Université de Picardie Jules Verne — Master 1 : Distributions

TD3 : Dérivation des distributions — Année 2008-2009.

Exercice 1 : Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des distributions suivantes :

a) $T = T_f$ où $f : x \to \max(0, 1 - |x|)$.

b) $T = T_f$ où $f : x \to sign(x)$.

c) $T = T_f$ où $f : x \to H(x)$.

d) $T = Vp(\frac{1}{x})$.

Exercice 2 : Calcul de dérivées

a) Soit $g \in C^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$. Montrer que

$$\partial(gT) = g'T + g\partial T.$$

b) Calculer la dérivée de $f : x \to x^2 \log |x|$ au sens des distributions.

Exercice 3 : Calcul de dérivées

Soit T, l'application donnée par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \ \ T(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, x) dx$$

a) Montrer que T est une distribution. Préciser son ordre.

b) Déterminer son support.

c) Calculer $\partial_x T + \partial_y T$.

Exercice 4 : Résolution d'équations dans $\mathcal{D}'$

a) Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$. Montrer que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$.

b) On suppose de plus que ψ vérifie $\int \psi(x)dx = 0$. Montrer que $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

c) En déduire que :

$$\psi = \theta' \text{ où } \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \int \psi(x)dx = 0.$$

d) Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. En considérant $\psi(x) = \phi(x) - \chi_0(x) \int \phi(t)dt$ où $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ sera bien choisie, montrer que pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a :

$$T' = 0 \Longleftrightarrow T = cste.$$

Exercice 5 : Laplacien

a) Soit $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Montrer que $\frac{1}{r}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $\triangle(\frac{1}{r})$ sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

c) Montrer que $< \triangle(\frac{1}{r}), \phi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{|X|} \triangle\phi(X)\, dX$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

d) Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ la quantité $\triangle(\frac{1}{r})$.