Université de Picardie Jules Verne	Master 1 : Distributions
TD2 : Opérations sur les distributions	Année 2008-009

Dans toute la feuille, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Exercice 1 : Mesures positives

On dit qu'une distribution T sur Ω est positive si pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a :

$$\phi \geqslant 0 \Longrightarrow < T, \phi > \geqslant 0.$$

Montrer qu'une distribution positive est une mesure (distribution d'ordre 0).

Exercice 2 : Produit de distributions ?

a) Que valent les distributions $x\delta$ et $xVp(\frac{1}{x})$?

b) Rappeler la définition du produit d'une fonction f de classe C^∞ avec une distribution.

c) Montrer que l'on ne peut pas étendre ce produit en un produit sur l'espace des distributions qui soit commutatif et associatif.

Exercice 3 : Restriction d'une distribution

Soit $h(x) = e^{1/x}$, $x \in \mathbb{R}^\star$.

a) Montrer que h définit une distribution T_h sur $\mathbb{R}^\star$.

b) Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset [1, 2]$, $\phi \geq 0$ et $\int \phi = 1$. Montrer que la suite définie par

$$\phi_k(x) = e^{-k/2} k\phi(kx),\ k \in \mathbb{N},$$

converge vers 0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

c) Cette suite converge-t-elle dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^\star)$?

d) Utiliser la suite de fonctions $(\phi_k)_k$ précédente pour montrer qu'il n'existe aucune distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T|_{\mathbb{R}^\star} = T_h$.

Exercice 4 : Support d'une distribution

Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ et T une distribution sur Ω.

a) Montrer que si $\phi T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $< T, \phi >= 0$.

b) Considérer $T = \delta'$, pour montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 5 : Support d'une distribution

Montrer que si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on a $\mathrm{supp}(fu) \subset \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}\ (u)$.

Comment se comporte le support d'une distribution par restriction ?

Exercice 6 : Résolution d'une équation dans $\mathcal{D}'$

a) Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
- ψ s'écrit $\psi(x) = x\theta(x)$ avec $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,
- $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\psi(0) = 0$.

b) Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. En prenant $\psi = \phi - \phi(0)\chi$ avec χ bien choisie, chercher T telle que :

$$xT = 0.$$