Université de Picardie Jules Verne — Master 1 : Optimisation

Devoir 1 à rendre le 15 octobre 2008.

Définition 1 *On dit que J est α-convexe sur V si :*

$$\forall (x,y) \in V,\ \forall \theta \in [0,1],\ f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y) - \frac{\alpha}{2}\theta(1-\theta)\|x-y\|^2.$$

Théorème 1 *Si J est α-convexe sur K, alors il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $\delta \in \mathbb{R}$ telles que*

$$J(v) \geq \gamma \|v\|^2 - \delta, \quad \forall v \in K.$$

Exercice 1 : α-convexité

Soit $J : V \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) J est α-convexe.

b) $\forall (u,v) \in V^2$, $J(v) \geq J(u) + DJ(u)\cdot(v-u) + \frac{\alpha}{2}\|u-v\|^2$.

c) $\forall (u,v) \in V^2$ $(DJ(v) - DJ(u))\cdot(v-u) \geq \alpha\|u-v\|^2$.

d) $\forall u \in V, \forall w \in V$, $D^2J(u)\cdot w \cdot w \geq \alpha\|w\|^2$.

Exercice 2 : Exemple de fonctionnelle α-convexe

Soit A une matrice symétrique d'ordre N et $b \in \mathbb{R}^N$. On pose $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x).$$

a) Montrer que J est convexe si et seulement si A est positive.

b) Montrer que J est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.

c) Montrer que si A est définie positive alors J est α-convexe. Préciser la valeur de α.

Exercice 3 : Existence et unicité d'un minimum en dimension infinie

Soit K un convexe fermé non vide d'un Hilbert V et J une fonction α-convexe continue sur K.

a) Montrer que si le minimum de J sur K existe alors il est unique.

b) Utiliser le Théorème 1 pour montrer que la quantité $\mathrm{Inf}_{v \in K} J(v)$ est finie.

c) Soit $(u_n)_n$ une suite minimisante de J sur K. En appliquant la définition de l'α-convexité de J avec $\theta = 1/2$, montrer que cette suite est de Cauchy.

d) En déduire que le problème de minimisation de J sur K possède une unique solution.

Exercice 4 : Application

Soit $V = \{v :]0,1[\to \mathbb{R}$ tels que $v \in L^2(0,1), v' \in L^2(0,1)\}$. On acceptera le fait que V est un espace de Hilbert (voir le module de distributions) pour le produit scalaire

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

On note $\|\cdot\|_V$ la norme associée. On admettra également que V est inclus avec injection continue dans $C([0,1])$ ce qui signifie qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$|u(x)| \le C\|u\|_V.$$

On définit $J : V \to \mathbb{R}$, $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,dx + \frac{c}{2}\int_0^1 (u(x))^2\,dx$ avec $c \in \mathbb{R}^+$. On souhaite minimiser J sur $K = \{v \in V$ tels que $v(0) = v(1) = 0\}$.

a) Montrer que J est continue et α-convexe sur V. Préciser la valeur de α.

b) Montrer que K est un convexe, fermé non vide.

c) Montrer que le problème de minimisation de J sur K possède une unique solution.

d) Ecrire l'équation d'Euler.