Université de Picardie Jules Verne — Année 2007-2008
Master 1 : Distributions
Devoir 3 à rendre le mercredi 10 décembre.

Exercice 1 : Calcul d'un produit de convolution

Soient m, n, p et q quatre entiers naturels. Calculer le produit de convolution suivant :

$$(x^m \delta_0^{(n)}) \star (x^p \delta_0^{(q)}).$$

Exercice 4 : Convolution dans $D'_+(\mathbb{R})$

On définit $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \text{supp } T \subset \mathbb{R}_+\}$.

a) Soit T une distribution de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
i) Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, montrer que $F(x) =< T, \tau_{-x}\phi >$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ et qu'il existe $M > 0$ (qui dépend du support de ϕ) tel que $\text{supp}(F) \cap \text{supp}(S) \subset [0, M]$.
ii) En déduire que si S est une distribution de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ alors le produit de convolution entre S et T est bien défini.

b) Quel est l'élément neutre de la convolution dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$?

c) On admet que pour tout $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, il existe au plus un élément $T^{-1} \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ tel que $T \star T^{-1} = \delta_0$.
i) Soit X une distribution, calculer la dérivée de l'équation $H \star X = \delta_0$ et en déduire H^{-1}.
ii) De même, utiliser l'équation $\delta_0 \star X = H$ pour calculer $(\partial\delta_0)^{-1}$.
iii) Calculer $(\partial\delta_0 - \lambda\delta_0)^{-1}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. On montrera pour cela que $X = (\partial\delta_0 - \lambda\delta_0)^{-1}$ vérifie $\partial X - \lambda X = \delta_0$ puis on résoudra cette dernière équation.

d) Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Montrer que $(P(\partial)[\delta_0])^{-1}$ est solution élémentaire de $P(\partial)$.

e) i) Montrer que

$$\partial^\alpha \delta_0 = \overbrace{\partial\delta_0 \star \cdots \star \partial\delta_0}^{\alpha \text{ fois}}.$$

ii) Montrer que pour toutes distributions $(T_i)_{1 \le i \le m}$, $T_i \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $(T_i)^{-1}$ existe on a :

$$(T_1 \star \cdots \star T_m)^{-1} = (T_m)^{-1} \star \cdots \star (T_1)^{-1}.$$

f) On écrit P sous la forme $P(\delta) = (\partial - z_1)\cdots(\partial - z_m)$ où $z_i \in \mathbb{C}$.
i) Montrer que

$$P(\partial)[\delta_0] = (\partial\delta_0 - z_1) \star \cdots \star (\partial\delta_0 - z_m).$$

ii) En déduire que

$$(P(\partial)[\delta_0])^{-1} = (H\, e^{z_1 x}) \star (H\, e^{z_2 x}) \ldots \star (H\, e^{z_m x}).$$

g) En déduire que tout opérateur différentiel non nul et à coefficients constants admet une solution élémentaire.