Exercice 1 : Préliminaires au théorème de Lax Milgram

Soit Φ une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert réel H muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$. On suppose que Φ est continue et coercive, i.e. qu'il existe $C>0$ et $\alpha>0$ tels que

$$\begin{aligned} &|\Phi(u,v)| \le C\,\|u\|_H\,\|v\|_H, && \forall u,v\in H,\\ &\Phi(u,u)\ge \alpha\|u\|_H^2, && \forall u\in H.\end{aligned}$$

a) Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu T sur H tel que

$$\Phi(u,v) = (T(u),v)_H, \quad \forall u,v\in H.$$

b) Montrer que $T(H)^\perp = \{0\}$.

c) Montrer que $\|T(u)\|_H \ge \alpha\|u\|_H$, $\forall u\in H$.

d) En déduire que T est injectif et que $T(H)$ est fermé.

e) Déduire des questions précédentes que T est un isomorphisme de H dans H.

Exercice 2 : Théorème de Lax Milgram

Soit L un forme linéaire continue sur H et Φ comme à l'exercice 1.

a) Montrer qu'il existe un unique $u\in H$ tel que

$$\Phi(u,v) = L(v), \quad \forall v\in H.$$

b) Montrer que cette solution u dépend continument de la forme linéaire L.

c) On suppose de plus que Φ est symétrique. Soit J définie sur H telle que :

$$J : v\mapsto \frac{1}{2}\Phi(v,v) - L(v).$$

Montrer que u est caractérisé par la condition

$$J(u) = \min_{v\in H} J(v).$$

Exercice 3 : Application

Soient $g,h\in L^\infty(\Omega)$ et $f\in L^2(\Omega)$. On suppose que $h\ge 0$ p.p. et qu'il existe $\alpha>0$ tel que $g\ge\alpha$ p.p. On s'intéresse au problème suivant :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u\in H_0^1(\Omega) \text{ tel que}\\ -\operatorname{div}(g\nabla u) + hu = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).\end{array}\right. \tag{1}$$

a) Ecrire la formulation variationnelle associée à (1).

b) Montrer que (1) admet une unique solution.

c) Préciser de quel problème de minimisation u est solution.

d) Montrer que si $f\le 0$ p.p. sur Ω alors $u\le 0$ p.p. sur Ω.