**Exercice 1 : Conditions nécessaires et suffisantes**

Soit $J : V \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur $V$.

**a)** Montrer que si $u$ est un minimum local de $J$ sur $V$ alors $DJ(u) = 0$ et pour tout $w \in V$, $D^2J(u) \cdot w \cdot w \geq 0$.

**b)** Montrer que si $DJ(u) = 0$ et s'il existe $W(u)$, un voisinage de $u$ tel que pour tout $v \in W(u)$, $D^2J(v) \cdot w \cdot w \geq 0$ pour tout $w \in V$, alors $u$ est un minimum local de $J$.

**Exercice 2 : Polynôme de meilleure approximation**

Soit $f \in L^2(0,1)$. On cherche à approcher cette fonction par un polynôme de degré inférieur ou égal à $N$ que l'on notera :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i.$$

On note $\mathbf{a} = (a_0, \cdots, a_N)^t$ le vecteur qui contient les coefficients du polynôme $p$.

**a)** On cherche à minimiser $E(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\|f - p\|^2_{L^2(0,1)}$ sur $\mathbb{R}^{N+1}$.

i) Montrer qu'il existe une matrice $A$, un vecteur $\mathbf{b}$ et un nombre $c$ tels que $E(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{a}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{c}$, où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{N+1}$.

ii) Montrer que $A$ est symétrique définie positive.

iii) Ecrire les équations d'Euler.

iv) Montrer que ce problème possède une unique solution.

v) On considère ici que $N = 1$. Calculer explicitement la solution optimale.

**b)** Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq M}$, $M$ points de $[0,1]$. On cherche à présent à minimiser :

$$F(a) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} |f(x_j) - p(x_j)|^2$$

sur $\mathbb{R}^{N+1}$, avec $f \in C([0,1])$.

i) Montrer que $\mathrm{Inf}_{a \in \mathbb{R}^N} F(a) = 0$ quand $M \leq N+1$.

ii) Si $M \leq N+1$, le problème de minimisation admet-il toujours une unique solution ?

iii) Calculer la solution optimale quand $M = 2$ et $N = 1$.

iv) Calculer le gradient de $F$ et l'exprimer comme un produit de matrices.

v) Si $M > N+1$, étudier l'existence et l'unicité du minimum.

vi) Calculer la solution optimale quand $N = 1$.

**Exercice 3 : Démonstration du Théorème de représentation de Riesz**

Soit $V$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et de la norme correspondante $\|\cdot\|$. Soit $L$ une forme linéaire continue sur $V$.

**a)** Montrer que la somme d'une fonction $\alpha$-convexe et d'une fonction convexe est $\alpha$-convexe.

**b)** Montrer que $J : V \to \mathbb{R}$ avec $J(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - L(x)$ est $\alpha$-convexe.

**c)** Etudier l'existence et l'unicité d'un minimum de $J$ sur $V$.

**d)** Caractériser le minimum de $J$ sur $V$.

**e)** Conclure la démonstration du Théorème de représentation de Riesz.