Université de Picardie Jules Verne — Master 1 : Optimisation

Devoir 2 à rendre le mercredi 26 novembre.

Exercice 1 : Portefeuille d'actions

Soient A une matrice symétrique définie positive d'ordre N, $u = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^N$ et $e \in \mathbb{R}^N$ tel que $0 < e_1 < e_2 < \cdots < e_n$.

Pour $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$ donnés, on définit les ensembles

$$\begin{aligned} C_1(\epsilon) &= \{x \in \mathbb{R}^N, (u,x) = 1 \text{ et } (e,x) = \epsilon\}, \\ C_2(\sigma) &= \{x \in \mathbb{R}^N, (u,x) = 1 \text{ et } \frac{1}{2}(Ax,x) = \sigma\}. \end{aligned}$$

On s'intéresse aux deux problèmes suivants :

$$\min_{x \in C_1(\epsilon)} \frac{1}{2}(Ax, x), \tag{1}$$

$$\max_{x \in C_2(\sigma)} (e, x). \tag{2}$$

a) Montrer que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, l'ensemble des contraintes $C_1(\epsilon)$ est non vide, fermé et non borné (on pourra considérer la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = x + nz$ avec $x \in C_1(\epsilon)$ et z bien choisi). En déduire que (1) admet une unique solution.

b) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $C_2(\sigma)$ est fermé et borné et trouver une condition suffisante pour que $C_2(\sigma)$ soit non vide. En déduire que (2) admet au moins une solution.

c) On note λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $(u, x) = 1$ et μ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $(e, x) = \epsilon$. On définit les réels a, b, c et d par :

$$a = (A^{-1}u, u), \quad b = (A^{-1}u, e), \quad c = (A^{-1}e, e) \quad \text{et} \quad d = b^2 - ac.$$

En calculant $(A(u + \theta e), u + \theta e)$ pour θ quelconque, montrer que $d > 0$.

d) En utilisant les conditions d'optimalité associés à l'ensemble $C_1(\epsilon)$, montrer que la solution x du problème (1) vérifie

$$\begin{aligned} \lambda &= (c - b\epsilon)/d, \\ \mu &= (a\epsilon - b)/d, \\ x &= -A^{-1}(\lambda u + \mu e). \end{aligned}$$

e) On dit qu'une solution x est efficiente si elle est solution commune aux problèmes (1) et (2) et on appelle frontière d'efficience la courbe du plan (ϵ, σ) correspondant à l'ensemble de ces solutions lorsque ϵ et σ varient. Déterminer la frontière d'efficience des problèmes (1) et (2).

Exercice 2 : Inégalité de Kantorovitch

Soit A une matrice hermitienne et définie positive d'ordre N. On souhaite montrer que pour $X \neq 0$,

$$1 \leq \frac{(AX,X)(A^{-1}X,X)}{\|X\|^4} \leq \frac{1}{4}(K^{1/2}+K^{-1/2})^2,$$

où K désigne le conidtionnement de A.

a) On rappelle que toute matrice hermitienne et définie positive peut s'écrire sous la forme

$$A = UDU^\star,$$

avec U une matrice unitaire et D une matrice diagonale formée des valeurs propres de A. Exprimer (AX,X) et $(A^{-1}X,X)$ en terme de U et D. On introduira le vecteur $Y = U^\star X$.

b) Montrer que la quantité $\frac{(AX,X)(A^{-1}X,X)}{(X,X)^2}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^N \alpha_i\lambda_i \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\lambda_i}$ avec $0 \leq \alpha_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq N}$ les valeurs propres de A.

c) Soient $(M_i)_{1\leq i\leq N}$ les points de coordonnées $(\lambda_i, 1/\lambda_i)$. On considère la combinaison convexe $M = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i$ et on introduit $\overline{\lambda} = \sum_{i=1}^N \alpha_i\lambda_i$. Expliquer pourquoi M se trouve entre le point de coordonnées $(\overline{\lambda}, 1/\overline{\lambda})$ et le point du segment $[M_1, M_N]$ et d'abscisse $\overline{\lambda}$.

d) Montrer l'inégalité :

$$1 \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i\lambda_i \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \leq \overline{\lambda}\left(\frac{\lambda_N+\lambda_1-\overline{\lambda}}{\lambda_N\lambda_1}\right).$$

e) Conclure.