Université de Picardie Jules Verne — Master 1 : Optimisation

TD 1 : Rappels de Calcul Différentiel. — Année 2008-2009

Soit $f : \Omega \subset E \to F$ avec E et F deux espaces normés.

On dit que f est (Fréchet)-différientiable en $x \in \Omega$ s'il existe un opérateur linéaire continu L de E dans F tel que

$$\lim_{\|h\|_E \searrow 0} (f(x+h) - f(x) - L(h)) = 0.$$

Dans la suite l'application L sera notée $Df(x)$.

Exercice 1 : Quelques propriétés

a) Montrer que si f est différentiable en x alors f est continue en x.

b) Soient E, F et G trois espaces normés, Ω un ouvert de E et $\mathcal{O}$ un ouvert de F. Soit $f : \Omega \to \mathcal{O}$ différentiable en $x \in \Omega$ et $g : \mathcal{O} \to G$ différentiable en $f(x)$. Montrer que $(g \circ f)$ est différentiable en x et que

$$D[g \circ f](x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Exercice 2 : Différentielle de l'application norme

On se place dans $\mathbb{R}^n$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

a) Montrer que $x \to \|x\|$ n'est pas dérivable en 0.

b) Calculer la différentielle de $x \to \|x\|^2$ puis de $x \to \|x\|$ en $x \neq 0$.

Exercice 3 : Calcul de différentielles

On note $(\cdot,\cdot)$ et $\|\cdot\|$ respectivement le produit scalaire et la norme dans $\mathbb{R}^n$. Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

a) $F_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_1(u) = (Au, Bu)$ où A et B sont deux matrices $n \times n$.

b) $F_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_2(u) = \|u\|^{2p}$ où p est une entier strictement positif.

c) $F_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_3(u, \lambda) = \frac{1}{2}(Au, u) + (\lambda, u - u_0) + r\|u - u_0\|^2 - (f, u),$$

où u_0 et f sont dans $\mathbb{R}^n$ et r est un réel.

d) $F_4 : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$, $F_4(u) = \int_0^1 xuu' \, dx$.

Exercice 4 : Gradient et Hessien

a) Rappeler le théorème de représentation de Riesz.

b) Donner les gradients des fonctions définies à l'exercice 1. **a)**, **b)** et **c)**.

c) Calculer les dérivée secondes des fonctions définies à l'exercice 1.

d) Donner les hessiens des fonctions définies à l'exercice 1. **a)**, **b)** et **c)**.