Exercice 1 : Echauffement

a) Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $< S, u >$ est bien défini.

b) Comment définit-on le produit de convolution des deux distributions $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in D'(\mathbb{R}^N)$?

c) Calculer les convolutions suivantes :

$$\delta_a \star T_H, \;\; \delta' \star T_f, \;\; T \star T_f, \;\; T \star T_g,$$

où $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $f : x \to 1$ et $g : x \to e^x$.

Exercice 2 : Associativité

a) Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $U \in D'(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $(S \star T) \star U = S \star (T \star U)$.

b) Comparer $(T_f \star \delta') \star H$ et $T_f \star (\delta' \star H)$ où $f : x \to 1$. Commenter.

Exercice 3 : Effets de $\mathbf{e^{(x,a)}}$

Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in D'(\mathbb{R}^N)$. Pour un $a \in \mathbb{R}^N$ on définit la fonction f par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\to e^{(a,x)}, \end{aligned}$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^N$.

a) Montrer que l'on a

$$(fS) \star (fT) = f(S \star T).$$

b) Soit P l'opérateur différentiel défini par $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq 2} c_\alpha \partial^\alpha$ où $c_\alpha \in \mathbb{C}$. Simplifier l'expression de $P(\partial)[fT]$.

c) Trouver un opérateur différentiel Q tel que

$$Q(\partial)[fT] = fP(\partial)[T] \text{ pour tout } T \in D'(\mathbb{R}^N).$$

d) Soit $E \in D'(\mathbb{R}^N)$ une solution élémentaire de P. Trouver un opérateur dont fE est solution élémentaire.