Exercice 1 : Echauffement : questions de cours

a) Rappeler ce qu'est une fonction à décroissance rapide. Donner l'exemple d'une fonction qui appartient à $S(\mathbb{R}^N)$ et d'une fonction qui n'appartient pas à $S(\mathbb{R}^N)$.

b) Mêmes questions pour l'ensemble des fonctions à croissance lente.

c) Donner des exemples de distributions tempérées et non tempérées (on pourra considérer la distribution associée à $x \to e^{x^2}$).

d) Montrer que si $T \in S'(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout P polynôme, on a $P\partial^\alpha T \in S'$.

e) Montrer que si $S \in S'(\mathbb{R}^N)$, on a $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(S) = (2\pi)^N \check{S}$.

Exercice 2 : Transformée de Fourier des distributions tempérées

a) Calculer la transformée de Fourier de δ_k, $k \in \mathbb{Z}$ et de $\delta_0^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $T_n = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k$ converge dans $S'(\mathbb{R}^N)$ vers $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$.

Exercice 3 : Transformée de Fourier et distributions homogènes

Soit $S \in S'(\mathbb{R}^N)$. Montrer que si S est homogène de degré p alors la transformée de Fourier de S est homogène de degré $-N-p$.

Exercice 4 : Transformée de Fourier et parité

a) On dit qu'une distribution T est paire (resp. impaire) si $\langle T, \check{\phi}\rangle = \langle T, \phi\rangle$ où $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ (resp. $\langle T, \check{\phi}\rangle = -\langle T, \phi\rangle$). Montrer que la transformée de Fourier d'une distribution paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

b) Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, donner la relation entre $\mathcal{F}T$ et $\overline{\mathcal{F}}T$. Que devient-elle si T est paire ou impaire ?

Exercice 5 : Calcul de transformées de Fourier

a) Calculer la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}$ de $\delta_0^{(p)}$ et x^p.

b) Montrer que T_H où H est la fonction de Heaviside est une distribution tempérée. Utiliser la relation $T_H \star \delta_0' = \delta_0$ pour calculer la transformée de Fourier de T_H.

c) Calculer $\mathcal{F}(x \mapsto |x|)$.

d) Calculer $\mathcal{F}(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2})$.

Exercice 6 : Transformées de Fourier et distributions tempérées

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et θ la fonction caractèristique de $[0, 1]$.

a) Calculer $P \star \theta$.

b) Montrer que si P est un polynôme et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ alors $P \star T$ est un polynôme de degré inférieur au degré de P.