Exercice 1 : Convergence dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$f_n : x \to \frac{1}{n} f(\frac{x}{n}).$$

a) Montrer que f_n ainsi que toutes ses dérivées converge vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) La suite f_n converge-telle vers 0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : Un résultat qui servira plus tard

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $M > 0$ tel que supp $\phi \subset \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq M\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{n+1}} \left(\phi(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \phi^{(j)}(0) \right) \text{ pour } x \neq 0, \\ \frac{1}{(n+1)!} \phi^{(n+1)}(0) \text{ pour } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\sup_{|x| \leq M} |\psi(x)| \leq C \sup_{|x| \leq M} |\phi^{(n+1)}(x)|.$$

Exercice 3 : Définition d'une distribution I

Parmi les applications $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, quelles sont celles qui définissent une distribution ? En préciser l'ordre.

a) $< T, \phi >= |\phi(0)|^2$.

b) $< T, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)| dt$.

c) $< T, \phi >= \int_0^1 \phi^{(k)}(t) dt$ pour $k \in \mathbb{N}$.

d) $< T, \phi >= \sum_{n=0}^{N} \phi^{(n)}(0)$.

e) $< T, \phi >= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(n)$.

Exercice 4 : Utilisation des fonctions plateaux

Montrer que la forme linéaire $< T, \phi >= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(0)$ n'est pas bien définie sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour cela, on définira grâce aux fonctions plateaux une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Définition d'une distribution II

Montrer ques les formes linéaires sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ suivantes définissent des distributions :

a) $< Vp\,\dfrac{1}{x}, \phi >= \lim\limits_{\epsilon \to 0} \displaystyle\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$

b) $< Pf\,\dfrac{1}{x^2}, \phi >= \lim\limits_{\epsilon \to 0} \displaystyle\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon}.$

c) $< Pf\,\dfrac{H}{x^2}, \phi >= \lim\limits_{\epsilon \to 0} \displaystyle\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - \frac{\phi(0)}{\epsilon} + \phi'(0) \log \epsilon.$