**Exercice 1 : Espaces de Sobolev d'indices fractionnaires**

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit $H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in S'(\mathbb{R}^N); (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$.

**a)** Montrer que $H^s(\mathbb{R}^N)$ muni de la norme $\|u\|^2_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\|^2_{L^2}$ est complet.

**b)** Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $0 < |\alpha| \le m$, il existe $C$ tel que :

$$\prod_{j=1}^{N} |\xi_j|^{2\alpha_j} \le (1+|\xi|^2)^m \le C \left(1 + \sum_{0<|\alpha|\le m} \prod_{j=1}^{N} |\xi_j|^{2\alpha_j}\right) \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

**c)** Montrer que si $m \in \mathbb{N}$ alors $H^m(\mathbb{R}^N)$ coincide avec $\{u \in L^2(\mathbb{R}^N); \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N), |\alpha| \le m\}$.

**Exercice 2 : Espaces de Sobolev d'indices fractionnaires**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on introduit :

$$H^s_{\text{loc}}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \ \phi\, u \in H^s(\mathbb{R}^n),\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

**a)**
- Montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset S(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $C^\infty(\Omega) \subset \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\text{loc}}(\Omega)$.

**b)**
- Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\hat{u}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$.
- Montrer que $H^s(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ tels que $s > N/2 + k$.
- Montrer que $\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\text{loc}}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$.

**c)** Montrer que $\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\text{loc}}(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} H^m_{\text{loc}}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$.

**Exercice 3 : Laplacien**

**a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+_\star$. Montrer que l'opérateur $-\triangle + \lambda$ est un isomorphisme de $H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

**b)** Montrer qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $\delta_0 = (-\triangle + 1)^m f$.

**Exercice 4 : Distributions à support compact**

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{E}'_k(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des distributions à support compact d'ordre inférieur ou égal à $k$.

**a)** Montrer que si $T \in \mathcal{E}'_k(\mathbb{R}^N)$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\left|\widehat{T}(\xi)\right| \le C \sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|\,.$$

**b)** En déduire que pour tout $s < -k - N/2$,

$$\mathcal{E}'_k(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N).$$