Exercice 1 : Exemples de fonctions H^1 en dimension 1

Les fonctions f suivantes sont-elles dans $H^1(\mathbb{R})$?

a) $f : x \to \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

b) $f : x \to \begin{cases} x+1 \text{ si } -1 \leq x \leq 0, \\ -x+1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Exercice 2 : L'espace H^1 en dimension 1.

a) Montrer que
$$|\phi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{x} 2\,\phi(t)\,\phi'(t)\,dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

b) En déduire que
$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}).$$

c) Soit I un intervalle ouvert. Montrer un résultat analogue pour $u \in H^1(I)$.

d) Montrer que
$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}).$$

Exercice 3 : L'espace $H_0^1(a,b)$

Soient a, b deux réels avec $a < b$. On souhaite montrer que
$$H_0^1(a,b) = \{f \in H^1(a,b) / \, f(a) = f(b) = 0\}.$$

a) Rappeler la définition de l'espace $H_0^1(a,b)$.

b) Montrer que si $v \in H_0^1(a,b)$ alors $v(a) = v(b) = 0$.

c) Soit $J \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que
$$J(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leq 1 \\ t & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases}$$
et $|J(t)| \leq |t|$. On considère $u \in H^1(a,b)$ tel que $u(a) = u(b) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = J(nu)/n$.
Montrer que $u_n \in H^1(a,b)$ et que u_n est à support compact dans $]a,b[$.

d) Montrer que u_n tend vers u dans $H^1(a,b)$.

e) En utilisant une suite régularisante, montrer que $u_n \in H_0^1(a,b)$.

f) Conclure.

Exercice 4 : Exemples de fonctions H^1 non bornées en dimension $N \geq 2$

Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Pour quelles valeurs de α, les fonctions suivantes sont-elles dans $H^1(B)$?

a) $f : x \to |log(|x|)|^\alpha$ dans $\mathbb{R}^2$

b) $f : x \to |x|^{-\alpha}$ dans $\mathbb{R}^N, N \geq 3$

Exercice 5 : Exemples de fonctions H^1 en dimension 2

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de classe C^∞ et tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1 , Ω_2 deux ouverts disjoints. On considère une fonction u telle que $u = u_1 \chi_{\Omega_1} + u_2 \chi_{\Omega_2}$ avec $u_i \in C^1(\Omega_i)$ pour $i = 1, 2$.

a) Calculer ∇u dans $D'(\Omega)$.

b) Sous quelle condition la fonction u appartient-elle à $H^1(\Omega)$?

Exercice 6 : Application trace

On considère la suite de fonctions $v_n(x) = e^{-nx}$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Etudier la convergence de $(v_n)_n$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et en déduire que l'on ne peut pas définir d'application trace continue sur cet espace.

b) Montrer que l'on peut en revanche définir une application trace sur $H^1(\mathbb{R}^+)$.