Nous rappelons les deux résultats d'intégration suivants :

Théorème 1 (convergence dominée) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions L^1. On suppose que*
– *$f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω.*
– *il existe $g \in L^1$ telle que pour chaque n $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.*
Alors $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Théorème 2 (dérivation sous le signe $\int$) *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$. On suppose que*
– *$\forall t \in I, f(\cdot, t) \in L^1$,*
– *Pour p.p. $x \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe sur I,*
– *$\exists g \in L^1$ telle que $\forall t \in I$ $|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)| \leq g$ p.p.,*
Alors $t \to \int_\Omega f(x,t)dx$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

Exercice 1 : Suite régularisante.

a) On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction ρ suivante :

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ si } |x| < 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Préciser le support de ρ.

b) Construire une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

c) On considère une suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ avec $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. On dit que $(\rho_n)_n$ est *régularisante* si pour tout $n \geq 1$ on a $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$ et si le support de ρ_n est inclus dans $\overline{B}(0, 1/n)$. Construire une suite régularisante.

Exercice 2 : Convolution.

Montrer que si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 3 : Convolution et régularisation I.

Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$ et $(\rho_n)_n$ la suite régularisante de l'exercice 1. On souhaite montrer que sur tout compact K la suite $(\rho_n \star f)_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ converge uniformément vers f.

a) Montrer que $\rho_n \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\rho_n \star f(x) - f(x) = C \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y)(f(x - \frac{y}{n}) - f(x))dy.$$

c) Utiliser le théorème de Heine pour montrer le résultat souhaité.

d) Interpréter le résultat trouvé en terme de densité.

Exercice 4 : Convolution et régularisation II.

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que la suite $\rho_n \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ converge vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 5 : Rappels de topologie

Dans l'espace métrique E, soit X une partie non vide et $u \notin X$.

a) Montrer que pour tout $x, y \in E$:

$$|d(x,X) - d(y,X)| \leq d(x,y).$$

b) Donner un exemple où $d(u,X) = 0$.

c) Si X est fermé montrer que $d(u,X) > 0$.

d) Si X est compact montrer qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $d(u,X) = d(u,x_0)$.

e) Soit X un compact et Y un fermé, X et Y étant disjoints. Montrer que $d(X,Y) = \inf_{x\in X} \inf_{y \in Y} d(x,y)$ est strictement positive.

f) Trouver un exemple de deux fermés disjoints dont la distance est nulle.

g) Soit K un compact et F_1 un fermé avec K et F_1 disjoints. Soit $K_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^N, d(x,K) \leq \alpha\}$. Montrer que l'on peut choisir α tel que $K_\alpha \cap F_1 = \emptyset$.

Exercice 6 : Changement de variables

a) Rappeler le théorème de changement de variables pour le calcul d'une intégrale.

b) Soit f une fonction radiale de $\mathbb{R}^N$. Montrer que

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} |f(r)| r^{N-1} dr < +\infty.$$

c) Etudier l'intégrabilité en 0 et à l'infini de la fonction $f(x) = |x|^\alpha$ définies sur $\mathbb{R}^N_\star$.