Université de Picardie Jules Verne — Master 1 : Optimisation

TD 2 : Convexité. — Année 2008-2009

PARTIE I : CARACTERISATION DE LA CONVEXITE

Exercice 1 : Convexité et différentielles

Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fontion différentiable sur le convexe U. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

a) J est convexe sur U.

b) $\forall (x,y) \in U^2$, $J(y) \geq J(x) + DJ(x) \cdot (y-x)$,

c) $\forall (x,y) \in U^2$, $(DJ(y) - DJ(x)) \cdot (y-x) \geq 0$.

d) $\forall (x,z) \in U^2$, $D^2J(x) \cdot z \cdot z \geq 0$ si J est deux fois différentiable.

Exercice 2 : Stricte convexité et différentielle d'ordre 1

Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fontion différentiable sur le convexe U. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a) J est strictement convexe sur U.

b) $\forall (x,y) \in U^2$, $x \neq y$, $J(y) > J(x) + DJ(x) \cdot (y-x)$,

c) $\forall (x,y) \in U^2$, $x \neq y$, $(DJ(y) - DJ(x)) \cdot (y-x) > 0$.

Exercice 3 : Convexité et différentielle d'ordre 2

Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur le convexe U.

a) Montrer que si $D^2J(x) \cdot y \cdot y > 0$ $\forall (x,y) \in U^2, y \neq 0$, alors J est strictement convexe.

b) Considérer la fonction $x \to x^4$ pour montrer que la réciproque est fausse.

PARTIE II : CONVEXITE ET OPTIMISATION

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K, \\ J(u) = \inf\limits_{v \in K} J(v). \end{cases}$$

Exercice 4 : Cas convexe

Soit K un ensemble convexe et J une fonctionnelle continue.

a) Montrer que si J est convexe, alors tout minimum local de J est un minimum global. Pour un v quelconque de K on pourra considérer $w_\theta = u + \theta(v-u)$ avec θ judicieusement choisi.

b) Montrer que si J est strictement convexe, alors la solution optimale, si elle existe est unique.

Exercice 5 : Optimisation en dimension finie

Soit K un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et J continue.

a) Montrer que si K est borné, il existe une solution optimale.

b) Montrer que si K n'est pas borné mais que J est coercive, alors il existe une solution optimale.

c) Donner l'exemple d'une fonction J continue et d'un K non fermé tels que J n'ait pas de minimum sur K.

d) Donner l'exemple d'une fonction J coercive mais non continue telle que J n'ait pas de minimum sur K.

e) Donner l'exemple d'une fonction J continue et d'un K non borné tels que J n'ait pas de minimum sur K.

Exercice 6 : Optimisation en dimension infinie

Soit l'espace de Hilbert $\ell_2(\mathbb{R}) = \{x = (x_i)_{i \geq 1}$ tel que $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire $(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i$. On définit J sur $\ell_2(\mathbb{R})$ par $J(x) = (\|x\|^2 - 1)^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i^2}{i}$.

a) Montrer que J est coercive.

b) Soit $(x^n)_n$ la suite de $\ell_2(\mathbb{R})$ définie par $x_i^n = \delta_{in}$. Montrer que

$$\lim_{n \to 0} J(x^n) = 0$$

c) En déduire la valeur de $\inf_{v \in \ell_2(\mathbb{R})} J(v)$.

d) Montrer qu'il n'existe pas de point minimum à J.

e) Conclure.