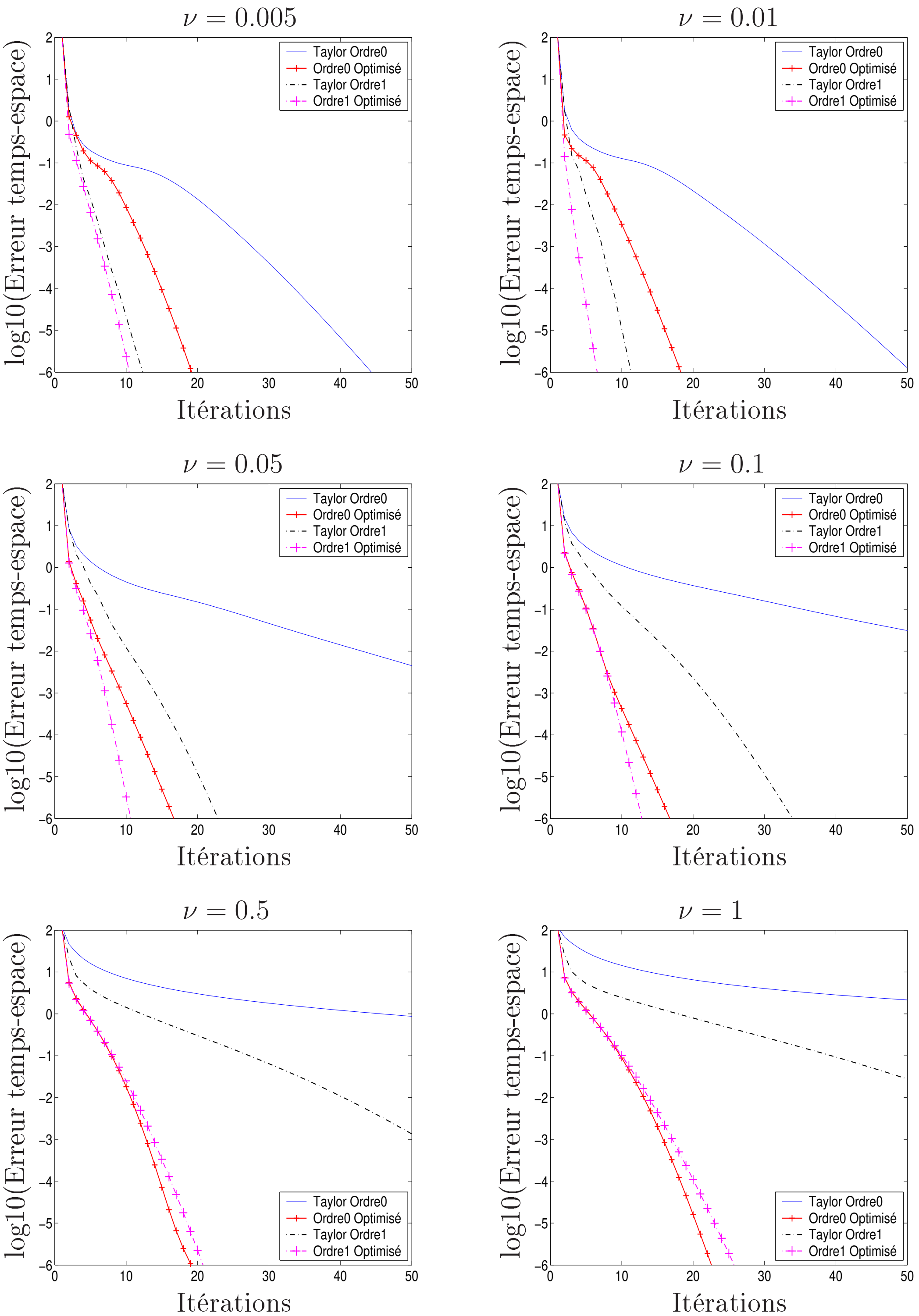


FIG. 9.8 – Vitesse constante : a=b=1. $T = [0, 0.1]$. Cas sans recouvrement.

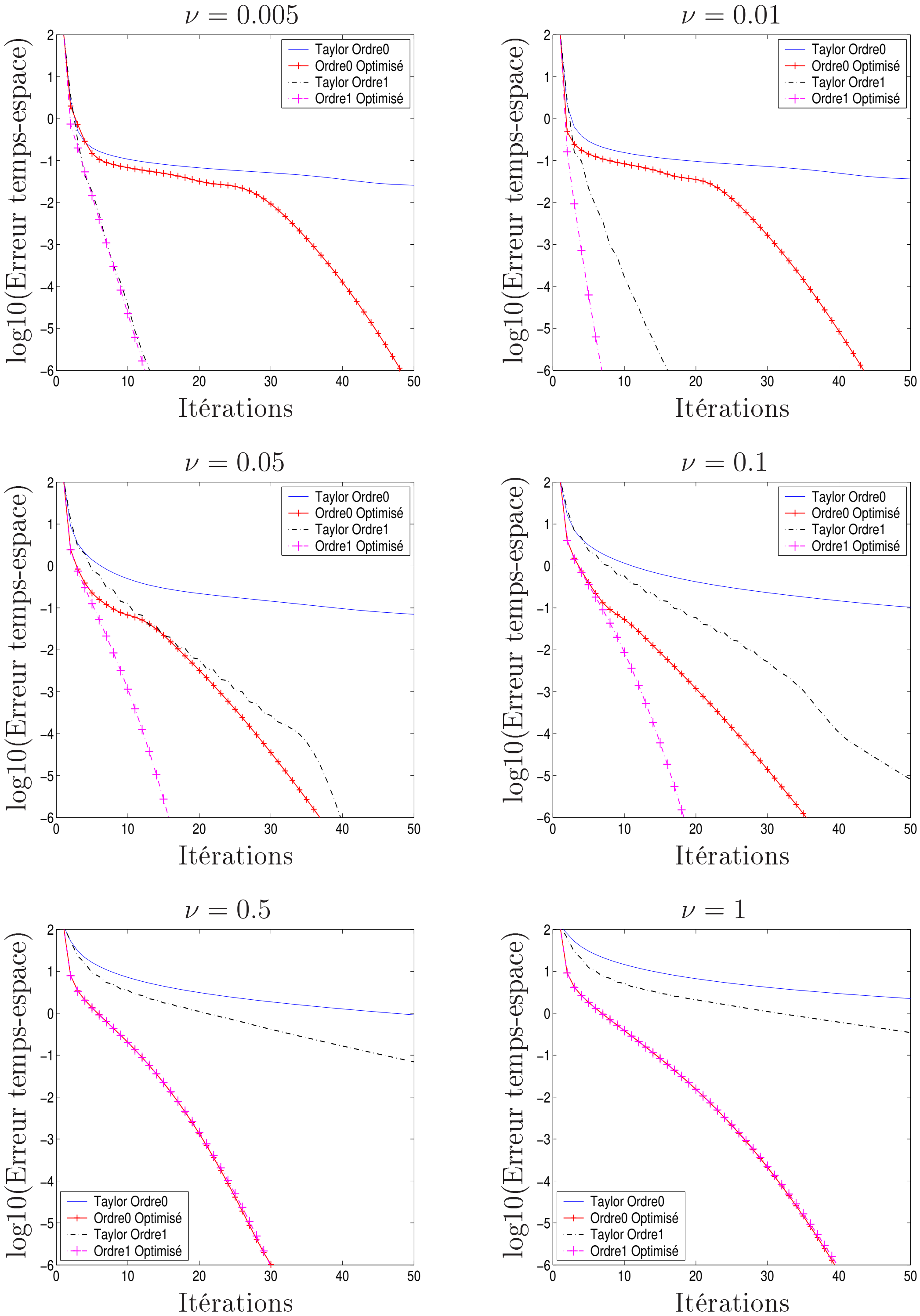


FIG. 9.9 – Vitesse constante : a=b=1. $T = [0, 0.5]$. Cas sans recouvrement.

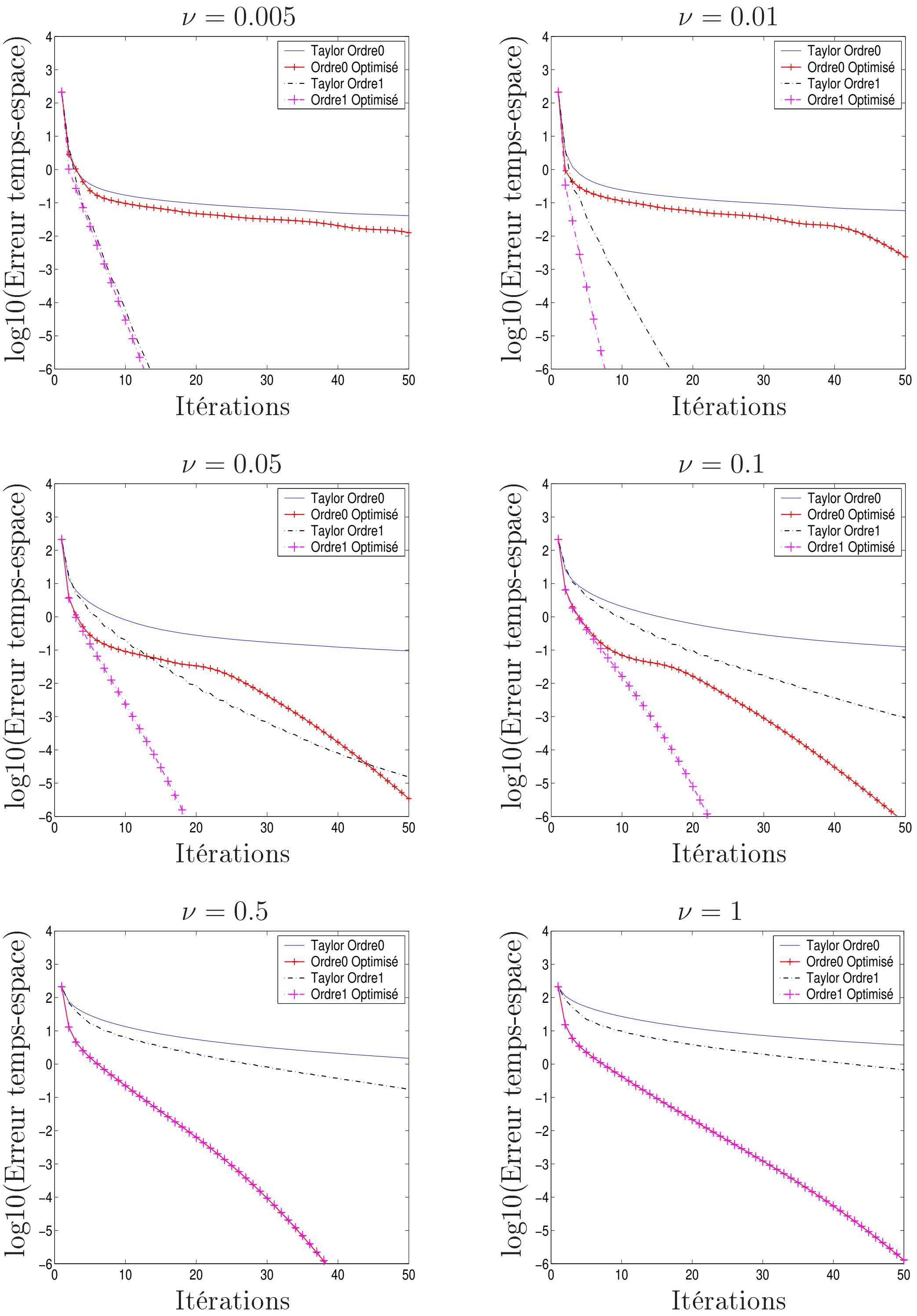


FIG. 9.10 – Vitesse constante : a=b=1. $T = [0, 1]$. Cas sans recouvrement.

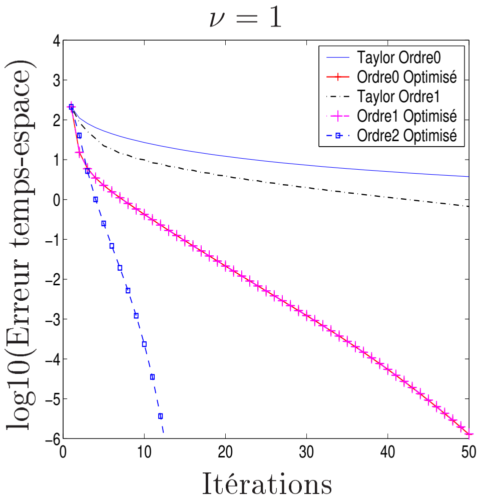


FIG. 9.11 – Vitesse constante : a=b=1. $T = [0, 1]$. Cas sans recouvrement.

Cas avec recouvrement

Nous nous plaçons à présent dans le cas d'une maille de recouvrement et nous pouvons alors implémenter l'algorithme de Schwarz classique avec relaxation d'ondes (conditions de Dirichlet). Le Tableau 9.4 nous donne la valeur des paramètres optimisés quand l'intervalle de temps est $T = [0, 1]$. La Figure 9.12 montre l'évolution de l'erreur $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ dans ce cas. Ces graphiques montrent que quand la viscosité est petite ($\nu = 0.005$, $\nu = 0.01$) toutes les méthodes convergent très rapidement puis comme dans le cas sans recouvrement, plus la viscosité augmente, meilleures sont les méthodes optimisées par rapport aux méthodes de Taylor. Pour $\nu = 1$ par exemple les méthodes optimisées convergent en 10 itérations environ, alors que les méthodes de Taylor en nécessitent 3.5 fois plus pour l'ordre 1 et 4 fois plus pour l'ordre 0. Nous notons que pour toutes les viscosités la méthode de Schwarz classique est très lente.

Comme dans le cas sans recouvrement, nous remarquons que quand $\nu = 1$ l'optimisé d'ordre 1 n'apporte rien à la convergence par rapport à l'optimisé d'ordre 0. Et en reprenant la Figure 9.11 nous voyons qu'implémenter l'ordre 1 optimisé avec une maille de recouvrement produit la même efficacité que d'implémenter l'ordre 2 optimisé dans le cas sans recouvrement.

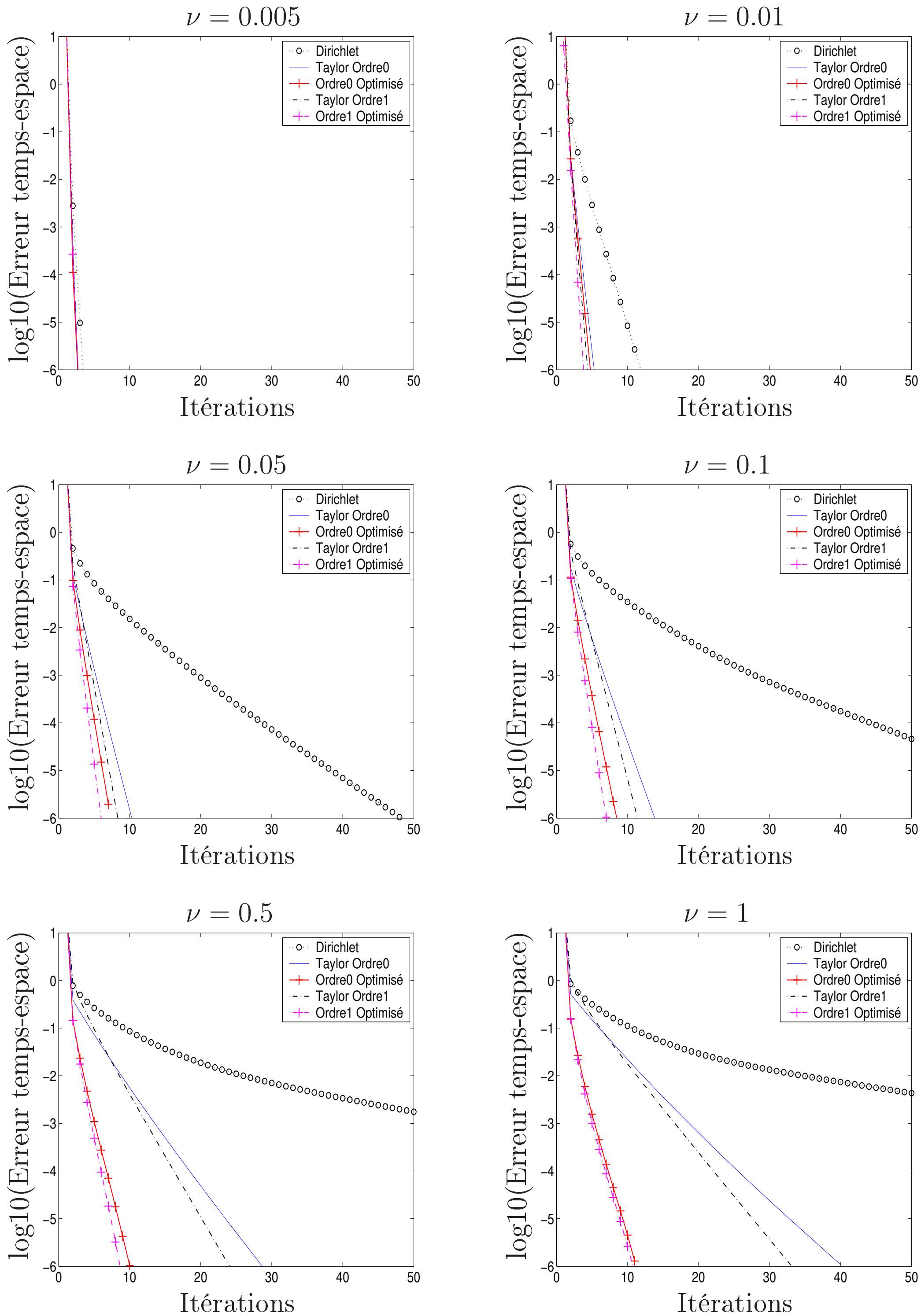


FIG. 9.12 – Vitesse constante : a=b=1. $T = [0, 1]$. Cas avec recouvrement.

	Ordre 0					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_0	1.5248	1.7203	2.5241	3.3182	10.040	17.7833

	Ordre 1					
	$\nu = 0.005$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.05$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.5$	$\nu = 1$
p_1	1.2041	1.3417	1.9611	2.6202	8.6620	16.8939
q_1	0.5693	0.4655	0.5094	0.2031	0.0600	0.03046

TAB. 9.4 – Coefficients optimisés d'ordre 0 et 1. $T = [0, 1]$. Cas avec recouvrement.

Conclusion des résultats numériques avec vitesse constante

Nous résumons ici les remarques faites précédemment. Elles seront également vérifiées dans les sections suivantes, quand la vitesse de convection n'est plus constante.

Dans le cas sans recouvrement, nous observons deux régimes de convergence : d'abord linéaire puis superlinéaire. La taille de la première zone dépend de la taille de l'intervalle de temps, de la méthode et de la valeur de la viscosité.
La méthode optimisée d'ordre 1 est dans tous les cas la plus performante ; la méthode optimisée d'ordre 0 est d'autant meilleure que la viscosité est grande. Et globalement plus ν est grand plus l'écart entre les méthodes optimisées et les méthodes de Taylor se creuse au profit des méthodes optimisées. Quand la viscosité devient vraiment grande, l'ordre 1 optimisé n'apporte rien à la convergence par rapport à l'ordre 0 optimisé. Dans ce cas l'ordre 2 optimisé apporte un gain considérable.

Dans le cas avec recouvrement, les méthodes se comportent de la même façon. Plus la viscosité est grande, meilleures sont les méthodes optimisées comparées aux méthodes de Taylor. Nous remarquons également que dans la mesure du possible il est préférable d'avoir une maille de recouvrement (peu coûteuse) plutôt qu'aucun recouvrement. En comparant les Figures 9.12 et 9.10, pour $\nu = 1$ par exemple, nous voyons qu'une maille de recouvrement apporte un gain de rapport 5 sur la vitesse de convergence des méthodes optimisées.

9.2.2 Vitesse tournante

Dans cette section nous étudions le cas où la vitesse de convection n'est plus constante et vaut pour $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ (voir la Figure 9.13) :

$$
\begin{aligned}
a(x, y) &= 1 - 2y, \\
b(x, y) &= 1.
\end{aligned}
$$

La variation sur l'interface des deux composantes a et b de la vitesse est représentée sur la Figure 9.14.

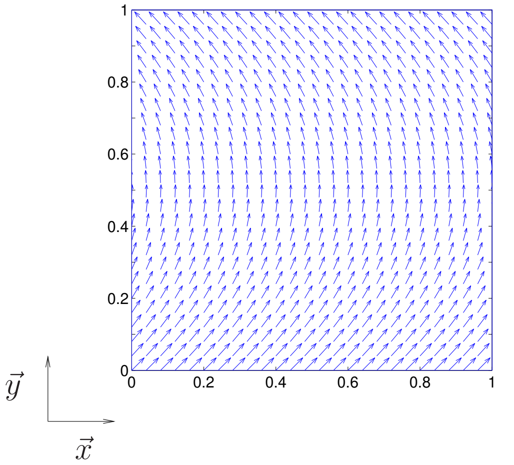


FIG. 9.13 – Représentation du champ de vitesse tournant sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$

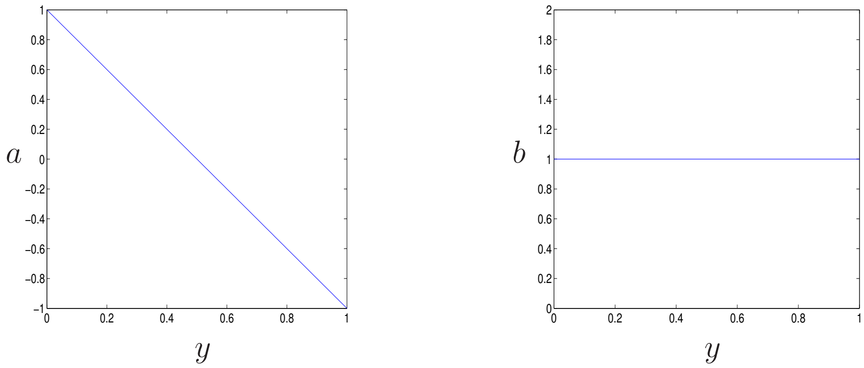


FIG. 9.14 – Composantes a et b de la vitesse de convection sur l'interface

Nous travaillons sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ (soit 100 pas de temps) et nous considérons le cas avec ou sans recouvrement. La Figure 9.15 montre la valeur des paramètres optimisés et de Taylor d'ordre 0 (p_0) ou d'ordre 1 (p_1, q_1) en chacun des points de l'interface. Nous retrouvons le comportement déjà observé dans le cas de la vitesse constante : les paramètres optimisés d'ordre 0, p_0 et p_1, augmentent avec la viscosité alors que le paramètre optimisé d'ordre 1, q_1 tend vers 0. Nous remarquons également la singularité en $y = 0.5$ du paramètre de Taylor $q_1 = \frac{1}{|a|}$.

La Figure 9.16 montre l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations, pour différentes valeurs de ν, quand le recouvrement est nul et la Figure 9.17 montre la même quantité dans le cas d'un recouvrement d'une maille. Le résultat est cohérent avec celui obtenu à vitesse constante (Section 9.2.1).

Dans le cas sans recouvrement et pour toutes les viscosités, la méthode la plus efficace est la méthode optimisée d'ordre 1. Cette fois-ci même pour de petites viscosités la méthode de Taylor d'ordre 1 n'est pas performante et la méthode optimisée d'ordre 0 devient rapidement meilleure que celle-ci.

Dans le cas avec recouvrement nous observons le même phénomène, même pour des faibles viscosités les méthodes optimisées sont plus efficaces que les méthodes de Taylor et l'écart entre les deux méthodes se creuse quand la viscosité grandit. Nous remarquons également (Fig 9.17) que contrairement aux méthodes de Taylor, le nombre d'itérations nécessaire à la convergence des méthodes optimisées est plutôt stable par rapport à la viscosité : ce nombre passe de 6 itérations pour $\nu = 0.005$ à 11 pour $\nu = 1$ alors que pour une approximation de Taylor, il passe de 9 à 70.

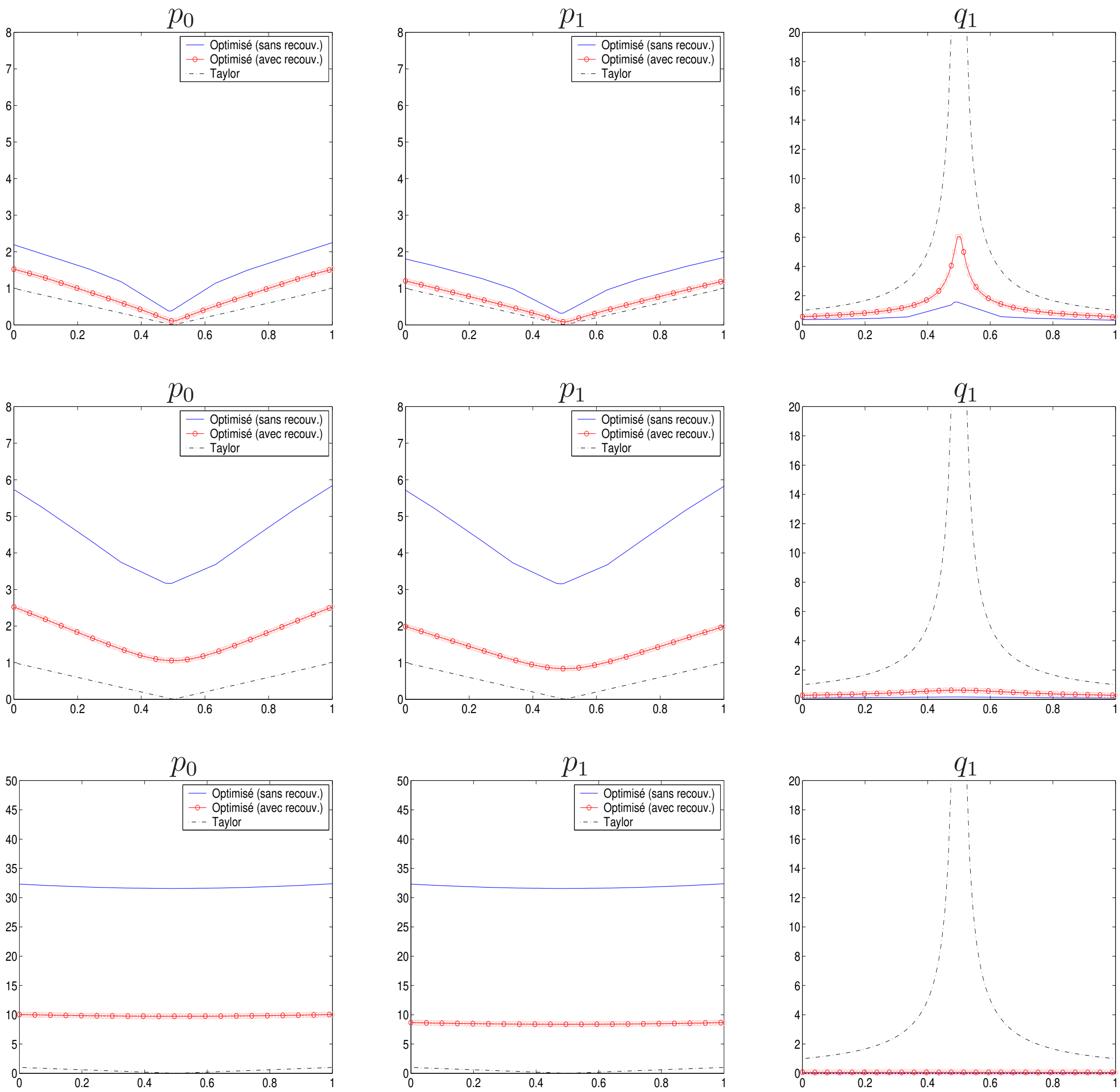


FIG. 9.15 – Vitesse tournante : valeur des paramètres optimisés et de Taylor en fonction de la variable d'interface dans le cas avec ou sans recouvrement. De haut en bas : $\nu = 0.005$, $\nu = 0.05$ et $\nu = 0.5$

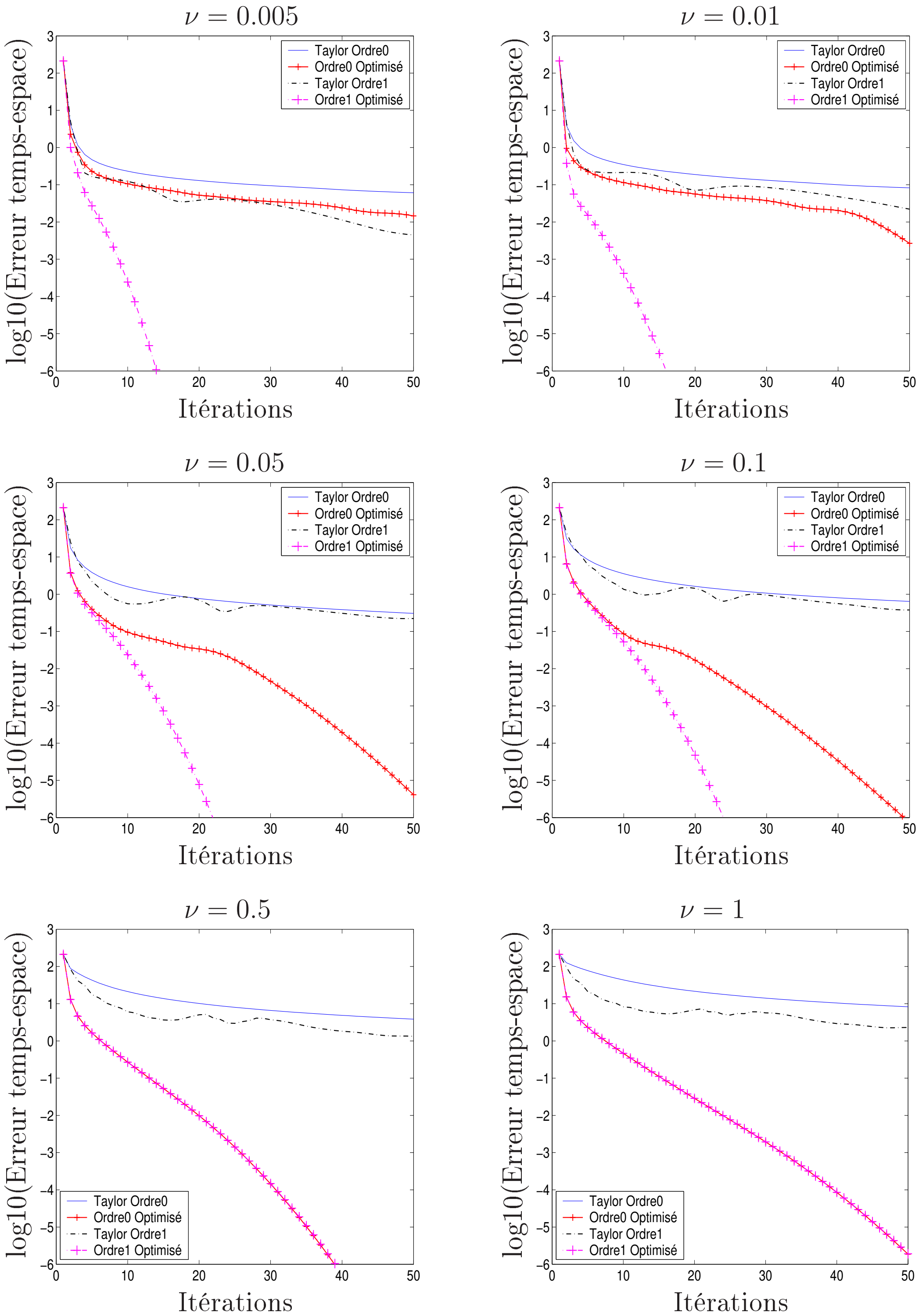


FIG. 9.16 – Vitesse tournante. $T = [0, 1]$. Cas sans recouvrement.

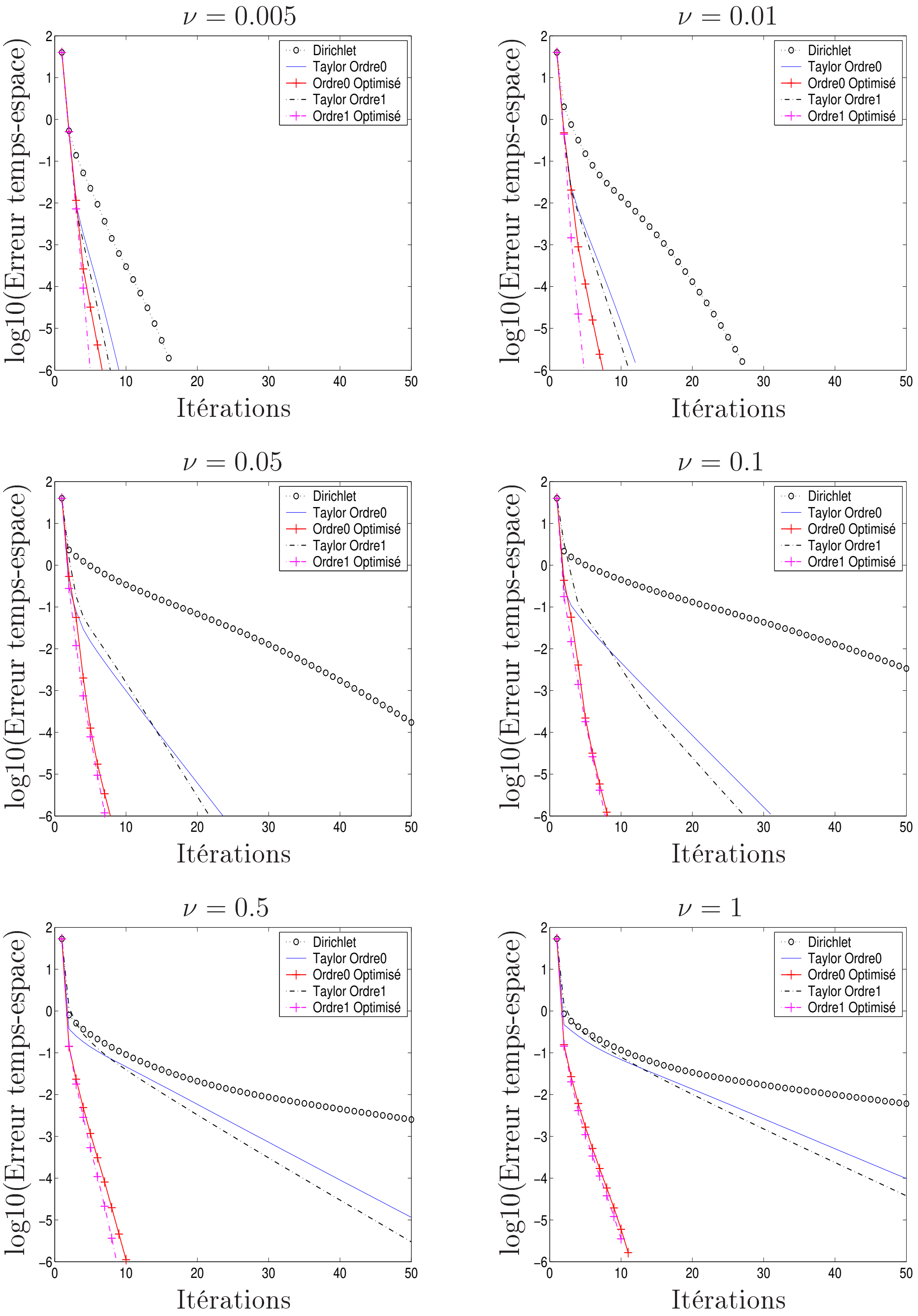


FIG. 9.17 – Vitesse tournante. $T = [0, 1]$. Cas avec recouvrement.

Comme pour la vitesse constante nous mettons en œuvre des conditions optimisées d'ordre 2 dans le cas sans recouvrement et quand la viscosité vaut $\nu = 1$ (cas où le terme d'ordre 1 tend vers 0 et la condition optimisée d'ordre 1 n'apporte rien à la convergence par rapport à l'ordre 0). Nous observons également que ces conditions améliorent nettement la vitesse de convergence.

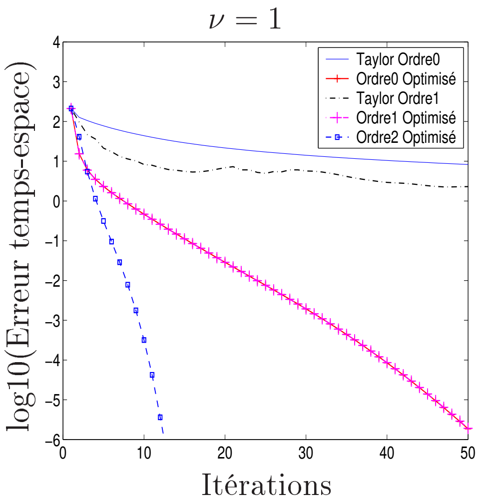


FIG. 9.18 – Vitesse tournante. $T = [0, 1]$. Cas sans recouvrement.

9.2.3 Vitesse de type recirculation

Dans cette section nous étudions le cas où la vitesse de convection vaut pour $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (voir la Figure 9.19) :

$$
\begin{aligned}
a(x, y) &= -\cos(\pi(x - 0.5)) \sin(\pi(y - 0.5)), \\
b(x, y) &= \cos(\pi(y - 0.5)) \sin(\pi(x - 0.5)).
\end{aligned}
$$

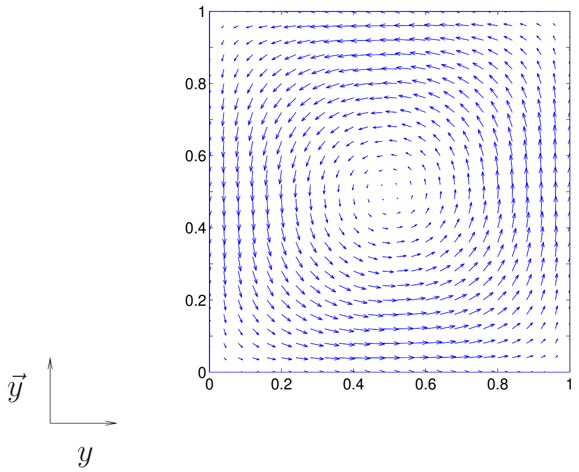


FIG. 9.19 – Représentation du champ de vitesse 'recirculation' sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$

La Figure 9.20 montre comment varient a et b, les deux composantes de la vitesse, sur l'interface.

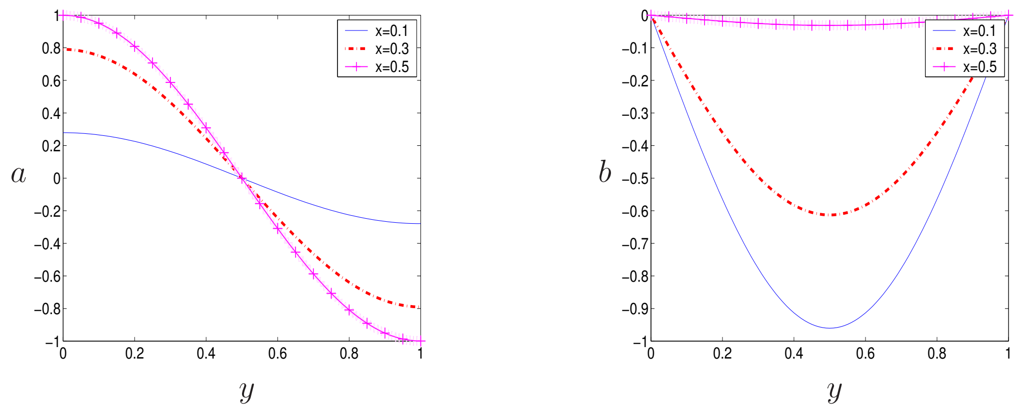


FIG. 9.20 – Composantes a et b de la vitesse sur les interfaces $x = 0.1$, $x = 0.3$ ou $x = 0.5$

La Figure 9.21 montre comment varient sur l'interface les paramètres optimisés et de Taylor p_0, p_1 et q_1 pour les viscosités $\nu = 0.005$, $\nu = 0.05$ et $\nu = 0.5$ et quand l'interface se trouve en $x = 0.5$. Nous remarquons la singularité en $y = 0.5$ du paramètre de Taylor d'ordre 1, q_1.

Dans le cas sans recouvrement (Figure 9.22 9.23 et 9.24) les commentaires sont identiques à ceux de la vitesse tournante (voir Section 9.2.2). Nous remarquons de plus que quand l'interface se trouve en $x = 0.1$ (Figure 9.24) la méthode de Taylor d'ordre 1 donne de mauvais résultats surtout quand la viscosité est grande. Ce cas correspond à une composante de la vitesse $|a|$ de faible amplitude, et nous avons vu (Fig. 9.21) qu'alors les paramètres optimisés pour $\nu = 0.5$ ou $\nu = 1$ sont très petits comparés aux paramètres de Taylor qui explosent à cause de la singularité en $y = 0.5$. Nous pouvons voir sur la Figure 9.27 les performances de la méthode optimisée d'ordre 2 qui est implémentée dans le cas $\nu = 1$ c.-à-d. quand les méthodes optimisées d'ordre 0 et 1 convergent à la même vitesse.

Dans le cas avec recouvrement (Figures 9.25, 9.26) nous remarquons que les méthodes optimisées sont toujours les plus efficaces. Pour $\nu = 1$ par exemple, il faut une dizaine d'itérations aux méthodes optimisées pour converger alors qu'il en faut plus d'une soixantaine aux méthodes de Taylor.

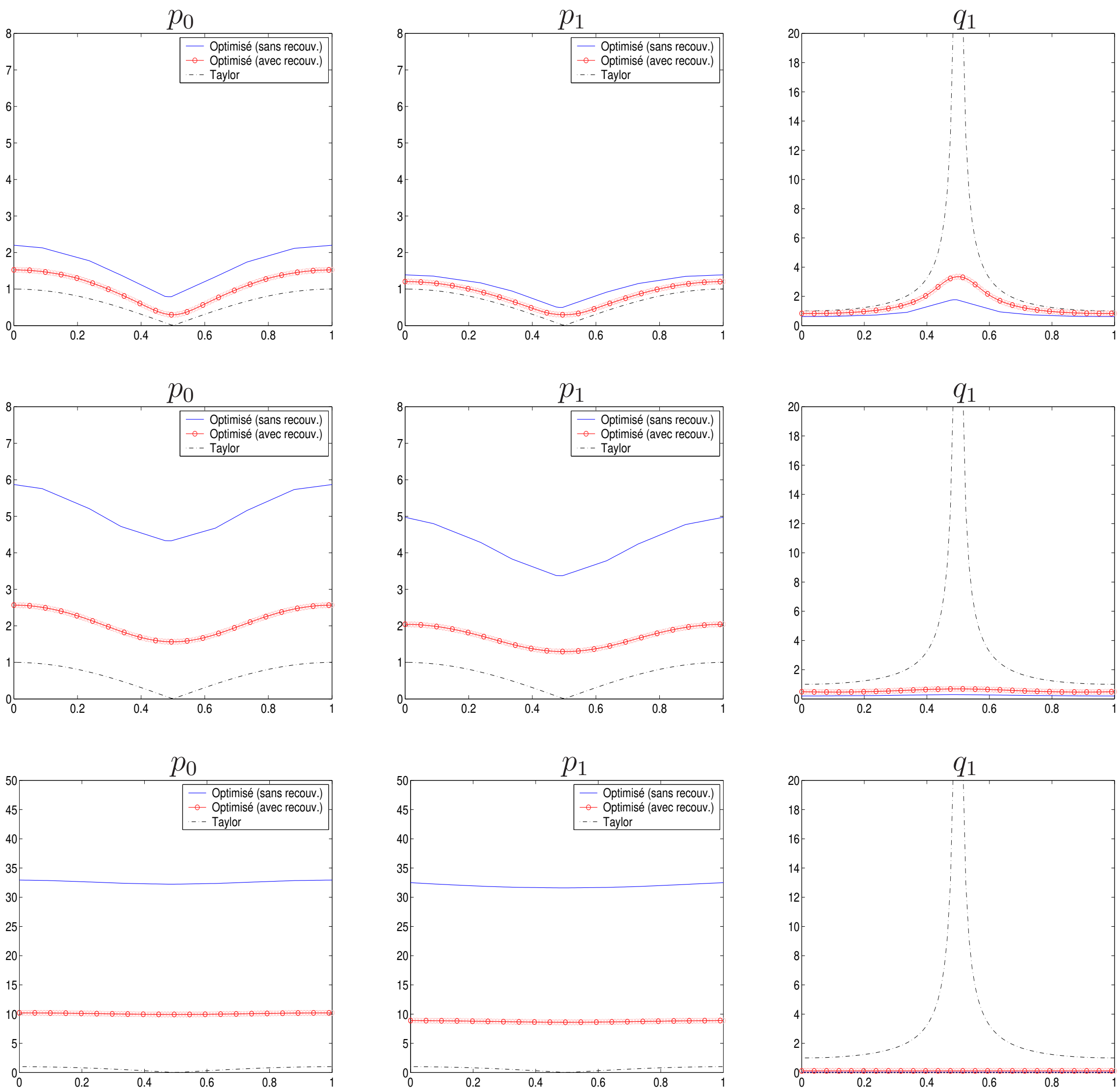


FIG. 9.21 – Vitesse recirculante : valeur des paramètres optimisés et de Taylor en fonction de la variable d'interface en $x = 0.5$. De haut en bas : $\nu = 0.005$, $\nu = 0.05$ et $\nu = 0.5$

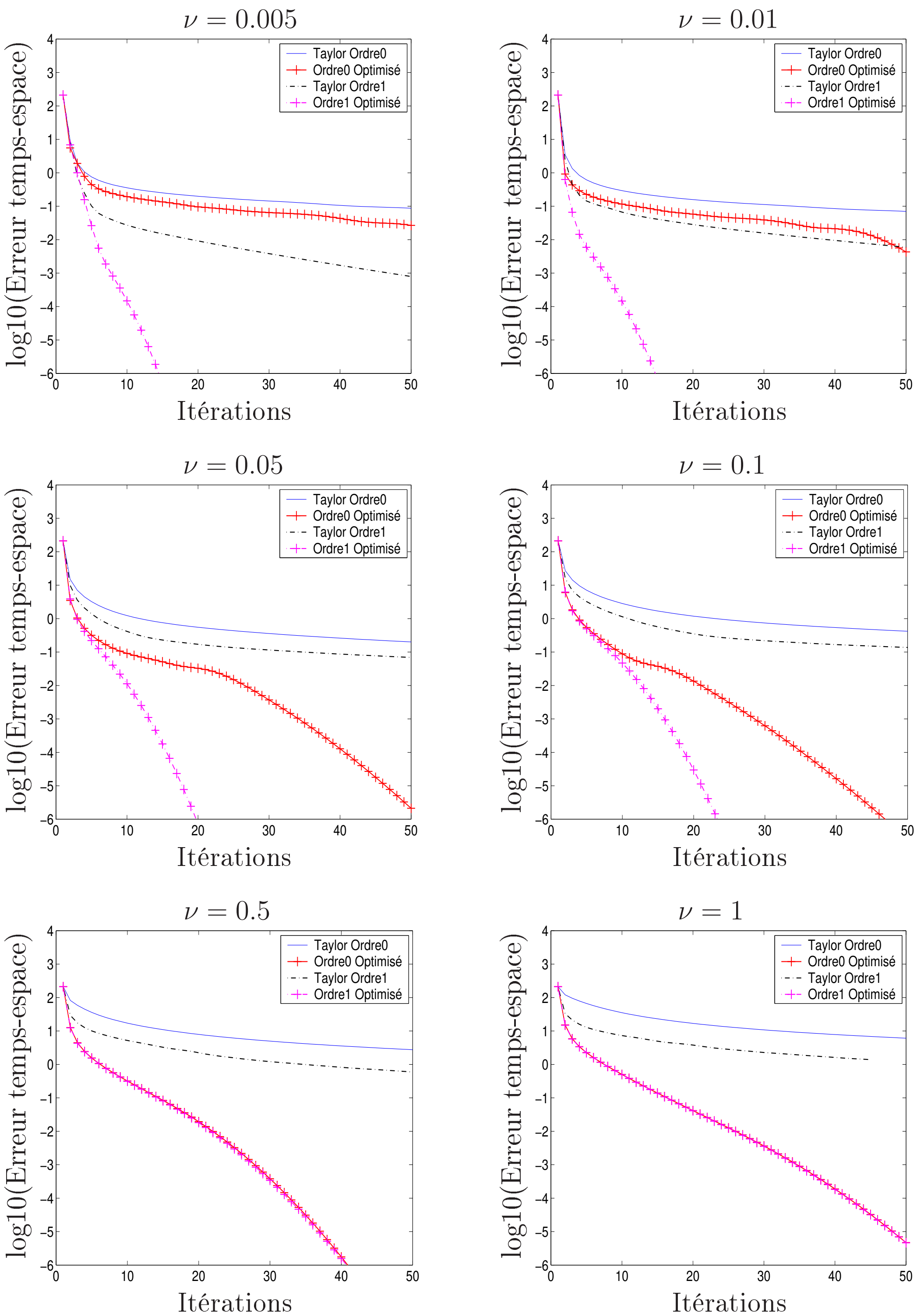


FIG. 9.22 – Vitesse recirculante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.5$. Cas sans recouvrement.

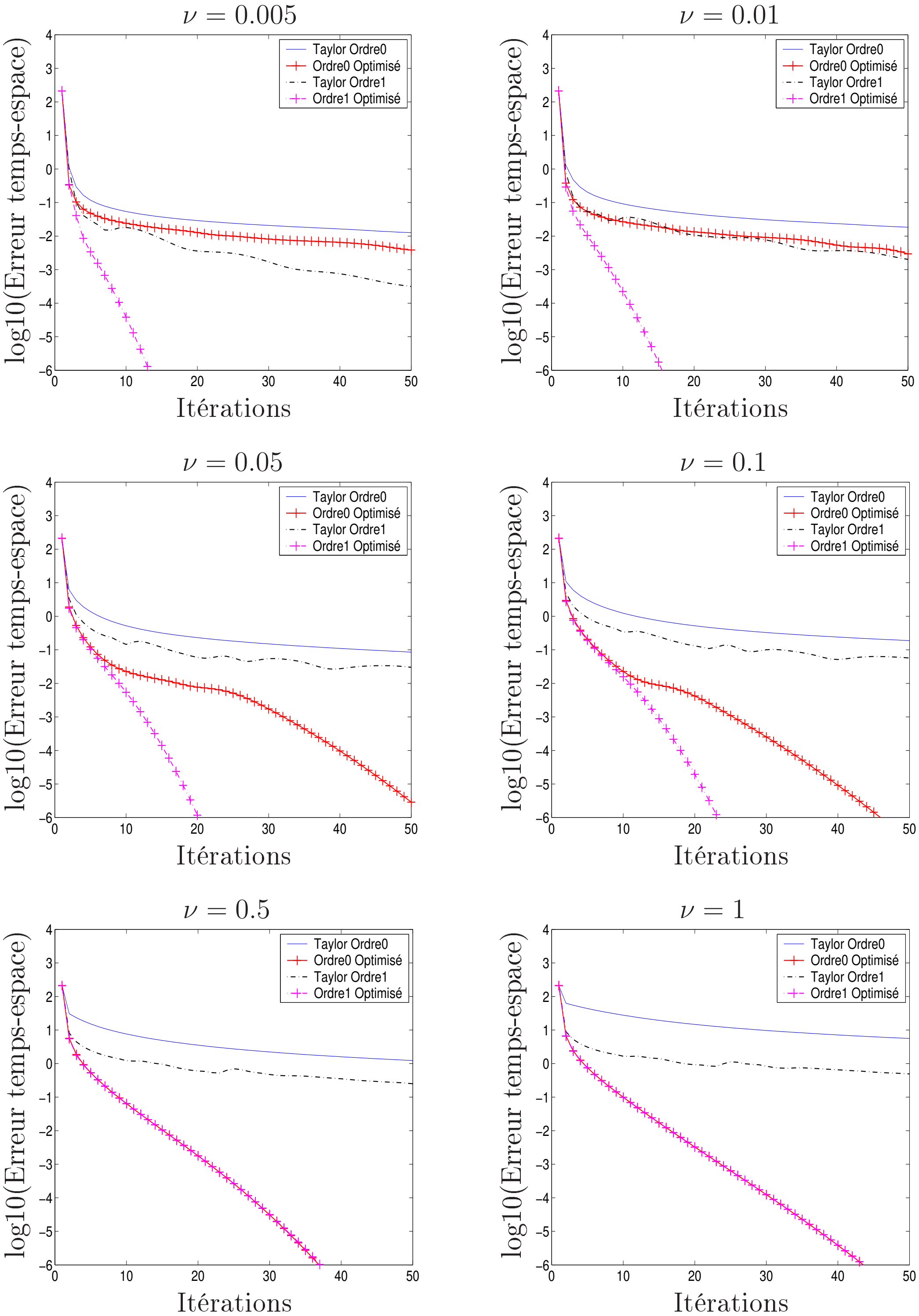


FIG. 9.23 – Vitesse recirculante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.3$. Cas sans recouvrement.

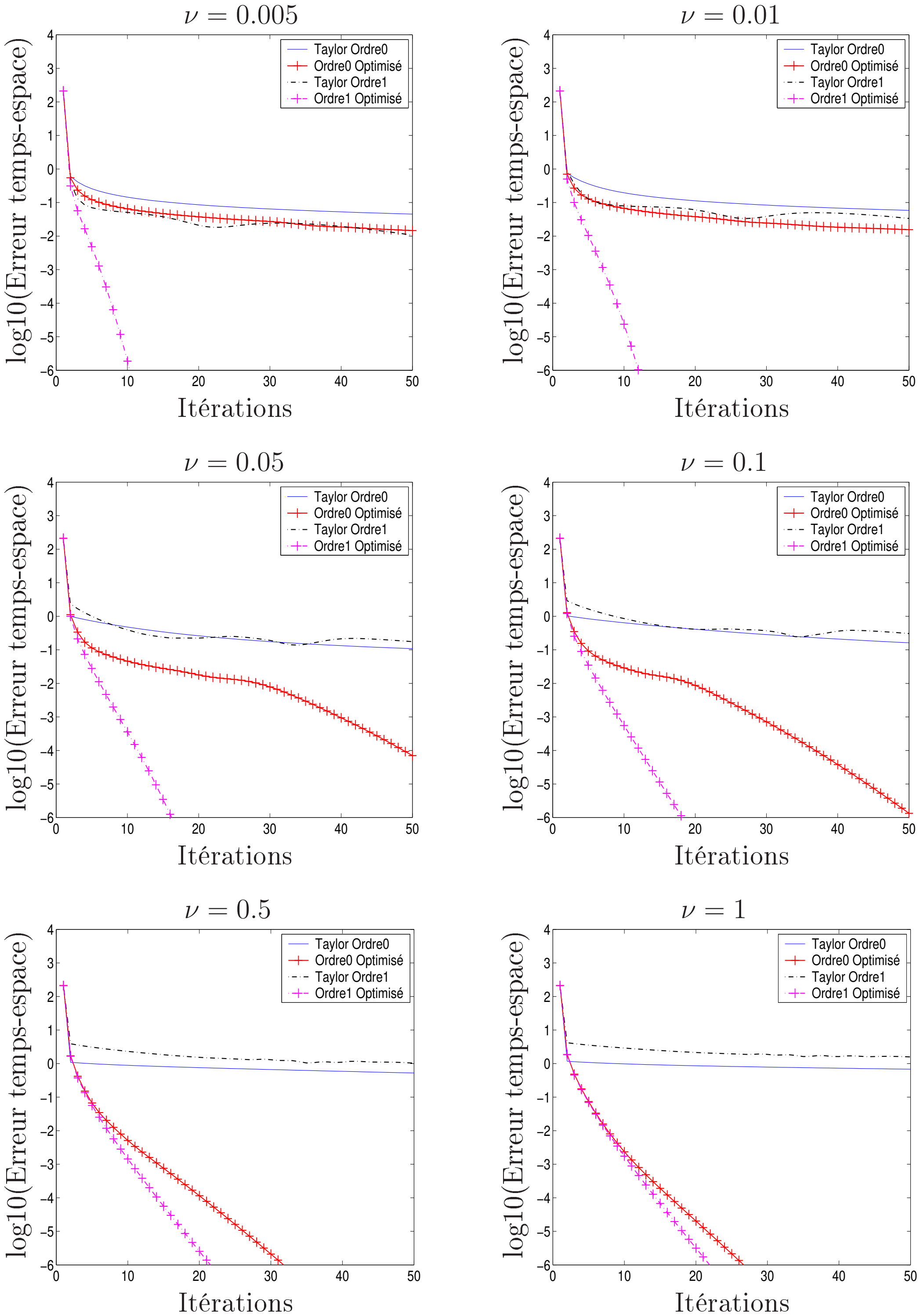


FIG. 9.24 – Vitesse recirculante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.1$. Cas sans recouvrement.

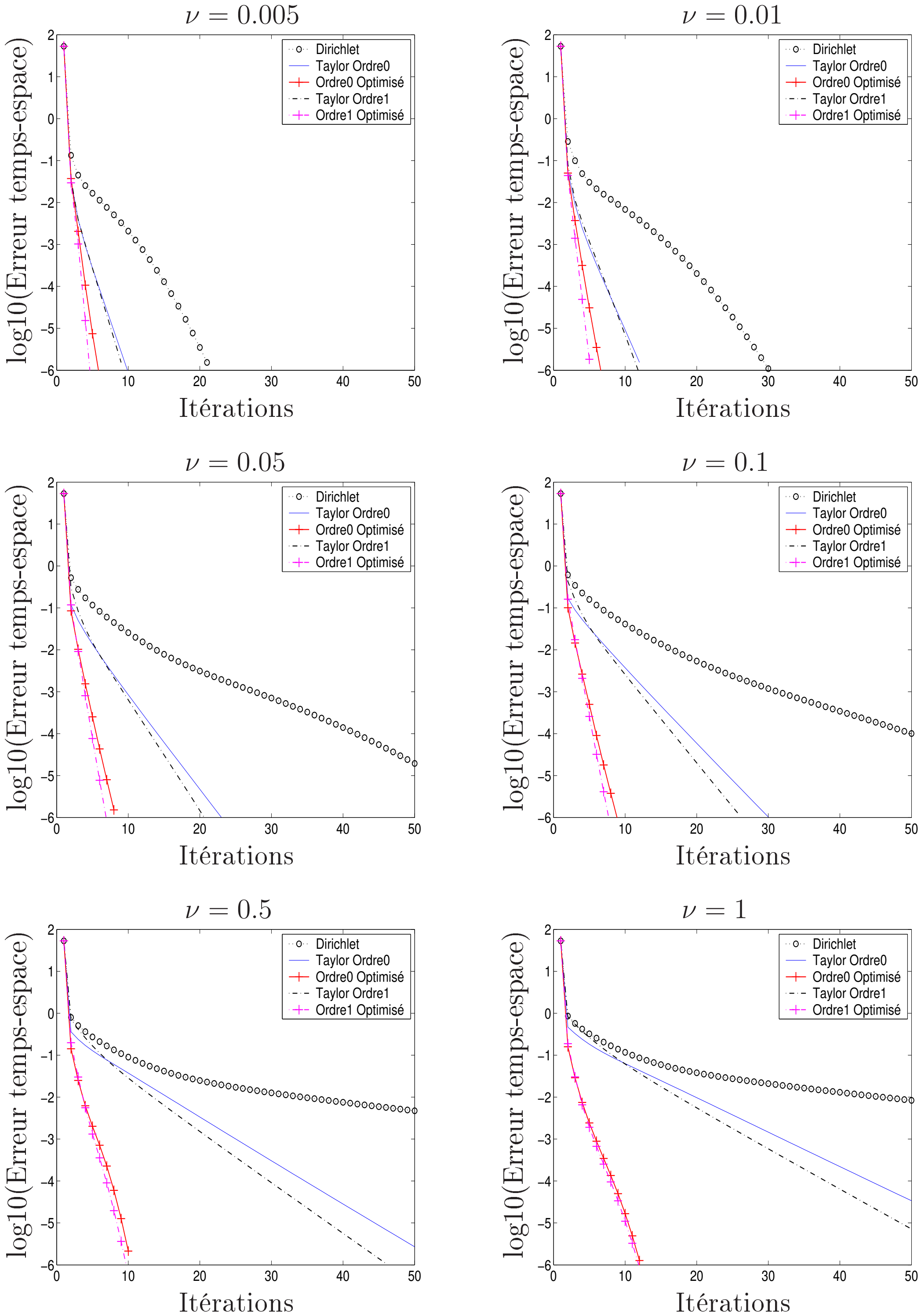


FIG. 9.25 – Vitesse recirculante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.5$. Cas avec recouvrement.

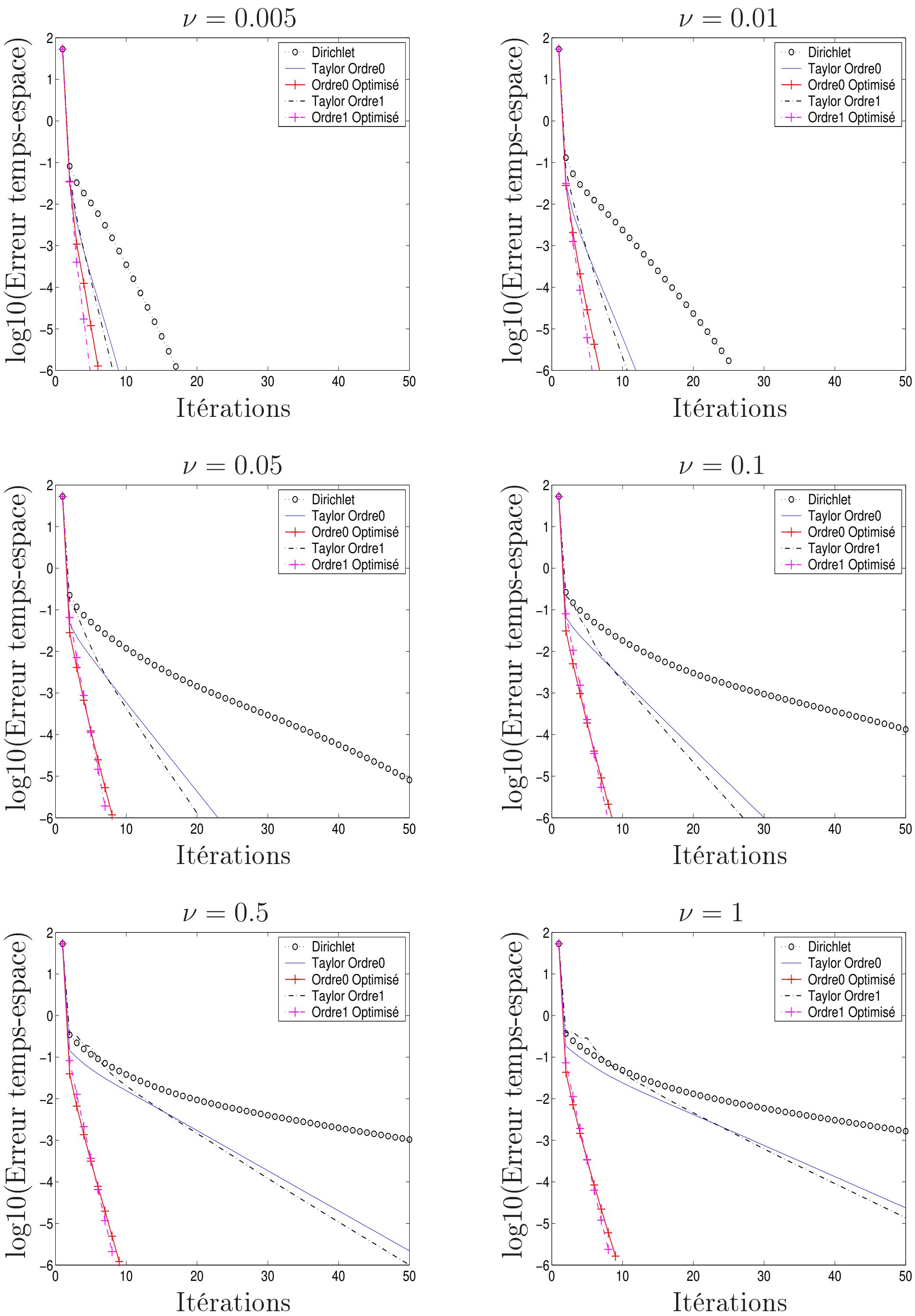


FIG. 9.26 – Vitesse recirculante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.3$. Cas avec recouvrement.

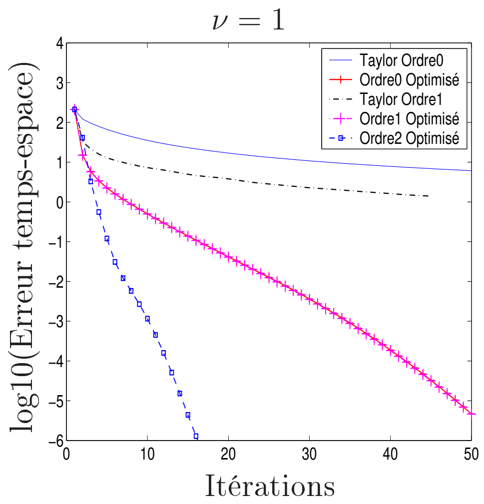


FIG. 9.27 – Vitesse recirculante. $T = [0, 1]$. $x = 0.5$. Cas sans recouvrement.

9.2.4 Vitesse de type tourbillons

Dans cette section nous étudions le cas décrit dans [43] (P.K Smolarkiewicz) et [44] (A. Staniforth, J. Cote, et J. Pudykiewicz) c.-à-d. quand la vitesse de convection vaut (voir la Figure 9.28) :

$$a(x, y) = 0.32\pi \sin(4\pi x) \sin(4\pi y),$$
$$b(x, y) = 0.32\pi \cos(4\pi y) \cos(4\pi x).$$

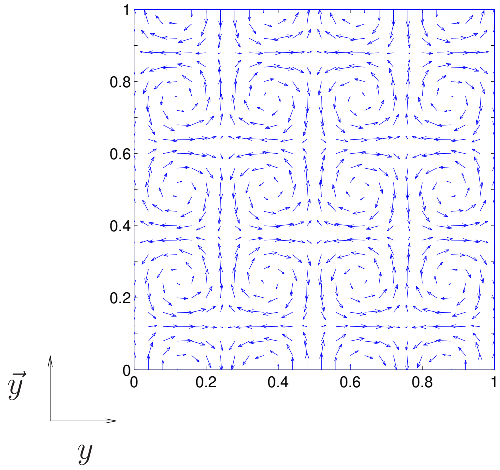


FIG. 9.28 – Représentation du champ de vitesse tourbillonnant sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$

La Figure 9.29 montre comment varient a et b, les deux composantes de la vitesse, sur l'interface.

La Figure 9.30 montre comment varient sur l'interface les paramètres optimisés et de Taylor p_0, p_1 et q_1 pour les viscosités $\nu = 0.005$, $\nu = 0.05$ et $\nu = 0.5$ et quand l'interface se trouve en $x = 0.5$. Nous remarquons que sur l'interface le paramètre de Taylor d'ordre 1, q_1, présente cinq singularités alors que les paramètres optimisés tendent vers 0 quand la viscosité grandit.

Les Figures 9.31, 9.32 et 9.33 montrent l'évolution de l'erreur dans le cas sans recouvrement quand l'interface est en $x = 0.5$, $x = 0.4$ ou $x = 0.3$. Les remarques des sections précédentes s'appliquent ici. En revanche nous voyons que la méthode de

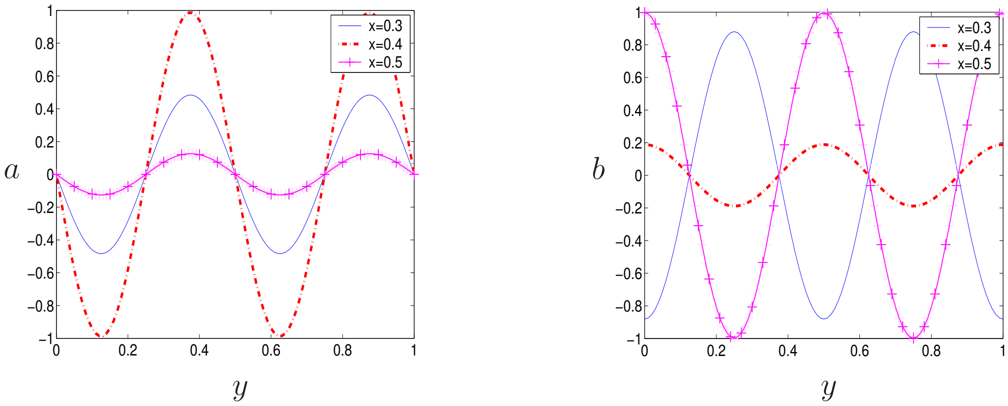


FIG. 9.29 – Composantes a et b de la vitesse de convection sur l'interface.

Taylor d'ordre 1 est peu performante, voire divergente quand la viscosité est grande. En effet la première composante de la vitesse a s'annule plusieurs fois sur l'interface (voir Figure 9.29) et dans ce cas les paramètres de Taylor deviennent infinis. Nous montrons de surcroît, dans le cas sans recouvrement, quand l'interface se trouve en $x = 0.5$ la performance de la méthode d'ordre 2 optimisée (Figure 9.37).

Les Figures 9.34, 9.35 et 9.36 montrent l'évolution de l'erreur dans le cas avec recouvrement quand l'interface est en $x = 0.5$, $x = 0.4$ ou $x = 0.3$. Nous remarquons que pour les viscosités $\nu = 0.5$ ou $\nu = 1$ le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une erreur de 10^{-6} est de 10 pour les méthodes optimisées quelle que soit la position de l'interface. En revanche les méthodes de Taylor sont lentes en $x = 0.5$ (l'ordre 1 nécessite environ 60 itérations) ; cette situation correspond au cas où la première composante de la vitesse $|a|$ est petite. Et les méthodes de Taylor sont plus rapides quand l'interface se trouve en $x = 0.4$ (l'ordre 1 nécessite une trentaine d'itérations) ; ceci correspond au cas où l'amplitude de $|a|$ est plus grande qu'en $x = 0.5$.

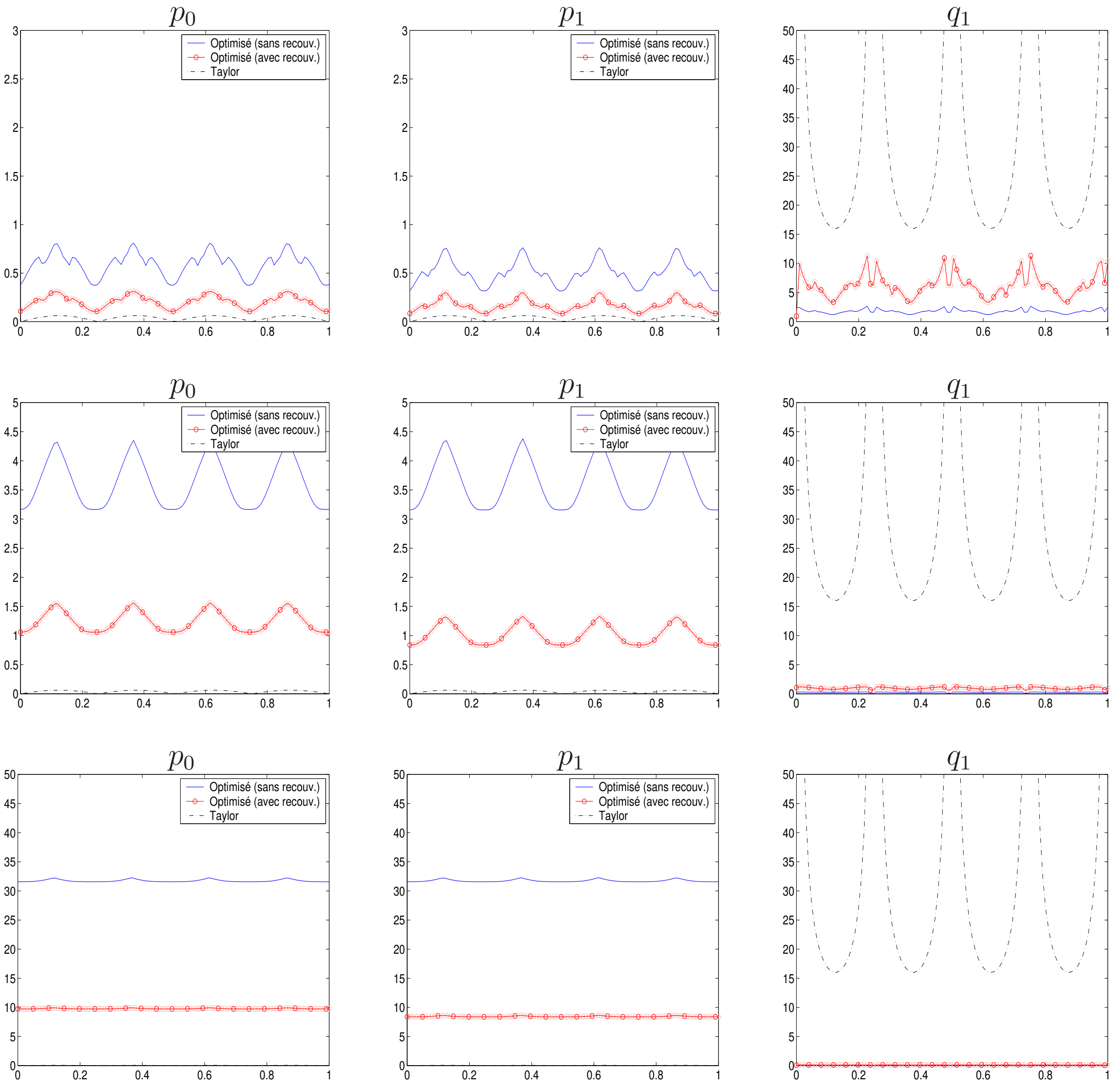


FIG. 9.30 – Vitesse tourbillonnante : valeur des paramètres optimisés et de Taylor en fonction de la variable d'interface en $x = 0.5$. De haut en bas : $\nu = 0.005$, $\nu = 0.05$ et $\nu = 0.5$

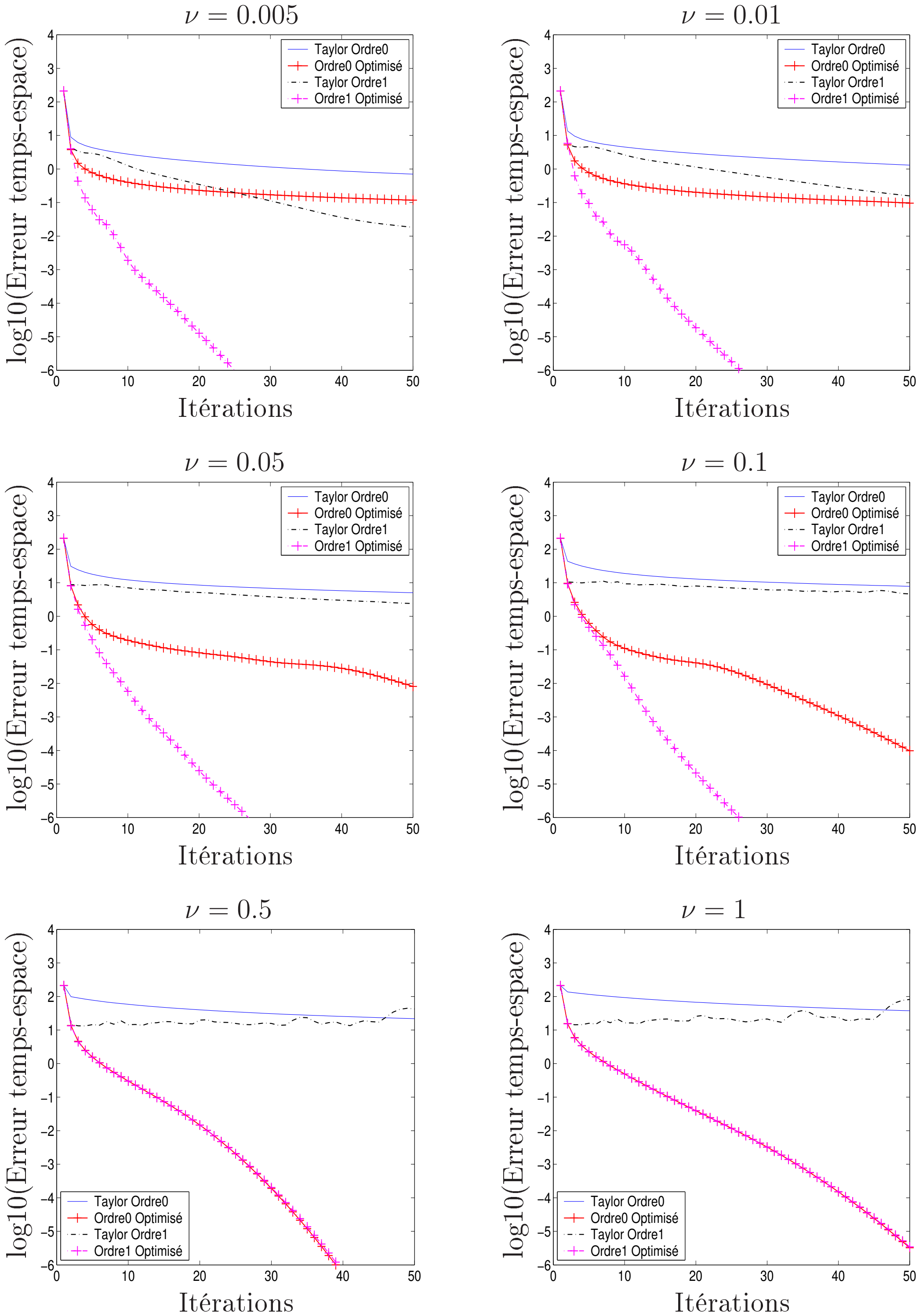


FIG. 9.31 – Vitesse tourbillonnante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.5$. Cas sans recouvrement.

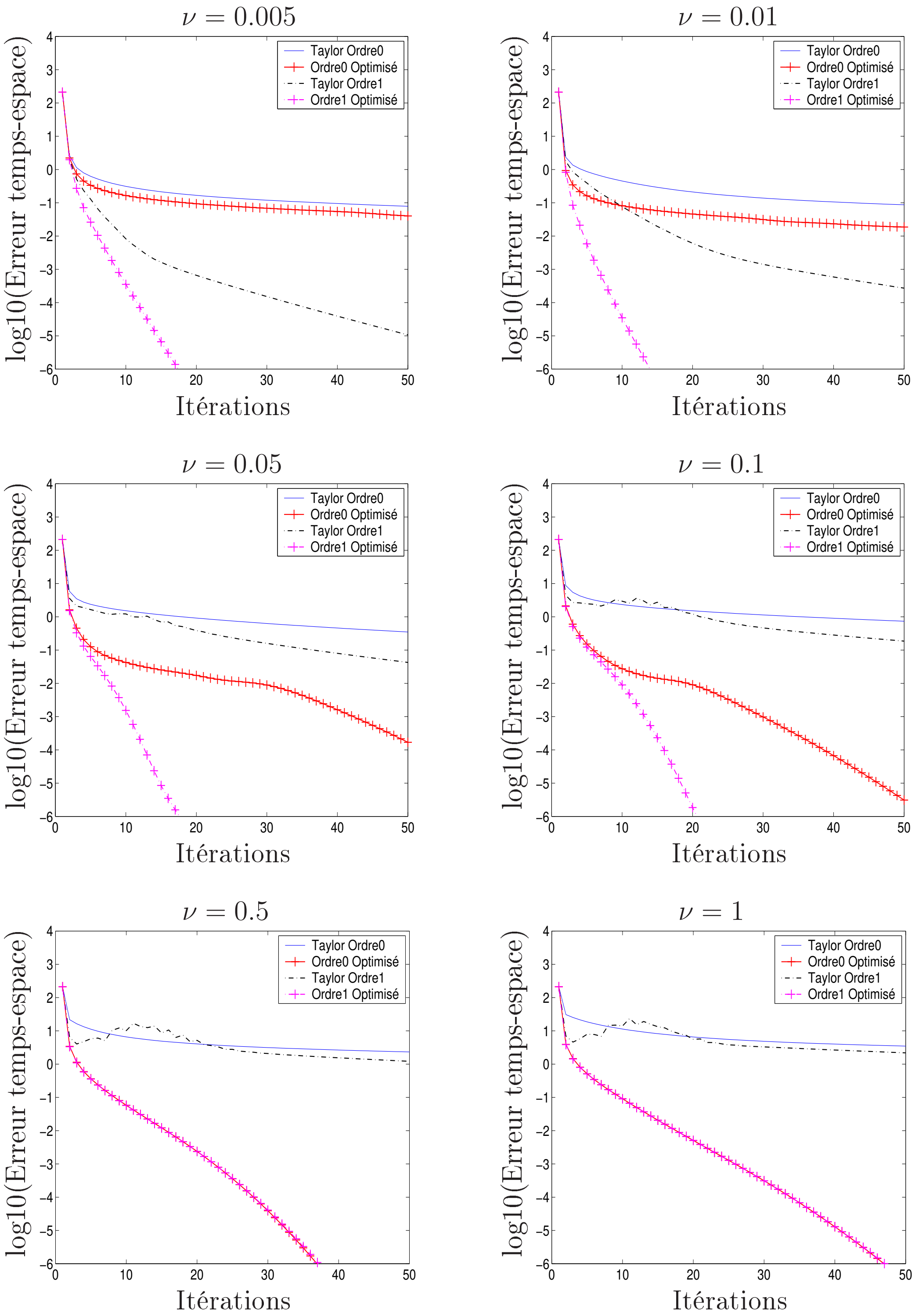


FIG. 9.32 – Vitesse tourbillonnante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.4$. Cas sans recouvrement.

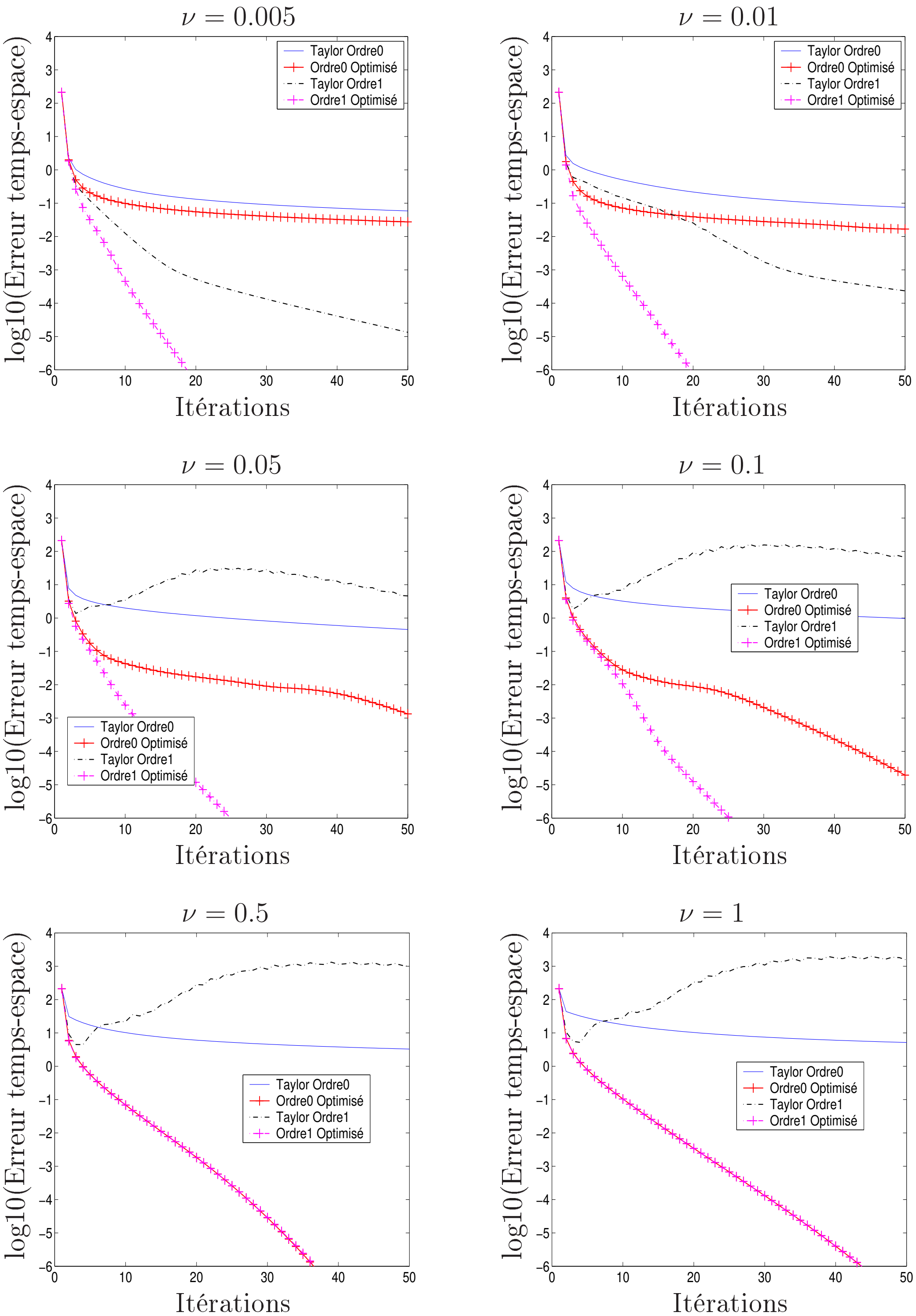


FIG. 9.33 – Vitesse tourbillonnante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.3$. Cas sans recouvrement.

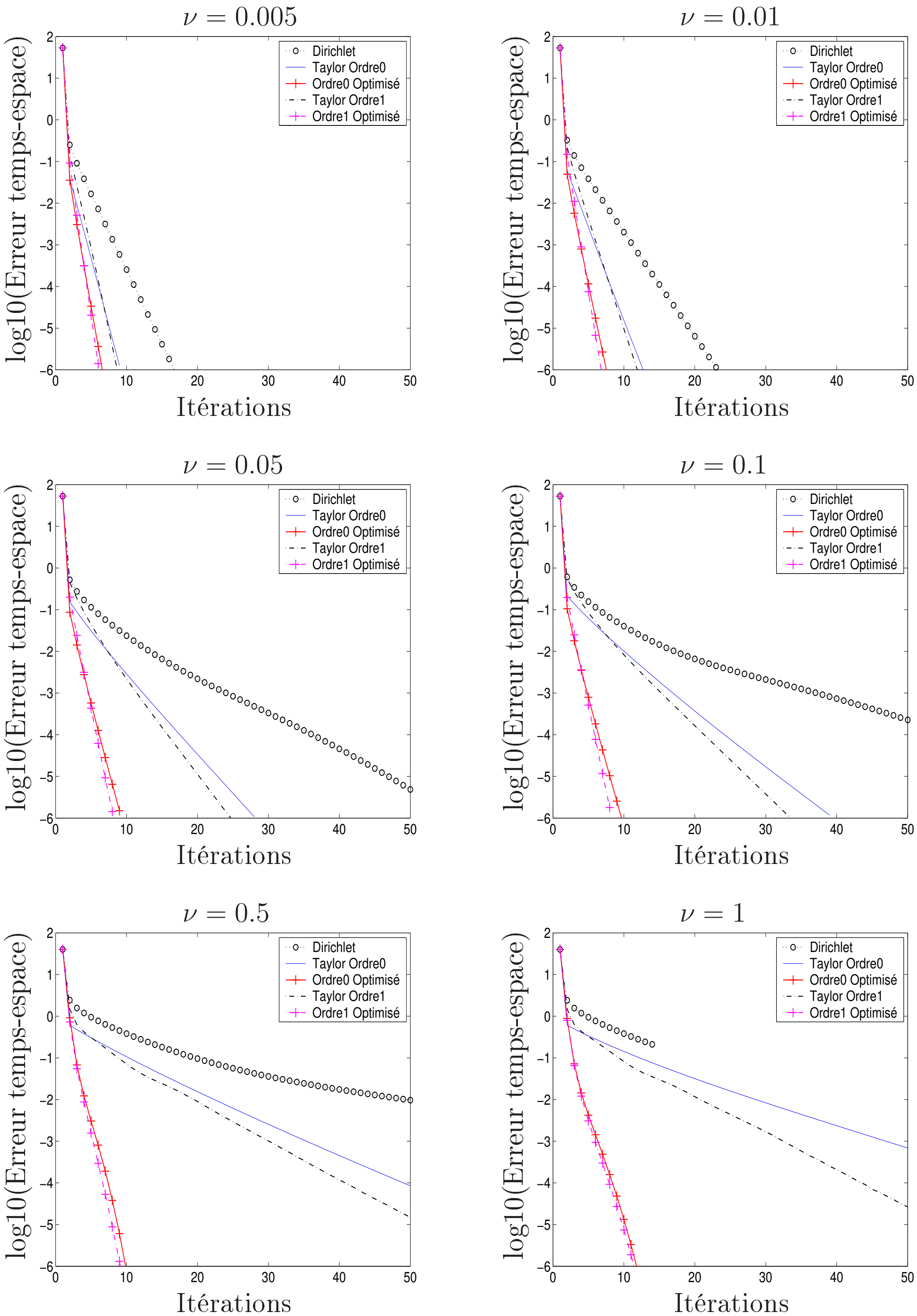


FIG. 9.34 – Vitesse tourbillonnante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.5$. Cas avec recouvrement.

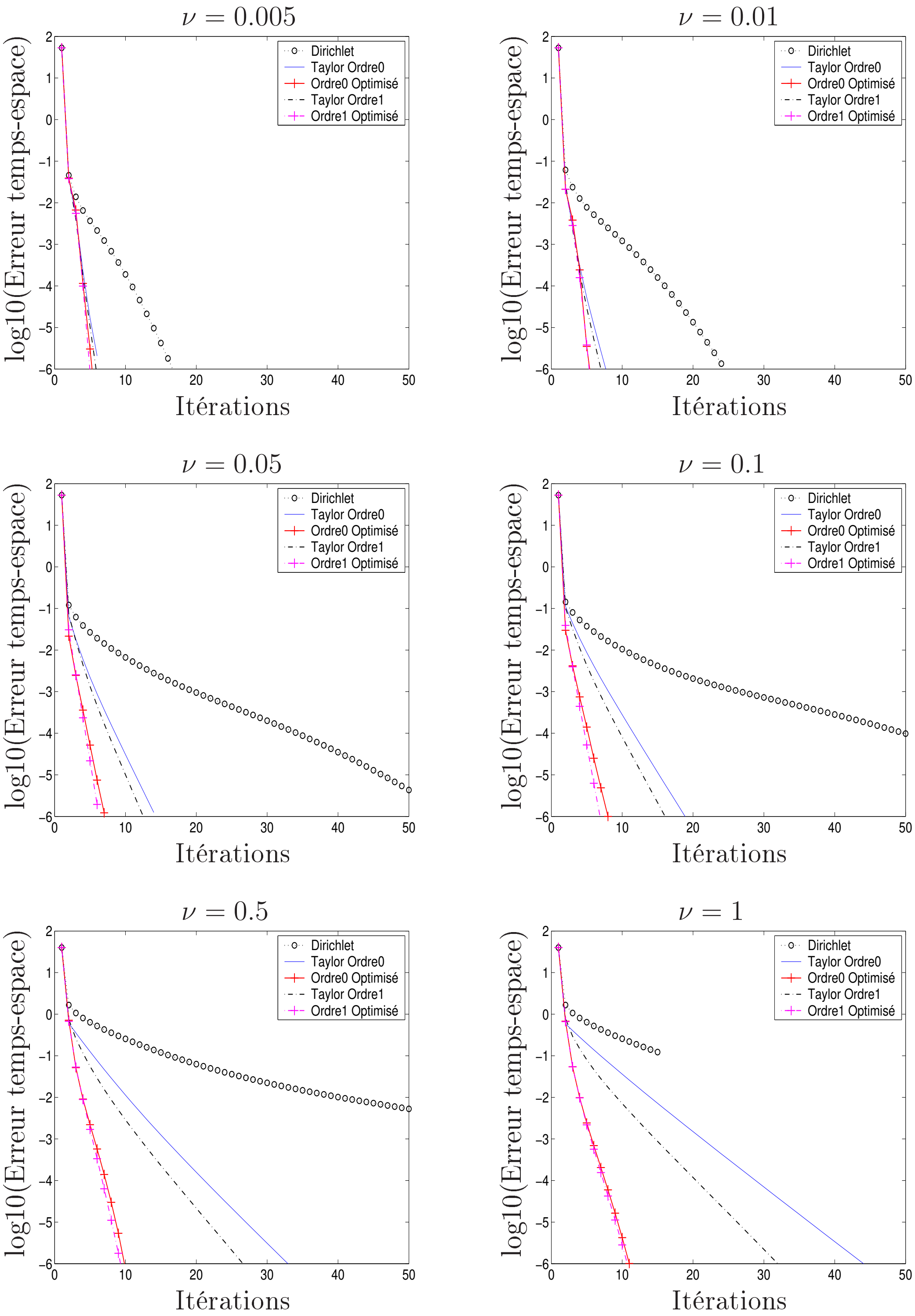


FIG. 9.35 – Vitesse tourbillonnante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.4$. Cas avec recouvrement.

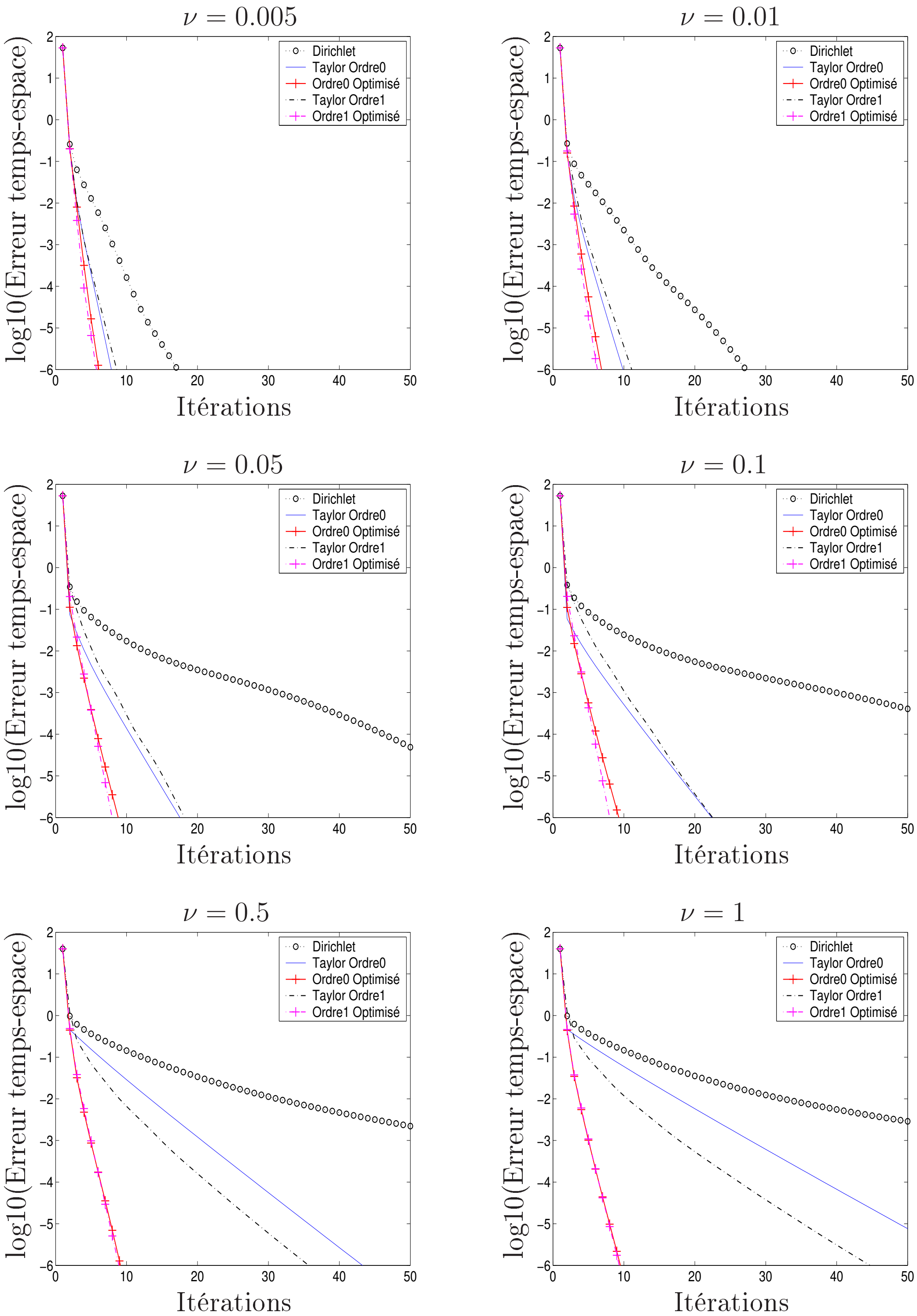


FIG. 9.36 – Vitesse tourbillonnante. $T = [0, 1]$. Interface en $x = 0.3$. Cas avec recouvrement.

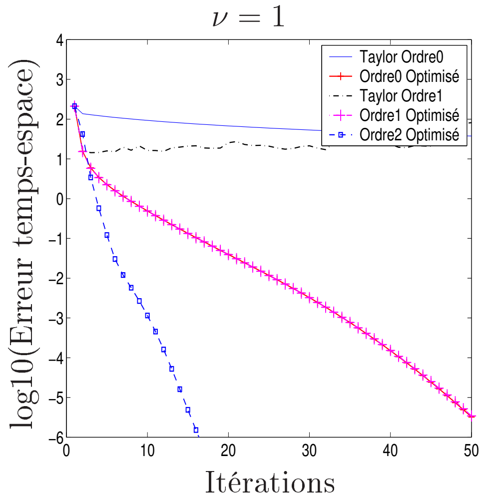


FIG. 9.37 – Vitesse tourbillonnante. $T = [0, 1]$. $x = 0.5$. Cas sans recouvrement.

9.3 Influence du pas de maillage et du pas de temps

Dans la section précédente nous avons regardé l'influence de la vitesse de convection et de la viscosité sur la vitesse de convergence des différents algorithmes de décomposition de domaine présentés dans cette thèse. Ces résultats ont été obtenus à pas de maillage en espace et en temps fixes ($\Delta x = \Delta t = 0.01$). Nous regardons dans cette section l'influence de Δx et Δt sur la convergence des algorithmes. La Figure 9.38 montre le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une erreur de 10^{-6} dans le cas de la vitesse recirculante définie à la Section 9.2.3 et quand la frontière se trouve en $x = 0.5$ avec une maille de recouvrement.

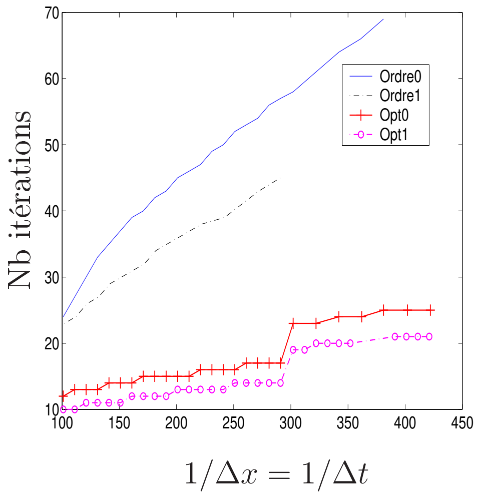


FIG. 9.38 – Nombre d'itérations nécessaire pour arriver à convergence (10^{-6}) en fonction du pas de maillage

Nous observons d'une part que pour chaque pas de maillage les méthodes optimisées restent les plus performantes. D'autre part, il apparaît que quand on raffine le maillage, le nombre d'itérations nécessaire aux méthodes optimisées pour converger augmente peu contrairement aux méthodes de Taylor : pour l'ordre 0 par exemple, la méthode optimisée nécessite 24-12=12 itérations supplémentaires pour passer d'un pas de maillage de 1/100 à 1/350 alors qu'il en faut 64-24=40 pour Taylor.

Chapitre 10

Couplage de l'équation de convection-diffusion et de l'équation de convection

Pour simuler numériquement un phénomène physique complexe, il peut être utile d'adapter l'équation à la région géographique. En océanographie, par exemple, les équations de base qui permettent de simuler le mouvement de l'océan sont les équations de Navier Stokes en milieu tournant. Mais il est intéressant d'une part de simplifier cette équation dans le but de gagner du temps de calcul dans les régions peu perturbées ou à la physique particulière (les équations de Saint Venant est une moyenne verticale de l'équation de Navier Stokes faite quand la profondeur de l'eau est faible). D'autre part on peut adapter le modèle et mettant en avant un phénomène prépondérant dans la région considérée (phénomène de couche limites ...).

Suivant le principe des méthodes de décomposition de domaine, le couplage de modèles consiste à partager le domaine de calcul en deux sous-domaines, par exemple, et à résoudre une équation sur le premier sous-domaine tandis que sur l'autre nous résolvons une deuxième équation. La difficulté réside alors dans l'écriture des conditions d'interface.

Dans ce chapitre nous traitons le problème modèle du couplage entre l'équation de convection-diffusion et l'équation de convection.

Nous généralisons ici aux problèmes d'évolution le couplage introduit dans [15] par M.J. Gander, L. Halpern et C. Japhet. Le problème initial est celui que nous avons traité dans les chapitres précédents : nous souhaitons résoudre l'équation de convection-diffusion (1.2). Mais cette fois nous considérons que la viscosité est petite et même négligeable dans la moitié du domaine. Nous décomposons alors Ω en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+. Sur Ω^- la viscosité est faible, nous résolvons l'équation de convection-diffusion. Sur le domaine Ω^+, la viscosité est négligeable, nous résolvons l'équation de convection dont nous introduisons l'opérateur :

$$\mathcal{L}_C \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla + c.$$

Pour des raisons de clarté, l'opérateur de convection-diffusion sera à présent noté $\mathcal{L}_{CD}$.

Dans la Section 10.1, nous définissons la notion de couplage de ces deux modèles, puis dans la Section 10.2 nous proposons un algorithme. Nous donnons enfin dans la Section 10.3 des résultats numériques.

10.1 Définition du couplage

Dans cette section nous définissons la notion de couplage entre l'équation de convection-diffusion et l'équation de convection. Ceci revient à définir des conditions que la solution doit vérifier au niveau de l'interface. En l'occurrence nous souhaitons ici que la solution du couplage vérifie les mêmes propriétés que la solution de l'équation globale (équation de convection diffusion). Ce sont ces propriétés que nous allons expliciter dans un premier temps.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, que nous décomposons en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+ qui ne se recouvrent pas. La frontière commune est notée Γ et $\vec{n}$ désigne la normale sortante à Ω^- (voir la Figure 10.1).

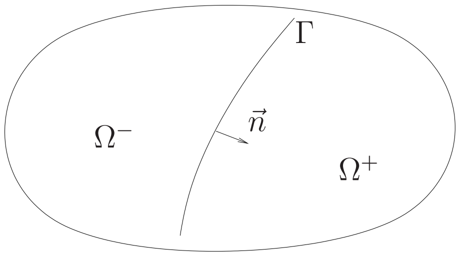


Fig. 10.1 – Décomposition du domaine Ω

Si $[v]_\Gamma$ désigne le saut de v à l'interface Γ, et w la solution de l'équation de convection-diffusion dans Ω nous pouvons montrer que :

$$\begin{cases} [w] = 0, \\ \left[\dfrac{\partial w}{\partial n}\right] = 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

Ainsi w, la solution de l'équation de convection-diffusion sur $\Omega\times]0,+\infty[$, vérifie au travers de toute interface la continuité de w et de son flux.

Nous pouvons à présent définir une notion de couplage entre l'équation de convection-diffusion et l'équation de convection (voir [21] (F. Gastaldi, A. Quarteroni et G. Sacchi Landriani) pour une autre définition). Nous résolvons l'équation de convection-diffusion dans Ω^- et l'équation de convection dans Ω^+. Et nous souhaitons que la solution de ce couplage soit compatible avec la solution de l'équation de convection-diffusion sur le domaine entier, c.-à-d. nous imposons (10.1).
Nous cherchons donc à résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CD}u & = & f & \text{dans } \Omega^-\times]0,T[, \\ u(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{C}v & = & f & \text{dans } \Omega^+\times]0,T[, \\ v(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^+, \end{cases} \tag{10.2}$$

avec u et v vérifiant à l'interface :

$$\begin{cases} u = v, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n}. \end{cases} \tag{10.3}$$

Dans la section suivante nous proposons un algorithme qui converge vers la solution de ce problème.

10.2 Ecriture des conditions de transmission exactes

Comme nous l'avons fait dans le cadre de la décomposition de domaine (Chapitre 3), nous travaillons sur l'espace $\mathbb{R}^2$ que nous décomposons en deux demi-plans (Fig. 10.2), puis nous écrivons un algorithme qui converge en deux itérations.

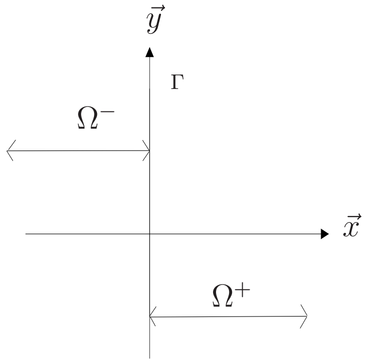


FIG. 10.2 – Décomposition du domaine $\mathbb{R}^2$

Puisque l'opérateur de convection est un opérateur de transport, le nombre de conditions aux limites à imposer dans le domaine Ω^- diffère selon le signe de la vitesse de convection sur l'interface. Nous détaillons alors différents cas : celui où la vitesse de convection est entrante dans Ω^+ ; celui où elle est sortante ; enfin nous considérons le cas où la vitesse est tournante.

10.2.1 Cas de la vitesse sortante vers Ω^+

Dans le cas où $\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{n} = a > 0$ sur Γ, l'équation de convection dans Ω^- nécessite une condition aux limites sur Γ. Nous proposons l'algorithme de couplage suivant :

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}_{CD} u^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^- \times]0, +\infty[, \\
u^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}^{k+1} - \mathcal{S}^- u^{k+1} & = \dfrac{\partial v}{\partial x}^{k} - \mathcal{S}^- v^k & \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[,
\end{cases}
$$
$$
\begin{cases}
\mathcal{L}_{C} v^{k+1} & = f & \text{dans } \Omega^+ \times]0, +\infty[, \\
v^{k+1}(\cdot, \cdot, 0) & = w_0 & \text{dans } \Omega^+, \\
\dfrac{\partial v}{\partial x}^{k+1} - \mathcal{S}^+ v^{k+1} & = \dfrac{\partial u}{\partial x}^{k} - \mathcal{S}^+ u^k & \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[.
\end{cases}
\tag{10.4}
$$

Comme pour la décomposition de domaine (Chap. 3), nous cherchons les opérateurs $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ qui mènent à convergence en deux itérations.

Théorème 10.2.1 *Soient $\vec{\mathbf{b}}$, ν et c des coefficients constants. L'algorithme (10.4) converge en deux itérations vers la solution de (10.2) si les symboles de $\mathcal{S}^-$ et $\mathcal{S}^+$ sont respectivement :*

$$
\sigma^-_{conv} = -i\frac{\omega + bk}{a} - \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \sigma^+ = \frac{1}{2\nu}\big(a + \delta^{1/2}\big), \tag{10.5}
$$

avec $\delta^{1/2}$ donné par (2.15).
De plus, les relations de continuité (10.3) sont vérifiées à convergence sur Γ.

PREUVE : Nous introduisons e_u^k et e_v^k les erreurs respectives dans Ω^- et Ω^+ à l'étape k de l'algorithme (10.4). Nous avons $e_u^k(\cdot,\cdot,0) = 0$ et $e_v^k(\cdot,\cdot,0) = 0$ et nous prolongeons e_u^k et e_v^k par 0 sur les valeurs négatives de t (nous notons e_u^k et e_v^k ces prolongements). La solution e_u^k vérifie l'équation de convection-diffusion homogène sur $\Omega^- \times \mathbb{R}$ et e_v^k vérifie l'équation de convection homogène sur $\Omega^+ \times \mathbb{R}$. Nous appliquons alors la transformée de Fourier en temps et en espace tangentielle, (c.-à-d. en t et y) aux équations $\mathcal{L}_{CD}\mathsf{e}_u = 0$ dans $]-\infty, 0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}_C\mathsf{e}_v = 0$ dans $]-\infty, 0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CD}\hat{\mathsf{e}}_u^k &= 0 \text{ avec } (x,k,\omega) \in]-\infty, 0[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_C\hat{\mathsf{e}}_v^k &= 0 \text{ avec } (x,k,\omega) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}_{CD} = -\nu\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial}{\partial x} + \big(i(\omega + bk) + c + \nu k^2\big)$ et $\mathcal{L}_C = a\dfrac{\partial}{\partial x} + (i(\omega + bk) + c)$.
Ainsi $\hat{\mathsf{e}}_u^k$ et $\hat{\mathsf{e}}_v^k$ sont solutions d'équations différentielles ordinaires que nous résolvons :

$$\begin{cases} \hat{\mathsf{e}}_u^k(x,k,\omega) = \alpha^k(k,\omega)e^{\sigma^+ x}, \\ \hat{\mathsf{e}}_v^k(x,k,\omega) = \beta^k(k,\omega)e^{\sigma^-_{\text{conv}} x}, \end{cases} \tag{10.6}$$

avec σ^+ et σ^-_{conv} définis en (10.5). (On pourra se reporter au Chapitre 2 pour le détail de ces calculs).

Ainsi les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\hat{\mathsf{e}}_u^k}{\partial x} - \sigma^+\hat{\mathsf{e}}_u^k = 0, \\ \dfrac{\partial\hat{\mathsf{e}}_v^k}{\partial x} - \sigma^-_{\text{conv}}\hat{\mathsf{e}}_v^k = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si les symboles de $\mathcal{S}^-$ et $\mathcal{S}^+$ sont donnés par (10.5), l'erreur à l'étape k dans chaque sous-domaine est solution d'une équation homogène avec une condition initiale nulle et une condition aux limites homogène sur Γ. Par suite, dès $k = 2$ l'erreur est nulle et l'algorithme a convergé.
Par ailleurs, si nous notons (u, v) la limite de la suite (u^k, v^k) nous avons sur $\Gamma\times]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \mathcal{S}^+ v = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}^+ u, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \mathcal{S}^- u = \frac{\partial v}{\partial x} - \mathcal{S}^- v, \end{aligned}$$

c.-à-d. deux combinaisons linéaires différentes de la solution et de son flux sont continues à l'interface. Ceci nous assure alors que la propriété (10.3) est vérifiée. $\square$

L'opérateur $\mathcal{S}^+$ sera approché par un opérateur différentiel comme aux Chapitres 4 et 5. Par ailleurs, nous remarquons que σ^-_{conv} est un polynôme en k et ω, ce qui signifie que $\mathcal{S}^-$ est un opérateur différentiel. Ainsi contrairement à l'opérateur $\mathcal{S}^+$ nous pouvons expliciter l'opérateur $\mathcal{S}^-$:

$$\mathcal{S}^- = -\frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{c}{a}. \tag{10.7}$$

Ainsi, dans le cas où les coefficients des équations traitées sont constants, l'algorithme peut être mis en œuvre avec une condition de transmission exacte et par conséquent l'algorithme (10.4) converge en deux itérations.

10.2.2 Cas de la vitesse entrante dans Ω^-

Dans le cas où $\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{n} = a < 0$ sur Γ, l'équation de convection ne nécessite pas de condition aux limites.
Nous imposerons alors à l'équation de convection-diffusion une condition de Dirichlet pour nous assurer un minimum de continuité. Il n'y a plus d'algorithme, nous résolvons alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_C v &= f & \text{dans } \Omega^+\times]0,+\infty[, \\ v(\cdot,\cdot,0) &= w_0 & \text{dans } \Omega^+, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{CD} u &= f & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[, \\ u(\cdot,\cdot,0) &= w_0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u &= v & \text{sur } \Gamma\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{10.8}$$

10.2.3 Cas de la vitesse tournante

Ici nous étudions le cas d'une vitesse qui n'est plus ni purement sortante, ni purement entrante. Nous introduisons :

$$\Gamma_{\text{out}} = \{x \in \Gamma, \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{n} > 0\},$$
$$\Gamma_{\text{in}} = \{x \in \Gamma, \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{n} < 0\},$$

où $\vec{n}$ est la normale sortante de Ω^- et où l'on a $\overline{\Gamma}_{\text{out}} \cup \overline{\Gamma}_{\text{in}} = \overline{\Gamma}$ et $\Gamma_{\text{out}} \cap \Gamma_{\text{in}} = \emptyset$. Nous nous inspirons de l'algorithme (10.4) que nous appliquons au cas où la vitesse de convection n'est pas nécessairement constante et de l'algorithme (10.8). Nous proposons alors l'algorithme suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll}\mathcal{L}_{CD}u^{k+1} & = & f & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[\\ u^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^-\times]0,+\infty[,\\ \dfrac{\partial u^{k+1}}{\partial x}-\mathcal{S}^-u^{k+1} & = & \dfrac{\partial v^k}{\partial x}-\mathcal{S}^-v^k & \text{sur } \Gamma_{\text{out}}\times]0,+\infty[,\\ u^{k+1} & = & v^k & \text{sur } \Gamma_{\text{in}}\times]0,+\infty[,\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll}\mathcal{L}_{C}v^{k+1} & = & f & \text{dans } \Omega^+,\\ v^{k+1}(\cdot,\cdot,0) & = & w_0 & \text{dans } \Omega^+\times]0,+\infty[,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}^{k+1}-\dfrac{a+p}{2\nu}v^{k+1} & = & \dfrac{\partial u}{\partial x}^{k}-\dfrac{a+p}{2\nu}u^k & \text{sur } \Gamma_{\text{out}}\times]0,+\infty[,\end{array}\right.$$

avec $\mathcal{S}^-$ défini par (10.7) et p une constante strictement positive. A convergence nous avons les relations :

$$\begin{array}{lcl} u & = & v \text{ sur } \Gamma\times[0,T],\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{\partial v}{\partial x} \text{ sur } \Gamma_{\text{out}}\times[0,T].\end{array}$$

Remarque 3 *Cet algorithme impose une condition de type Neumann à l'équation de convection, ce qui en pratique ne peut se traiter directement. De l'équation de convection nous tirons :*

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{c}{a}v,$$

et nous pouvons récrire la condition aux limites sur Γ, sans dérivée normale :

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial t}^{k+1}-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}^{k+1}-\frac{c}{a}v^{k+1}-\frac{a+p}{2\nu}v^{k+1}=-\frac{1}{a}\frac{\partial u^k}{\partial t}-\frac{b}{a}\frac{\partial u^k}{\partial y}-\frac{c}{a}u^k-\frac{a+p}{2\nu}u^k.$$

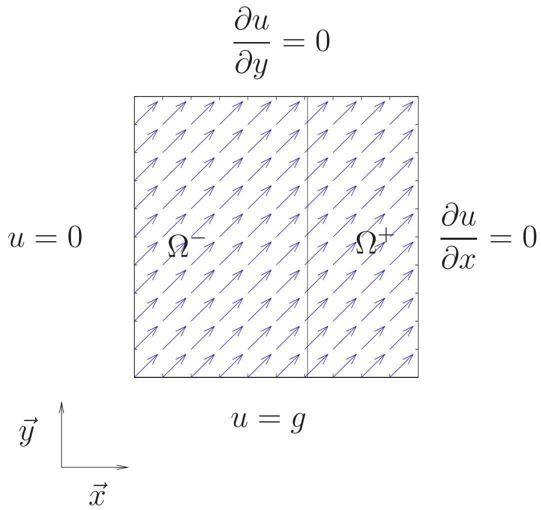
10.3 Résultats numériques

10.3.1 Vitesse constante

Problème aux limites

Nous résolvons ici l'équation de convection-diffusion sur le carré unité et sur l'intervalle de temps $[0, 7]$ avec les paramètres : $\nu = 0.001$, $a = b = 0.1$ et $c = 0$.

Si $g = e^{-100(x-0.15)^2}$, le problème aux limites est le suivant :



Nous décomposons Ω en deux sous-domaines qui ne se recouvrent pas et nous plaçons l'interface en $x = 0.6$.

La donnée initiale (Figure 10.3) est la solution du problème stationnaire :

$$\frac{1}{2}u + \vec{\mathbf{b}}.\nabla u - \nu \triangle u = 0 \text{ dans } \Omega$$

Discrétisation

Nous simulons ce problème sur 200 pas de temps, c.-à-d. $dt = 0.035$. Et le pas d'espace vaut $dx = 1/101$.

Résultats

La solution de référence, appelée solution visqueuse, est la solution de l'équation de convection-diffusion sur Ω. Elle est représentée sur la Figure 10.4 au temps $t = 7$.

Nous observons alors, après convergence c.-à-d. après deux itérations, la coupe en $y = 0.5$ de la solution du couplage au temps $t = 7$ que nous comparons à la solution visqueuse (Figure 10.5) . Dans le domaine Ω^-, la solution du couplage correspond à la solution visqueuse ; dans le domaine Ω^+, nous observons effectivement une solution qui convecte mais ne diffuse plus. Nous voyons par ailleurs que la solution et sa première dérivée sont bien continues au niveau de l'interface.

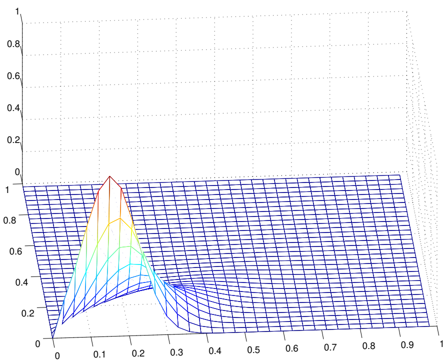


FIG. 10.3 – Condition Initiale

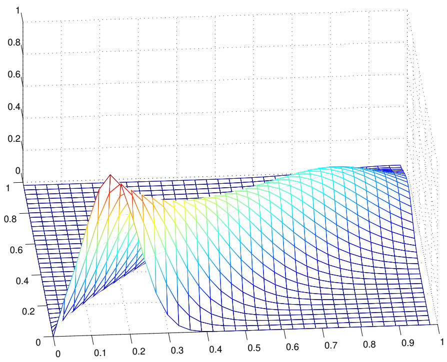


FIG. 10.4 – Solution visqueuse à $t = 7$

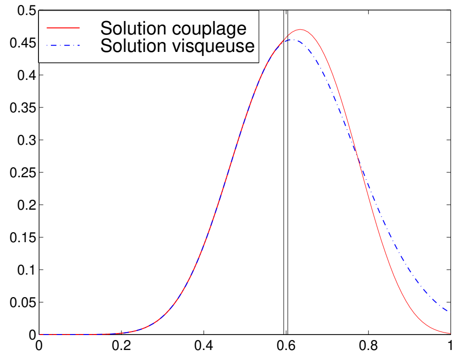


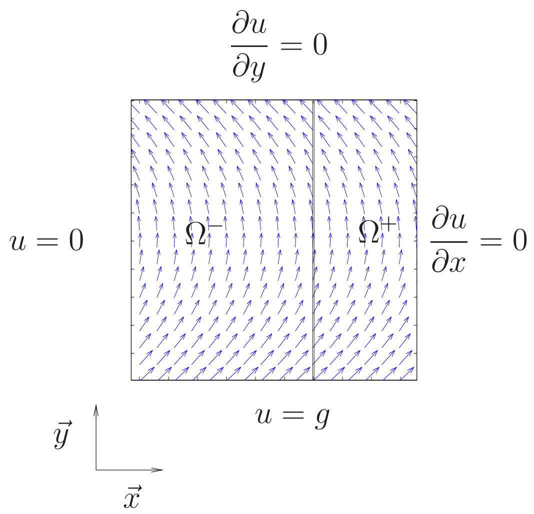
FIG. 10.5 – Solution du couplage, vitesse constante

10.3.2 Vitesse tournante

Problème aux limites

Nous résolvons ici l'équation de convection-diffusion sur le carré unité, et sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ avec les paramètres : $\nu = 0.001$, $a = 1 - 2y$, $b = 1$ et $c = 0$.

Si $g = e^{-100(x-0.4)^2}$, le problème aux limites est le suivant :



Nous décomposons Ω en deux sous-domaines et plaçons l'interface en $x = 0.6$. La donnée initiale (Figure 10.3) est la solution du problème stationnaire :

$$\frac{1}{0.01} u + \vec{\mathbf{b}}.\nabla u - \nu \triangle u = 0 \text{ dans } \Omega$$

avec les conditions aux limites précédentes.

Discrétisation

On simule ce problème sur 200 pas de temps, c.-à-d. $dt = 0.005$. Le pas d'espace vaut $dx = 1/201$.

Résultats

La solution visqueuse au temps $t = 1$ est représentée sur la Figure 10.7.

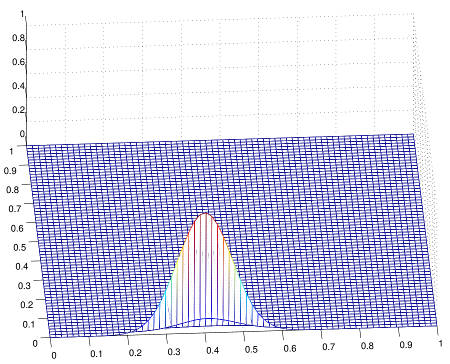


FIG. 10.6 – Condition Initiale

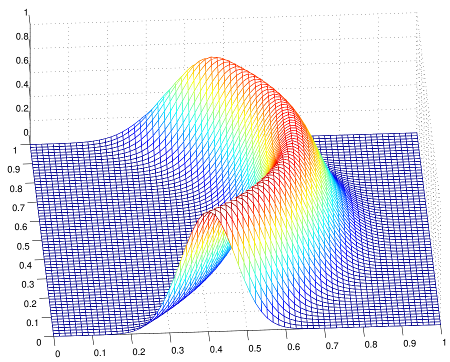


FIG. 10.7 – Solution visqueuse à $t = 1$

Les Figures 10.8 et 10.9 montrent deux coupes en $y \leq 0.5$, c.-à-d. dans la région où la vitesse de convection se dirige vers Ω^+. Nous voyons que, comme pour la vitesse constante, la solution du couplage correspond à la solution visqueuse dans Ω^-. Dans Ω^+, la solution convecte mais ne diffuse plus.
Les Figures 10.10 et 10.11 montrent deux coupes en $y > 0.5$ (région où la vitesse de convection sort de Ω^+). Nous voyons que puisque la solution n'a pas diffusé dans Ω^+, la perturbation qui en résulte se propage à Ω^-.

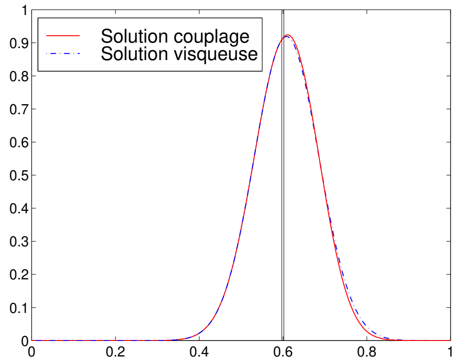


FIG. 10.8 – Coupe de la solution en $y = 0.3$

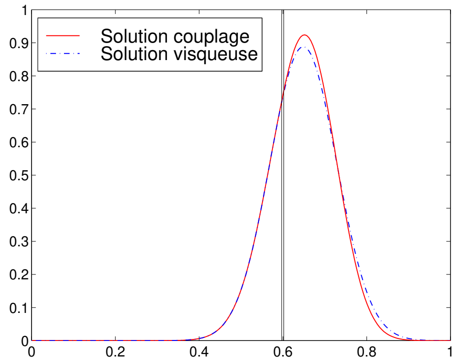


FIG. 10.9 – Coupe de la solution en $y = 0.5$

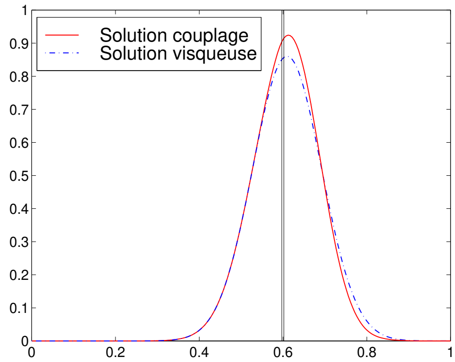


FIG. 10.10 – Coupe de la solution en $y = 0.7$

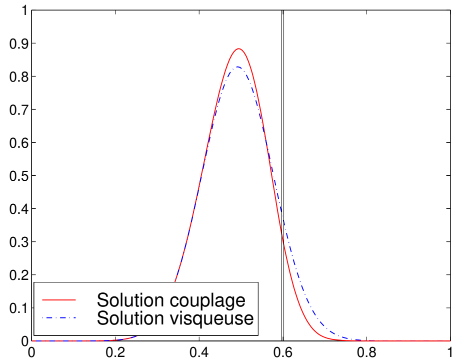


FIG. 10.11 – Coupe de la solution en $y = 0.9$

Chapitre 11

Conclusions et perspectives

Le but de cette première partie était de mettre en place un algorithme de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour l'équation de convection diffusion, et dans toute cette étude nous avons considéré une décomposition du domaine initial en deux sous-domaines.

Dans un premier temps nous avons étudié l'algorithme de relaxation d'ondes de type Schwarz classique (c.-à-d. avec des conditions de transmission de Dirichlet) qui nécessite un recouvrement entre les deux sous-domaines. Mais comme les résultats numériques l'ont montré plus loin, cette méthode s'avère lente et peu performante.

Nous avons alors écrit des conditions de transmission qui permettent la convergence de l'algorithme en deux itérations et pour lesquelles le recouvrement n'est plus nécessaire. Malheureusement les opérateurs correspondants sont pseudo-différentiels et nous ne pouvons pas les utiliser directement dans un algorithme. Nous les avons alors approchés par des opérateurs différentiels d'ordre 0 ou 1 et nous avons étudié les algorithmes correspondants. Cette étude a montré que si les données (second membre, condition initiale) avaient une forte régularité, le premier itéré de l'algorithme devait vérifier des conditions de compatibilité au temps $t = 0$. Nous avons ensuite montré la convergence de ces algorithmes dans le cas avec ou sans recouvrement des sous-domaines.

Nous avons ensuite approché les opérateurs exacts soit par développement de Taylor en basses fréquences soit par optimisation du taux de convergence. Des résultats numériques ont ensuite donné des éléments de comparaison pour ces deux méthodes. Quand la viscosité est petite les méthodes de Taylor restent compétitives mais dès que la viscosité grandit les méthodes optimisées deviennent sans conteste les méthodes les mieux adaptées. Cette remarque est valable que l'on ait un recouvrement ou non, que la vitesse soit constante (contexte de l'étude théorique) ou non. Nous avons vu que l'avantage des méthodes optimisées est de s'adapter aux données physiques du problème et à la discrétisation : le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est peu sensible aux changements des données. Nous avons également remarqué que quand la viscosité est grande, la méthode optimisée d'ordre 1 n'apporte rien à la vitesse de convergence par rapport à la méthode optimisée d'ordre 0. Il semble alors que dans ce cas (qui correspond à une symétrisation de l'équation) il est avantageux de passer à des conditions d'ordre 2 ; une étude théorique de ces conditions serait intéressante. Pour résumer, dans le cas de faibles viscosités, la méthode la plus efficace est la méthode optimisée d'ordre 1. Quand la viscosité est grande on peut se contenter de la méthode optimisée d'ordre 0, ou pour obtenir une convergence encore plus rapide, passer à l'ordre 2.

L'étude théorique a été effectuée dans le cas de deux sous-domaines avec une interface rectiligne et une vitesse de convection constante. Mais cette théorie peut facilement être appliquée au cas où le nombre de sous-domaines est supérieur à 2 : l'étude des sous-problèmes est identique et la démonstration de la convergence des algorithmes peut être facilement généralisée.

Par ailleurs, les algorithmes présentés ici peuvent s'étendre à des problèmes physiques plus généraux. Nous avons mis en place ces conditions quand la vitesse de convection n'est plus constante ; dans ce cas les paramètres optimisés varient en fonction de l'interface. Cette variation étant continue, il suffit d'optimiser quelques paramètres et d'interpoler les autres ; les algorithmes optimisés ne sont donc pas plus coûteux dans le cas d'une vitesse non constante que dans le cas d'une vitesse constante et ils ont également montré leur efficacité par rapport aux méthodes de Taylor.

Nous pouvons également imaginer une interface qui n'est pas rectiligne et les conditions d'interface du Chapitres 5 deviennent :

$$\mathcal{B}^{\pm} = \Big(\frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - \frac{a \pm p}{2\nu} \mp q\frac{\partial}{\partial t} \mp bq\frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{\tau}}}\Big),$$

avec $\vec{\mathbf{n}}$ et $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ les vecteurs normaux et tangents à l'interface.

Enfin, l'étude de ce problème de décomposition de domaine a pu être appliquée à un problème de couplage, celui de l'équation de convection diffusion et de l'équation de convection. Nous avons écrit des conditions de transmission et nous avons obtenu des résultats numériques. Ce premier pas vers le couplage d'équations est encourageant et nous permet d'envisager des couplages d'équations plus complexes.