Exercice 1 : Transformée de Legendre : définition

Soit $f : x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) On considère la droite d'équation $y = ax - b$. Pour a fixé, trouver le plus petit b tel que $f(x) \geq ax - b$. On le notera $f^\star(a)$. Faire un dessin.

b) Généraliser la définition de $f^\star$, la transformée de Legendre, à une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ puis de X un Banach.

Exercice 2 : Transformée de Legendre : exemples

a) Calculer la polaire de

$$\chi_{[0,1]} : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1], \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Calculer la polaire de $x \to |x|$.

Exercice 3 : Sous-différentiel : définition

Soit $f : x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Pour x fixé, trouver l'ensemble des a de $\mathbb{R}$ tels que la droite de pente a et passant par le point $(x, f(x))$ se trouve en tout point "en dessous" de la courbe représentative de f. On note cet ensemble $\partial f(x)$.

b) Généraliser la définition de $\partial f(x)$, la sous-différentielle de f en x, à une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ puis de X un Banach.

Exercice 4 : Sous-différentiel : exemples

a) Calculer le sous-différentiel de $\chi_{[0,1]}$ pour tout $x \in [0,1]$.

b) Calculer le sous-différentiel de $x \to |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Sous-différentiel : caractérisation

Si $f(x)$ est finie, montrer que :

$$x^\star \in \partial f(x) \Longleftrightarrow f(x) + f^\star(x^\star) =< x^\star, x > .$$

Exercice 6 : Problème

On considère le problème de minimisation

$$\inf_{v\in K} J(v) = \inf_{v\in K} \left(\frac{1}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx - \int_0^1 f(x)v(x) \right) dx,$$

où $K = \{v \in H_0^1(0,1),\ v(1/2) \geq a\}$. On pose $F(u) = a - u(1/2)$.

a) Montrer que ce problème de minimisation possède une unique solution que l'on caractérisera.

b) i) Si la solution du problème de minimisation vérifie $u(1/2) > a$, montrer que

$$(DJ(u), v-u) \geq 0\,\forall v \in K \iff DJ(u) = 0.$$

On pourra considérer $v = u + w/M$ avec $w \in H_0^1(0,1)$ et $M > 0$ bien choisi.

ii) Si la solution du problème de minimisation vérifie $u(1/2) = a$, montrer que

$$(DJ(u), v-u) \geq 0\,\forall v \in K \iff \exists p \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } DJ(u) + pDF(u) = 0.$$

On pourra considérer $v = w + u - w(1/2)\tilde{w}$ avec $w \in H_0^1(0,1)$ quelconque et $\tilde{w} \in H_0^1(0,1)$ tel que $\tilde{w}(1/2) = 1$.

c) Synthétiser les deux conditions précédentes en un seul système d'équations. Quelles équations vérifient (u,p) la solution de ce problème de minimisation ?

d) On introduit le Lagrangien associé au système i.e.

$$\mathcal{L}(u,p) = J(u) + pF(u).$$

On dit que $(u,p) \in H_0^1(0,1) \times \mathbb{R}^+$ est un point selle du Lagrangien si pour tout $(v,q) \in H_0^1(0,1) \times \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p).$$

Montrer que (u,p) est un point selle du Lagrangien si et seulement si les conditions exhibées à la question précédente sont vérifiées.

e) Montrer que si (u,p) est un point selle alors

$$\inf_{v\in H_0^1} \sup_{q\geq 0} \mathcal{L}(v,q) = \mathcal{L}(u,p) = \sup_{q\geq 0} \inf_{v\in H_0^1} \mathcal{L}(v,q).$$

f) Ecrire l'algorithme d'Uzawa pour résoudre ce problème de minimisation.

g) Expliciter les calculs quand $f = -1$.