On souhaite minimiser

$$J(X) = \frac{1}{2}(AX, X) - (b, X)$$

où A est une matrice symétrique définie positive de taille $N \times N$ et b un vecteur de taille N.

Exercice 1 : Gradient à pas fixe

Une itération de l'algorithme de gradient à pas fixe s'écrit :

$$u^{n+1} = u^n - \mu \nabla J(u^n).$$

a) Sous quelles conditions sur μ l'algorithme de gradient à pas fixe converge-t-il ?

b) Donner la valeur de μ qui assure la vitesse maximale de convergence.

c) Pour ce paramètre optimal trouver le taux de convergence de l'algorithme et montrer qu'il est lié au conditionnement de la matrice.

d) Faire un dessin pour le cas où $J(x, y) = ax^2 + by^2$.

Exercice 2 : Gradient à pas optimal

a) Expliquer l'algorithme du gradient à pas optimal.

b) Montrer que deux résidus successifs sont orthogonaux.

c) On cherche à présent à minimiser $G(x, y) = ax^2 + by^2$ où $a > 0$ et $b > 0$. Quel est le minimum de cette fonction ?

d) Montrer que l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué à G converge en une seule itération si $a = b$ ou si $x_0 y_0 = 0$ ((x_0, y_0) est la condition initiale de l'algorithme).

e) Trouver ρ^n tel que $\tilde{u}^n = u^n - \rho^n \nabla J(u^n)$ soit tel que $J(u^n) = J(\tilde{u}^n)$.

f) Montrer que $u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + \tilde{u}^n)$.

g) Montrer que u^{n+2} appartient au segment $[0, u^n]$.

h) Déduire des questions précédentes une construction géométrique de la suite $(u^n)_n$.

Exercice 3 : Gradient à pas optimal : convergence

Soit $X^\star$ la solution optimale.

a) Montrer que $J(Y) - J(X^\star) = \frac{1}{2}(A(Y - X^\star), Y - X^\star)$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$. Ainsi minimiser J revient à minimiser $E(Y) = \frac{1}{2}(A(Y - X^\star), Y - X^\star)$.

b) Calculer $E(X^{n+1})/E(X^n)$, en déduire que $E(X^{n+1}) \leq E(X^n)$.

c) On donne l'inégalité de Kantorovitch pour tout $X \neq 0$:

$$1 \leq \frac{(AX, X)(A^{-1}X, X)}{\|X\|^4} \leq \frac{1}{4}(K^{1/2} + K^{-1/2})^2,$$

où K est le conditionnement de A. Donner le taux de convergence de la méthode (i.e. le nombre $\gamma > 0$ tel que $E(X^{n+1}) \leq \gamma E(X^n)$.

d) En déduire que la méthode de gradient à pas optimal converge.

Exercice 4 : Gradient conjugué

On cherche à calculer la solution de $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que A est symétrique définie positive.

b) Soit $X_0 = (0, 0, 0)$ la condition initiale de l'algorithme du gradient conjugué. En combien d'itérations le GC converge-t-il ?