Exercice 1 : Projection sur un convexe

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit K un convexe fermé non vide. Soit $f \in H$, on s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K, \\ \|f-u\| = \inf_{v\in K} \|f-v\|. \end{cases} \tag{1}$$

a) Montrer l'identité du parallèlogramme :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \quad \forall u,v \in H.$$

b) Montrer l'existence d'une solution optimale en montrant que toute suite minimisante est une suite de Cauchy.

c) Montrer que le problème (1) possède une unique solution.

d) Montrer que la solution de (1) est caractérisée par

$$(f-u, v-u) \leq 0, \ \forall v \in K.$$

Exercice 2 : Minimisation sur un convexe

Soit $K \subset V$ un convexe fermé non vide. Soit J convexe, différentiable.

a) Montrer que u, le point minimum de J sur K vérifie $DJ(u)(v-u) \geq 0, \ \forall v \in K$.

b) Retrouver la caractérisation du minimum sur l'espace entier V.

Exercice 3 : Minimisation, cas général

Un fabricant de lait souhaite construire un emballage parallépipédique de 1024 cm^3. Le coût de fabrication au centimètre carré du fond (ou du couvercle) est le double de celui d'une paroi.

Déterminer les dimensions de la brique de lait dont le coût est minimal.

Exercice 4 : Lagrangien

Soient Q une matrice $n \times n$ symétrique définie positive et A une matrice $p \times n$ quelconque. Soient b et Λ deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$. On définit sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ la fonction :

$$\mathcal{L}(X,\Lambda) = \frac{1}{2}(QX,X) - (AX-b,\Lambda).$$

a) Calculer $\frac{\partial}{\partial X}\mathcal{L}$ et $\frac{\partial}{\partial \Lambda}\mathcal{L}$.

b) Pour Λ fixé, montrer que $X \to \mathcal{L}(X,\Lambda)$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ en un unique point.

c) Trouver les conditions que vérifie le minimum de la forme quadratique $J(x) = \frac{1}{2}(Qx, x)$ sous la contrainte $Ax = b$. Les exprimer en fonction des dérivées de $\mathcal{L}$.

Exercice 5 : Minimisation sous contrainte d'égalité

a) Trouver l'unique solution du problème :

$$\inf_{BX=c} \frac{1}{2}(AX, X) - (b, X)$$

où A est symétrique définie positive d'ordre n et B de taille $m \times n$ avec $m \leq n$.

b) Trouver l'unique solution du problème :

$$\inf \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right),$$

sous la contrainte :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$