Exercice 1 : $S(\mathbb{R}^N)$

Les fonctions suivantes sont-elles dans $S(\mathbb{R}^N)$?

a) $f_1(x) = e^{-|x|}$.

b) $f_2(x) = e^{-|x|^2}x^\alpha$ avec α un multi-indice de longueur 5.

c) $f_3(x) = e^x \cos(e^x)$ avec ici $N = 1$.

d) $f_4(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(t)}{1+t^\alpha} e^{-it\cdot x} dt$ avec α un multi-indice de longueur m, m donné et ϕ dans $S(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 2 : Convolution et transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^N)$

Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $f_1 * f_2$ est identiquement nulle. Peut-on affirmer que f_1 ou f_2 est nulle ? Et si $f_1 = f_2$?

Exercice 3 : Convolution et transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R})$

Soient τ et σ deux réels strictement positifs. En utilisant la transformée de Fourier, calculer

$$g_\sigma * g_\tau \quad \text{où} \quad g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Exercice 4 : Transformée de Fourier

Soit A une matrice symétrique de taille $N \times N$ telle que

$$\exists \alpha > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N \ (Ax, x) \geq \alpha |x|^2.$$

a) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-(Ax,x)}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) Calculer la transformée de Fourier de $e^{-(Ax,x)}$ dans le cas où A est diagonale.

c) En diagonalisant A par une matrice U orthogonale, montrer que

$$\mathcal{F}(e^{-(Ax,x)})(\xi) = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det(A)}} e^{-\frac{1}{4}(A^{-1}\xi,\xi)}.$$